Le barème tiendra très largement compte de la longueur du texte.
Le 1er objectif est de faire très correctement QP, I et II.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 12 Mai 1986 de 14 H à ~~18 H~~ l'aube

Les parties II et III largement indépendantes de I peuvent ête abordées en admettant, au besoin, des résultats fournis par l'énoncé.

On désigne par : $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs,

tan la fonction tangente,

ℓn la fonction logarithme népérien.

Question préliminaire

(1) $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer, en posant $t = \frac{1}{x}\tan u$, $I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$

(2) a) $x \in]0,1[$. Calculer, en posant $\begin{cases} v = \cos u \\ \text{puis } w = \sqrt{1-x^2}\, v \end{cases}$, $I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$

b) En déduire que, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$I_2(x) \sim -\ell n\, x \qquad \left(I_2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) = \dots\right)$$

Ces deux intégrales interviennent dans les questions qui suivent.

I - Etude de l'application f : $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$$

(1) a) Calculer $f(1)$.

b) Montrer que $f(x) + f(\frac{1}{x})$ est indépendant de x élément de $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa valeur (on pourra poser $u = \frac{\pi}{2} - v$ dans l'intégrale donnant $f(\frac{1}{x})$).

② Détermination de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

a) Montrer que, pour $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\quad u \leqslant \frac{\pi}{2} \sin u$.

b) En déduire une majoration de $f(x)$ pour $x < 1$, puis $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

③ Dérivabilité de f

a) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,du}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$

x désignant un réel strictement positif, h un réel tel que $0 < |h| < \frac{x}{2}$,

on pose $A = x\cos^2 u + \sin^2 u \qquad B = h\cos^2 u$.

après l'avoir montré

Utiliser la relation $\dfrac{1}{A+B} = \dfrac{1}{A} - \dfrac{B}{A^2} + \dfrac{B^2}{A^2(A+B)}$ pour démontrer que :

$$\left| \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 u\,du}{(x\cos^2 u+\sin^2 u)^2} \right| \leqslant |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,du}{(\frac{x}{2}\cos^2 u+\sin^2 u)^3}$$ (minorer A et A+B par...)

En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u+\sin^2 u)^2}\,du$

c) Quelle est la dérivée de la fonction ψ telle que $\psi(u) = \dfrac{\sin u \cos u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$? "simplifiée"

ψ'. En déduire $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(u)\,du$. (faire une intégration par parties).

d) Calculer $f'(1)$, puis $f'(x)$ pour $x \neq 1$ en utilisant une primitive de ψ . f' est-elle continue en 1 ?

pense à g'/g

④ Autre expression de f

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ (on considérera $\displaystyle\int_y^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$

avec $0 < y < x$).

b) Dresser le tableau de variation et construire la courbe représentative de f .

II - Démonstration de la formule : $\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$ (2)

① Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Faire simple
Analyse/Synthèse

a) Montrer l'existence d'une fonction g unique continue sur $[0,1]$ telle que $\forall t \in]0,1[\quad g(t) = \frac{t \ln t}{t^2-1}$ (donner $g(0)$ et $g(1)$) .

b) Démontrer, en utilisant l'expression de f obtenue au I-④-a que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(1) = -\sum_{p=0}^{n} \int_0^1 t^{2p} \ln t \, dt + \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt$$

c) Calculer $\int_0^1 t^{2p} \ln t \, dt$, p désignant un entier naturel.

d) Déduire de II-①-a l'existence d'une constante K telle que :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{2n+1} g(t) \, dt \leqslant \frac{K}{2n+2}$$

e) En déduire que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donner la valeur de sa somme.

② a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge et calculer sa somme.

b) En déduire la formule (2) $\left(\text{on pourra considérer } \frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$

③ Détermination d'une valeur approchée de π^2

Soit pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad h(x) = \frac{2}{x(x+1)(2x+1)^2}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ $\quad s_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$

et $r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$

a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\quad \int_{p+1}^{+\infty} h(x)dx \leqslant r_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(x)dx$, puis en encadrant $h(x)$ que : $\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{6p^3}$

... $\leqslant \int_{\ell}^{\ell+1} h(x)dx \leqslant$

b) Calculer une valeur approchée de s_6 à 10^{-4} près. En déduire une valeur approchée de π^2 à 5.10^{-4} près.

c) Donner l'ordre de grandeur de la valeur de p à utiliser pour obtenir par la méthode précédente une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.

III - Accélération de la convergence

Les candidats qui le désirent peuvent aborder directement la question III-4 qui rappelle les résultats théoriques obtenus aux questions III - 1, 2 et 3.

1 Démontrer que :

$$\forall (n,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=0}^{q} \frac{2^k\, k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} + \frac{2^{q+1}\,(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2q+3)}$$

(on pourra procéder par récurrence).

2 Calcul de $v_k = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{2^k\, k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} \qquad (k, p) \in \mathbb{N}^2$

a) En remarquant que :

$$\frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2k+3)}$$

simplifier, pour $N \geqslant p$: $\sum_{n=p}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)}$

b) En déduire l'existence et la valeur de v_k .

③ Application à la détermination d'une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$

a) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + R_q$$

avec $R_q = 2^{q+1}(q+1)! \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2q+3)}$

b) En majorant, pour $n \geqslant p$, $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ par $\dfrac{1}{(2p+1)(2n+1)}$ démontrer que :

$0 \leqslant R_q \leqslant 2\,W_q$ avec $W_q = \dfrac{q+1}{2p+1}\, v_q$.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + W_q$ est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

④ Détermination d'une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près

a) Imaginer un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près, par la méthode précédente, ainsi que le plus petit entier q nécessaire à cette obtention, p étant considéré comme paramètre.

<u>On rappelle à cet effet que :</u>

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + W_q \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} v_k = \dfrac{2^{k-1}\,k!}{k+1} \cdot \dfrac{1}{(2p+1)(2p+3)\ldots(2p+2k+1)} \\[2ex] W_q = \dfrac{q+1}{2p+1}\, v_q \end{cases}$$

est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

b) Utiliser cet algorithme dans les trois cas suivants $p = 5$; $p = 10$; $p = 15$. On donnera dans chaque cas la valeur approchée de π^2 obtenue (avec toutes les décimales fournies par la machine) et la valeur de q ayant servi à l'obtenir.