ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 15 mai 1984 de 8h à 12h

Les parties III et IV, indépendantes entre elles, proposent deux autres démonstrations de la formule (3) de II-4-b.

Dans tout le problème, <u>n</u> désigne un entier supérieur à 1, et l'on note, pour tout entier $p \leq n$, $I_p = \{0, 1, 2, \dots, p\}$.

<u>Question préliminaire</u> : $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(a,b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b \, dx$

a) Déterminer, lorsque $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre $I(a,b)$ et $I(a+1, b-1)$. En déduire $I(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer une expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{j=0}^{b} (-1)^j \frac{C_b^j}{a+j+1} \qquad (0)$$

I. 1) $\mathbb{R}_n[X]$ désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \exists! \ Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad (1)$$

et que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{array}$ (Q défini par la relation (1))

est linéaire.

2) Montrer que f est bijective et définir l'application réciproque f^{-1}.

3) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la matrice A^{-1} inverse de A. Ces matrices sont-elles diagona-

(4) a - Soit α une racine complexe d'un polynôme $Q \in \Pi_n[X]$, d'ordre de multiplicité k. Est-elle racine du polynôme $f^{-1}(Q)$ et si oui, avec quel ordre de multiplicité (discuter en fonction des valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$) ?

b - En déduire les sous espaces propres de f^{-1} et montrer qu'ils sont également propres pour f.

c - Déterminer la matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 1 et la matrice D diagonale telles que :

$$D = T^{-1}AT$$

Déterminer la matrice T^{-1} inverse de T.

(5) k désignant un entier naturel, f^k désignant l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ si $k \geq 1$, et f^0 l'application identique, montrer que le coefficient de X^p, $p \in I_n$, du polynôme $f^k(X^n)$ est égal à :

$$C_n^p \left[\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \, C_{n-p}^j \, \frac{1}{(p+j+1)^k} \right]$$

II. On s'intéresse désormais à la suite d'épreuves définies de la façon suivante :

1. La 1ère épreuve consiste à "tirer" un nombre "au hasard" dans I_n.
2. Si le nombre p a été obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 1$), la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve consiste à "tirer au hasard" un nombre dans I_p.

Compte-tenu des hypothèses 1 et 2, on conviendra que le nombre n est le résultat de la $0^{\text{ème}}$ épreuve.

. $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$, on note $P_k(p)$ la probabilité d'obtenir le nombre p au $k^{\text{ème}}$ tirage, et U_k la matrice colonne $\begin{pmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \\ \vdots \\ P_k(n) \end{pmatrix}$

Enfin X_k désigne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire : "nombre obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage".

.../...

1) a - En remarquant que le resultat de la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve est conditionné par celui de la $k^{\text{ème}}$, exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in I_n$, $P_{k+1}(p)$ en fonction des nombres $P_k(i)$, $i \in I_n$.

b - En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad U_{k+1} = AU_k$ (2)

2) a - Ecrire la matrice unligne B telle que $BU_k = E(X_k)$ espérance mathématique de la variable aléatoire X_k, constater que le produit BA s'exprime simplement en fonction de B, et déduire de la relation (2), une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$. Calculer $E(X_k)$.

b - Procéder de façon analogue pour déterminer $E(X_k^2)$ $\left(\text{introduire la suite } \left(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}\right)$. En déduire $V(X_k)$ variance de X_k.

3) $k \in \mathbb{N}$, soit G_k le polynôme $G_k = \sum_{p=0}^{n} P_k(p) X^p$

Exprimer, à l'aide de l'application f définie au I, G_k en fonction de X^n.
En déduire $P_k(p)$, $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$.

4) a - Montrer que, si $p \in I_n - \{o\}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(p)$ converge.

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(o)$ est-elle convergente ?

b - Utiliser le résultat (o) de la question préliminaire pour démontrer que :

$$\forall p \in I_n - \{o\} \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_k(p) = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

III. 1) En envisageant les différents résultats de la $k^{\text{ème}}$ épreuve, montrer que, si $p \in I_{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$, la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre p au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage est égale à $P_{k+1}(p+1)$.

② $p \in I_n$, on note $\alpha(p,n)$ la probabilité de tirer au moins une fois le nombre p lorsque les tirages "se prolongent indéfiniment", le 1er tirage s'effectuant dans I_n.

a - que vaut $\alpha(n,n)$?

b - démontrer, en tenant compte du résultat obtenu au 1er tirage que :

$$\forall p \in I_{n-1} \qquad (n+1)\,\alpha(p,n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p,k)$$

En déduire $\alpha(n-1,n)$.

c - $p \in I_{n-2}$, trouver une relation entre $\alpha(p,n)$ et $\alpha(p,n-1)$. En déduire $\alpha(p,n)$.

③ Utiliser les résultats obtenus aux questions III.1 et III.2 pour retrouver la formule (3).

IV.① Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ (P' dérivée du polynôme P).

montrer que $d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f$ (considérer $f^{-1} \circ d \circ f$)

② Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^* \qquad f \circ d = \sum_{k=1}^{q} d \circ f^k + f \circ d \circ f^q$

③ Déduire du calcul de $(f \circ d)(X^n)$ que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (X-1)\left(\sum_{k=1}^{q} G_k'\right) + G_q \qquad (4)$$

④ Utiliser (4) pour retrouver la formule (3).
