ESSEC 86 1ère épreuve. ①

**Questions préliminaires.**

(Q1) $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^\alpha \frac{1}{x^2+\tan^2 u} \times \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\frac{1}{x}\tan\alpha} \frac{1}{x^2+x^2t^2} \times x\,dt$

$t = \frac{1}{x}\tan u$ ; $dt = \frac{1}{x}\frac{1}{\cos^2 u}du$

$$\int_0^\alpha \frac{du}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u} = \frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}\tan\alpha}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{x}\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{\frac{1}{x}\tan\alpha} = \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\tan\alpha\right)$$

$$I_1(x) = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^\alpha \frac{du}{x^2\cos^2u+\sin^2u} = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{x}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\tan\alpha\right)\right) = \frac{1}{x}\times\frac{\pi}{2} \qquad \left(\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{x}\tan\alpha = +\infty\right)$$

donc $I_1(x) = \dfrac{\pi}{2x}$.

(Q2) a) $x \in ]0,1[$. $\displaystyle I_2(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin u\,du}{x^2\cos^2u+\sin^2u} = \int_1^0\frac{-dv}{x^2v^2+1-v^2} = \int_0^1\frac{dv}{1-v^2(1-x^2)}$

$v = \cos u$ ; $dv = -\sin u\,du$

$$I_2(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dw}{1-w^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1/2}{w+1}-\frac{1/2}{w-1}\right)dw = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{w+1}{w-1}\right|\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

$w = \sqrt{1-x^2}\,v$

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$\ln\left|\frac{0+1}{0-1}\right| = 0$

On peut encore écrire : $\displaystyle I_2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

b) $\forall x \in ]0,1[$. $\displaystyle I_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln x\right)$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} 1$ ; $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln x}\ln(1+\sqrt{1-x^2})-1\right) = 0\times0-1 = -1$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} 1$ et $\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln x \underset{0}{\sim} -\ln x$ ; $I_2(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.

**I Etude de l'application $f$**

$$f : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{u\,du}{x^2\cos^2u+\sin^2u}\end{array}.$$

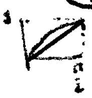
(Q1) a) $\displaystyle f(1) = \int_0^{\pi/2}\frac{u}{\cos^2u+\sin^2u}du = \int_0^{\pi/2}u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$ ; $f(1) = \dfrac{\pi^2}{8}$

b) $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2}\frac{u\,du}{\frac{1}{x^2}\cos^2u+\sin^2u} = \frac{1}{x}\int_{\pi/2}^0\frac{(\frac{\pi}{2}-v)(-dv)}{\frac{1}{x^2}\sin^2v+\cos^2v} = x\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{\pi}{2}-v}{x^2\cos^2v+\sin^2v}dv$

$u = \frac{\pi}{2}-v$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}x\,I_1(x) - f(x)$ ; $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}x\times\frac{\pi}{2x} = \frac{\pi^2}{4}$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$

(Q2) a) $u \mapsto \sin u$ est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ (sa dérivée seconde est négative)



Par conséquent $\forall u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin u \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2}}u$ (la courbe est au dessus du segment !)

Finalement : $\forall u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $u \leq \frac{\pi}{2}\sin u$ (peut s'obtenir en étudiant $u\mapsto\frac{\pi}{2}\sin u - u$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$)

b) $x\in]0,1[$ $\forall u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\displaystyle 0 \leq \frac{u}{x^2\cos^2u+\sin^2u} \leq \frac{\pi}{2}\frac{\sin u}{x^2\cos^2u+\sin^2u}$. En intégrant et en multipliant par $x$ on obtient :

$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}x\,I_2(x)$.

$\frac{\pi}{2} x I_2(x) \underset{0}{\sim} -\frac{\pi}{2} x \ln x$ ; $\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} x I_2(x) = 0$ ; $\underline{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$ .

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi^2}{4} - f(x)\right) = \frac{\pi^2}{4}$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$

Q3 a) $x \in \mathbb{R}_+^*$. $h \in \mathbb{R}$ et $0 < |h| < \frac{x}{2}$.

$u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ; $\frac{1}{x\cos^2 u + \sin^2 u} - \frac{h\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2} + \frac{h^2\cos^4 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)} =$

$$\frac{(x\cos^2 u+\sin^2 u)(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u) - h\cos^2 u(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u) + h^2\cos^4 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)} =$$

$$\frac{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2 + h\cos^2 u(\overbrace{x\cos^2 u+\sin^2 u - x\cos^2 u - \sin^2 u - h\cos^2 u + h\cos^2 u}^{=0})}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)} = \frac{1}{x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u}$$

(C'est la relation $\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} + \frac{B^2}{A^2(A+B)}$ ).

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} + \int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^2 u\,du}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{u}{(x+h)\cos^2 u+\sin^2 u} - \frac{u}{x\cos^2 u+\sin^2 u} + \frac{h u\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\right)du\right]$$

La relation précédente donne : $\frac{1}{(x+h)\cos^2 u+\sin^2 u} - \frac{1}{x\cos^2 u+\sin^2 u} + \frac{h\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2} = \frac{h^2\cos^4 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)}$

Par conséquent : $\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} + \int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^2 u\,du}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2} = \frac{1}{h}\int_0^{\pi/2} \frac{u h^2\cos^4 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)}\,du$

$\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x\cos^2 u+\sin^2 u \geq \frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u$ et $x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u \geq x\cos^2 u + \sin^2 u - \frac{x}{2}\cos^2 u = \frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u$.

$-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$

$\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u) \geq \left(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u\right)^3$

Finalement : $\left|\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} + \int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2 u\,du}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\right| = |h|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u\,du}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2(x\cos^2 u+\sin^2 u+h\cos^2 u)} \leq |h|\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^4 u\,du}{(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^3}$

Ceci est suffisant pour dire que $\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = -\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du$ (dérivation sous $\int$ !)

$\phi$ est dérivable en $x$ et $\phi'(x) = -\int_0^{\pi/2}\frac{u\cos^2 u}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\,\phi(x^2)$.

$f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \phi(x^2) + 2x^2\phi'(x^2)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \int_0^{\pi/2}\frac{u(x^2\cos^2 u+\sin^2 u) - 2ux^2\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du = -\int_0^{\pi/2}\frac{u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\psi$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(u) = \frac{(\cos^2 u - \sin^2 u)(x^2\cos^2 u+\sin^2 u) - \sin u\cos u\ (*)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}$

$(*)$ $x^2(-2\sin u\cos u) + 2\sin u\cos u$

$\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(u) = \frac{x^2\cos^4 u - x^2\sin^2 u\cos^2 u + \cos^2 u\sin^2 u - \sin^4 u + 2\sin^2 u\cos^2 u\,x^2 - 2\sin^2 u\cos^2 u}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}$

$\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(u) = \frac{x^2(\cos^2 u)(\cos^2 u+\sin^2 u) - \sin^2 u(\cos^2 u+\sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2} = \frac{x^2\cos^2 u - \sin^2 u}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}$ !

$f'(x) = -\int_0^{\pi/2} u\,\psi'(u)\,du = -[u\psi(u)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\psi(u)\,du = -\frac{\pi}{2}\psi(\frac{\pi}{2}) + \int_0^{\pi/2}\psi(u)\,du$

$f'(x) = \int_0^{\pi/2}\psi(u)\,du$ car $\psi(\frac{\pi}{2})=0$.

a] $f'(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u\cos u}{\cos^2 u+\sin^2 u}\, du = \frac12\int_0^{\pi/2}\sin 2u\,du = -\frac14[\cos 2u]_0^{\pi/2} = -\frac14(-1-1) = \frac12$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $f'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2u+\sin^2u}\,du$

la dérivée de $u\mapsto x^2\cos^2u+\sin^2u$ est $u\mapsto 2\sin u\cos u(1-x^2)$.

$f'(x)=\frac{1}{2(1-x^2)}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin u\cos u\,(1-x^2)}{x^2\cos^2u+\sin^2u}\,du = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln|x^2\cos^2u+\sin^2u|\right]_0^{\pi/2} = \frac{\ln 1-\ln x^2}{2(1-x^2)}$

$\underline{\underline{f'(x)=\frac{\ln x}{x^2-1}}}$.

$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{x+1} \underset{1}{\sim} \frac12$ ; $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac12=f'(1)$ . f' est continue en 1.

cl $f'(1)=\frac12$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2-1}$

④ Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall y\in]0,x[$, $\int_y^x f'(t)\,dt = f(x)-f(y)$ et $\lim_{y\to0^+}f(y)=0$.

$\int_0^x f'(t)\,dt$ est donc convergente et vaut $f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $1/2$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi^2/8$ | $\nearrow$ | $\pi^2/4$ |

Remarque.. f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement par continuité n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to0^+} f'(x)=+\infty$ (... il y a cependant une demi tangente verticale).

$$\boxed{\text{II}\quad \pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}}$$

Q1 a.. Supposons que g existe. $\forall t\in]0,1[$, $g(t)=\frac{t\ln t}{t^2-1}$, $g(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{t\ln t}{t^2-1}=0$ (g est continue en 0) et $g(1)=\lim_{t\to1^-}\frac{t\ln t}{t^2-1}=1/2$. Ceci montre l'unicité de g.

$\frac{t\ln t}{t^2-1}=\frac{\ln t}{t-1}\times\frac{t}{t+1}\underset{1}{\sim}\frac12$

Réciproquement pour $\forall t\in]0,1[$, $g(t)=\frac{t\ln t}{t^2-1}$, $g(0)=0$ et $g(1)=1/2$.

- g est continue en tout point de $]0,1[$ (... quotient...)
- $\lim_{t\to0^+}\frac{t\ln t}{t^2-1}=0=g(0)$ ; g est continue en 0
- $\lim_{t\to1^-}\frac{t\ln t}{t^2-1}=\frac12=g(1)$ ; g est continue en 1

Ceci prouve l'existence.

$$\sum_{p=0}^{n}(t^2)^p = \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2} \text{ pour } t\in\,]0,1[$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$\forall t\in\,]0,1[$, $\dfrac{\ln t}{t^2-1} = -\ln t\,\dfrac{1}{1-t^2} = -\ln t\,\dfrac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} - \dfrac{t^{2n+2}\ln t}{1-t^2} = -\ln t\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(t^2)^p + t^{2n+1}g(t)$

$\forall t\in\,]0,1[$, $\dfrac{\ln t}{t^2-1} = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n} t^{2p}\ln t + t^{2n+1}g(t)$

Les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$, $\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt$ (pour tout $p\in\mathbb{N}$) et $\int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt$ sont convergentes ; par conséquent l'égalité précédente donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = -\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt$

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $J(1) = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt$.

c) Soit $p\in\mathbb{N}$. $\forall x\in\,]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 t^{2p}\ln t\,dt = \left[\frac{1}{2p+1}t^{2p+1}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2p+1}}{2p+1}\times\frac{1}{t}\,dt$

$\forall x\in\,]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 t^{2p}\ln t\,dt = -\frac{x^{2p+1}\ln x}{2p+1} - \left[\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2}\right]_x^1 = -\frac{x^{2p+1}\ln x}{2p+1} - \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2}$.

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{2p+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^{2p+1}\ln x = 0$

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt = -\frac{1}{(2p+1)^2}$. (au passage on a redémontré la convergence de $\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt$)

d) $g$ est continue sur $[0,1]$. Posons $K = \sup\limits_{t\in[0,1]} g(t)$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,1]$, $0\le t^{2n+1}g(t)\le K\,t^{2n+1}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le\displaystyle\int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt\le K\int_0^1 t^{2n+1}\,dt = \frac{K}{2n+2}$.

e) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\pi^2}{8} = J(1) = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^{2p}\ln t\,dt + \int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2} + \int_0^1 t^{2n+1}g(t)\,dt$

donc $0\le\dfrac{\pi^2}{8} - \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2}\le\frac{K}{2n+2}$. Ceci suffit pour dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Par conséquent la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p} = 1-\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)} = 1$. La série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{4}{(2n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{4n^2+4n-4n^2-4n-1}{n(n+1)(2n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}$. Par conséquent :

la série de terme général $-\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n(n+1)(2n+1)^2} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

donc $-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = 4\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right) - 1 = \frac{\pi^2}{2} - 5$

donc $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$

Q3 a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in[k,k+1]$, $\dfrac{2}{(k+1)(k+2)(2k+3)^2} = h(k+1)\le h(x)\le h(k) = \dfrac{2}{k(k+1)(2k+1)^2}$

Par conséquent : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1}h(k+1)\,dx\le\int_k^{k+1}h(x)\,dx\le\int_k^{k+1}h(k)\,dx$ ; $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $h(k+1)\underset{(1)}{\le}\displaystyle\int_k^{k+1}h(x)\,dx\underset{(2)}{\le} h(k)$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $n>p+1$

- $\sum_{k=p}^{n} h(k+1) \underset{1}{\le} \sum_{k=p}^{n}\int_k^{k+1} h(x)\,dx = \int_p^{n+1} h(x)\,dx$ ; $\sum_{k=p+1}^{n} h(k) \le \int_p^{n+1} h(x)\,dx$

$\int_p^{+\infty} h(x)\,dx$ converge ($h$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^4}$)

En passant à la limite on obtient : $\sum_{k=p+1}^{+\infty} h(k) \le \int_p^{+\infty} h(x)\,dx$ ; $r_p \le \int_p^{+\infty}h(x)\,dx$

- $\sum_{k=p+1}^{n}\int_k^{k+1} h(x)\,dx \underset{2}{\le} \sum_{k=p+1}^n h(k)$ ; $\int_{p+1}^{n+1} h(x)\,dx \le \sum_{k=p+1}^n h(k)$, par passage à la limite : $\int_{p+1}^{+\infty} h(x)\,dx \le r_p$.

Finalement : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\int_{p+1}^{+\infty}h(x)\,dx \le r_p \le \int_p^{+\infty}h(x)\,dx$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $x\times x\times(2x)^2 \le x(x+1)(2x+1)^2 \le (x+1)(x+1)(2x+2)^2 = 4(x+1)^4$

$\forall x \in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{2}{4(x+1)^4} \le h(x) \le \frac{2}{4x^4}$ ; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2(x+1)^4}\le h(x)\le\frac{1}{2x^4}$.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $\forall u\in[p+1,+\infty[$, $\int_{p+1}^{u}\frac{1}{2(x+1)^4}\,dx = \left[-\frac{1}{6(x+1)^3}\right]_{p+1}^{u} = -\frac{1}{6(u+1)^3}+\frac{1}{6(p+2)^3}$

En passant à la limite : $\int_{p+1}^{+\infty}\frac{1}{2(x+1)^4}\,dx = \frac{1}{6(p+2)^3}$ ; de même $\int_p^{+\infty}\frac{1}{2x^4}\,dx = \frac{1}{6(p)^3}$

$$\frac{1}{6(p+2)^3} = \int_{p+1}^{+\infty}\frac{1}{2(x+1)^4}\,dx \le \int_{p+1}^{+\infty}h(x)\,dx \le r_p \le \int_p^{+\infty}h(x)\,dx \le \int_p^{+\infty}\frac{1}{2x^4}\,dx = \frac{1}{6p^3}$$

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{6(p+2)^3}\le r_p\le\frac{1}{6p^3}$.

b) $s_6 = \sum_{n=1}^{6}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = \frac19+\frac1{75}+\frac1{294}+\frac1{810}+\frac1{1815}+\frac1{3549} = \frac{263\,600\,452}{2\,029\,052\,025}$

$s_6 \simeq 0,1299$ (0,129913107). En fait $0,1299\le s_6\le 0,1300$

$10-\pi^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} = s_6 + r_6$ ; $\frac{1}{6\times8^3}\le 10-\pi^2-s_6\le\frac{1}{6\times6^3}$ ;

$10-s_6-\frac{1}{6^4}\le\pi^2\le 10-s_6-\frac{1}{6\times8^3}$ ; $10-0,1300-\frac{1}{6^4}\le\pi^2\le 10-0,1299-\frac{1}{6\times8^3}$

Donc $9,86922839 \le \pi^2 \le 9,86977448$

$9,86977448 - 9,86922839 = 0,000546090$ !

Mais $\left|\pi^2-\frac{9,86977448+9,86922839}{2}\right|\le 0,000273045$ $\left(=\frac{0,000546090}{2}\right)$

$\frac{9,86977448+9,86922839}{2}\simeq 9,869501435$

9,8695 est une valeur approchée à $5\times10^{-4}$ près de $\pi^2$

c) Pour avoir une valeur approchée à $10^{-6}$ près de $\pi^2$ il suffit de prendre $10-s_p$ avec $\frac{1}{6p^3}\le10^{-6}$ soit $p\geqslant 56$. Mieux il suffit de prendre $10-s_p-\frac{1}{6(p+2)^3}$ avec $\frac{1}{6p^3}-\frac{1}{6(p+2)^3}\le10^{-6}$ soit $p\geqslant 31$

(Pour avoir une valeur approchée à $5\times10^{-4}$ dans le 1er cas prendre $p\geqslant 7$ et dans le second $p\geqslant 6$)

# III Accélération de la convergence.

**Q1** Fixons $n\in\mathbb{N}$ et montrons par récurrence que : $\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}+\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}$ pour tout $q\in\mathbb{N}$.

→ Pour $q=0$ le membre de droite donne $\dfrac{2^0\,0!}{(2n+1)(2n+3)}+\dfrac{2\times1!}{(2n+1)^2(2n+3)}=\dfrac{2n+1+2}{(2n+1)^2(2n+3)}=\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ ... cqfd

→ Supposons la propriété vraie pour $q\in\mathbb{N}$ et montrons-la pour $q+1$.

$$\frac{1}{(2n+1)^2}\underset{H.R.}{=}\sum_{k=0}^{q}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}+\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}=\sum_{k=0}^{q+1}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}-$$

$$\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2(q+1)+3)}+\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}=\sum_{k=0}^{q+1}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}+\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}[X]$$

$X=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2q+5}=\dfrac{2(q+2)}{(2n+1)(2n+2(q+1)+3)}$ ; donc $\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{q+1}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}+\frac{2^{q+2}(q+2)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2(q+1)+3)}$

C'est bien la formule à l'ordre $q+1$.

**Q2** a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+1)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2k+3)}=\frac{2n+2k+3-2n-1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+1)(2n+2k+3)}=\frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}$$

Soit $(N,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $N\geqslant p$

$$\sum_{n=p}^{N}\frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}=\sum_{n=p}^{N}(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\alpha_p-\alpha_{N+1}\ ;\quad \underline{\underline{\sum_{n=p}^{N}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}=\frac{\alpha_p-\alpha_{N+1}}{2(k+1)}}}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+1)}$$

b) $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\alpha_N=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{(2N+1)(2N+3)\cdots(2N+2k+1)}=0$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}$ existe et vaut $\dfrac{\alpha_p}{2(k+1)}$

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k+3)}=\frac{1}{2(k+1)}\times\frac{1}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2k+1)}$

Ceci donne : $\boxed{v_k=\dfrac{2^{k-1}\,k!}{(k+1)}\times\dfrac{1}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2k+1)}}$

**Q3** a) $p\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{N}$ : $\dfrac{\pi^2}{8}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ ; $\dfrac{\pi^2}{8}-\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=p}^{+\infty}\sum_{k=0}^{q}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)\cdots(2n+2k+3)}+$

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}=\sum_{k=0}^{q}\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{2^k\,k!}{(2n+1)\cdots(2n+2k+3)}+R_p=\sum_{k=0}^{q}v_k+R_p$$

Donc $\underline{\underline{\dfrac{\pi^2}{8}=\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{k=0}^{q}v_k+R_p}}$

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p\Rightarrow 2n+1\geqslant 2p+1\Rightarrow\dfrac{1}{2p+1}\geqslant\dfrac{1}{2n+1}\Rightarrow\dfrac{1}{(2p+1)(2n+1)}\geqslant\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

Si $N\geqslant p$ : $\displaystyle\sum_{n=p}^{N}\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}\leqslant\frac{1}{2p+1}\sum_{n=p}^{N}\frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2q+3)}$ ; en faisant tendre

N vente on obtient : $R_q \leq \frac{1}{2p+1} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2q+3)} = \frac{2(q+1)}{2p+1} v_q = 2 w_q$ avec

$w_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q$.

c) $\left| \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{k=0}^{q} v_k - w_q \right| = |R_q - w_q| \leq w_q$

$0 \leq R_q \leq 2w_q \Rightarrow -w_q \leq R_q - w_q \leq w_q$

Par conséquent $\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{k=0}^{q} v_k - w_q$ est une valeur approchée à $w_q$ près de $\pi^2/8$

Q4 a) 1ère étape... on calcule $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$

2ème étape... On calcule $\sum_{k=1}^{q} v_k$ et $w_q$ jusqu'à ce que $\underline{\underline{8}} w_q \leq 10^{-6}$

Pour calculer ces deux dernières quantité il convient de remarquer que :

$v_k = \frac{2p+1}{k+1} w_k$ et $\frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{2(k+1)}{2p+2k+3}$ ; notons encore que $w_0 = \frac{1}{2(2p+1)^2}$ et $v_0 = \frac{1}{2(2p+1)}$

$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{2(k+1)^2}{(k+2)(2p+2k+3)}$

donc $w_0 = \frac{1}{2(p+1)^2}$ , $w_{k+1} = \frac{2(k+1)}{2p+2k+3} w_k$ et $v_k = \frac{2p+1}{k+1} w_k$. Il ne

reste plus qu'à faire tourner la machine... après l'avoir programmée.

Voici 2 programmes pour malice pour Fx 7000 G. (On peut certainement faire 10 fois mieux)

| calcul de $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ | Calcul de $q$ et de $8\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + w_q\right)$ |
|---|---|
| ? → P<br>P-1 → P<br>0 → K : 1 → A<br>Lbl 0<br>K+1 → K<br>K > P ⇒ GOTO 1<br>A+1 ÷ (2K+1)² → A<br>GOTO 0<br>Lbl 1<br>A ◢<br>"END" | 0 → K<br>? → P<br>1 ÷ (2P+1)² ÷ 2 → W : 0.5 ÷ (2P+1) → X<br>Lbl 0<br>W × 2(K+1) ÷ (2P+2K+3) → W<br>K+1 → K<br>((2P+1) ÷ (K+1)) × W + X → X<br>8W - E-6 ≤ 0 ⇒ GOTO 1<br>GOTO 0<br>Lbl 1<br>K ◢<br>8(X + W + A) ◢<br>"END" |

p = 5 donne q = 16 et $\pi^2 \simeq 9,869\,603\,645$ La machine donne $\pi^2 \simeq 9,869\,604\,401$

p = 10 " q = 6 et $\pi^2 \simeq 9,869\,603\,705$

p = 15 " q = 4 et $\pi^2 \simeq 9,869\,603\,747$

```
program ESSEC86_MI;

uses crt;
var q,p:integer;s,v,epsilon:real;

begin
clrscr;
write('Donnez p.p=');readln(p);
write('Donnez la précision. Epsilon=');readln(epsilon);

s:=1;
for q:=1 to p-1 do s:=s+1/sqr(2*q+1);
p:=p+p+1;  {seul 2p+1 intervient maintenant}
epsilon:=p*epsilon/8;
v:=1/(p+p);s:=s+v;q:=0;

while (q+1)*v > epsilon do
begin
     q:=q+1;v:=2*q*q*v/(q+1)/(p+q+q);s:=s+v;
end;
s:=s+(q+1)*v/p;

writeln;
write('Avec q=',q,' :');
write('on obtient ',8*s:12:10);
writeln(' pour valeur approchée de pi au carré à epsilon près.');
writeln;write('La machine donne pi au carré=',pi*pi);
writeln(' (delta :',pi*pi-8*s,')' );
end.
```

```
Donnez p.p=5
Donnez la précision. Epsilon=1e-6

Avec q=16 :on obtient 9.8696036449 pour valeur approchée de pi au carré à epsilo
n près.

La machine donne pi au carré= 9.8696044011E+00 (delta : 7.5614661910E-07)
```

```
Donnez p.p=10
Donnez la précision. Epsilon=1e-6

Avec q=6 :on obtient 9.8696037045 pour valeur approchée de pi au carré à epsilon
 près.

La machine donne pi au carré= 9.8696044011E+00 (delta : 6.9657107815E-07)
```

```
Donnez p.p=15
Donnez la précision. Epsilon=1e-6

Avec q=4 :on obtient 9.8696037474 pour valeur approchée de pi au carré à epsilon
 près.

La machine donne pi au carré= 9.8696044011E+00 (delta : 6.5370113589E-07)
```