ESSEC 87

I (Q1) a) $u_1 = \sqrt{1}\, C_2^1/4^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}/u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} \times \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^{n}}$ (1)

$$C_{2n+2}^{n+1} / C_{2n}^{n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \times \frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$u_{n+1}/u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{4} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} = \underline{\underline{\frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}}}} = \frac{n+1/2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leq \sqrt{n/(2n+1)}$

→ $u_1 = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{\frac{1}{2\times1+1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$. $u_1 = \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2\times1+1}}$. La propriété est vraie pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n = \frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \times u_n \underset{H.R}{\leq} \frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

Pour montrer que : $u_{n+1} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2(n+1)+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$ il suffit de montrer que : $\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}} \overset{(a)}{\leq} \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$

$(a) \Leftrightarrow \frac{2n+1}{4(n+1)} \leq \frac{n+1}{2n+3} \Leftrightarrow 4n^2+2n+6n+3 \leq 4n^2+8n+4 \Leftrightarrow 3\leq 4$! Ceci achève la récurrence.

c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$;

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} \Leftrightarrow 4n^2+4n+1 \geq 4n^2+4n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\geq u_n$. $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante (... et même strictement croissante)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} = u_1 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}$ car $2n \leq 2n+1$.

$(u_n)_{n\geq1}$ est croissante et majorée ; elle converge. Soit L sa limite.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}\leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; par conséquent : $\frac{1}{2}\leq L\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Q2) a) Fixons $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall t\in[x(x+1),(x+1/2)^2]$, $f(t)=\sqrt{t}$ $\quad(x(x+1)<(x+1/2)^2)$

f est dérivable sur $I_x = [x(x+1),(x+1/2)^2]$. $\forall t\in I_x$, $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\forall t\in I_x$, $\frac{1}{2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$; $\forall t\in I_x$, $\frac{1}{2(x+\frac{1}{2})} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$.

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\frac{1}{2(x+\frac{1}{2})}\big[\underbrace{(x+1/2)^2 - x(x+1)}_{1/4}\big] \leq f((x+1/2)^2) - f(x(x+1)) \leq \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\big[\underbrace{(x+1/2)^2 - x(x+1)}_{1/4}\big]$$

ou $\quad \frac{1}{8(x+1/2)} \leq (x+1/2) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$; c'est ce qu'il fallait montrer.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{2k+1}{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \dfrac{k+1/2}{\sqrt{k(k+1)}}$. Reprenons l'inégalité précédente avec $x = k$

$$\frac{1}{8(k+1/2)} \leq k+1/2 - \sqrt{k(k+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{k(k+1)}}$$

$$\frac{1}{8(k+1/2)\sqrt{k(k+1)}} \leq \frac{k+1/2}{\sqrt{k(k+1)}} - 1 = \frac{u_{k+1}}{u_k} - 1 \leq \frac{1}{8k(k+1)} = \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}$$; multiplions par u_k.

On obtient : $$\frac{u_k}{8(k+1/2)\sqrt{k(k+1)}} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que : $\dfrac{u_k}{8(k+1/2)\sqrt{k(k+1)}} \geq \dfrac{u_k}{8(k+1/2)} - \dfrac{u_k}{8(k+3/2)}$ ou : $\dfrac{1}{(k+\frac{1}{2})\sqrt{k(k+1)}} \overset{\boxed{(b)}}{\geq} \dfrac{1}{(k+1/2)} - \dfrac{1}{(k+3/2)}$

(b) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(k+1/2)\sqrt{k(k+1)}} \geq \dfrac{k+3/2-k-1/2}{(k+1/2)(k+3/2)} \Leftrightarrow (k+3/2) \geq \sqrt{k(k+1)} \Leftrightarrow k^2+3k+\frac{9}{4} \geq k^2+k \Leftrightarrow 2k+\frac{9}{4} \geq 0$!

ceci achève clairement de montrer §2 b)

c) Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $\mathbb{N}$ tel que : $p > n$ $(p \geq n+1)$

$$\sum_{k=n}^{p-1}\left(\frac{u_k}{8(k+1/2)} - \frac{u_k}{8(k+3/2)}\right) \leq \underbrace{\sum_{k=n}^{p-1}(u_{k+1}-u_k)}_{u_p - u_n} \leq \sum_{k=n}^{p-1}\left(\frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}\right)$$

Soit $k \in [\![n, p-1]\!]$. $u_n \leq u_k \leq u_{p-1}$

$\dfrac{1}{8(k+1/2)} - \dfrac{1}{8(k+3/2)} > 0$ donc $\dfrac{u_k}{8(k+1/2)} - \dfrac{u_k}{8(k+3/2)} \geq u_n\left(\dfrac{1}{8(k+1/2)} - \dfrac{1}{8(k+3/2)}\right)$

$\dfrac{1}{8k} - \dfrac{1}{8(k+1)} > 0$ donc $\dfrac{u_k}{8k} - \dfrac{u_k}{8(k+1)} \leq u_{p-1}\left(\dfrac{1}{8k} - \dfrac{1}{8(k+1)}\right)$

donc $u_n \displaystyle\sum_{k=n}^{p-1}\left(\frac{1}{8(k+1/2)} - \frac{1}{8(k+3/2)}\right) \leq u_p - u_n \leq u_{p-1}\sum_{k=n}^{p-1}\left(\frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}\right)$ ce qui donne après

simplification : $u_n\left(\dfrac{1}{8(n+1/2)} - \dfrac{1}{8(p-1+3/2)}\right) \leq u_p - u_n \leq u_{p-1}\left(\dfrac{1}{8n} - \dfrac{1}{8p}\right)$

$$u_n\left(\frac{1}{8(n+1/2)} - \frac{1}{8(p+1/2)}\right) \leq u_p - u_n \leq u_{p-1}\left(\frac{1}{8n} - \frac{1}{8p}\right)$$

Faisons tendre p vers $+\infty$.

$$u_n \times \frac{1}{8(n+1/2)} \leq L - u_n \leq L\left(\frac{1}{8n}\right) \quad \left(\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{8(p+\frac{1}{2})} = \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{8p} = 0 \text{ et } \lim_{p\to+\infty} u_p = L\right)$$

$$u_n/8(n+1/2) \leq L - u_n \leq L/8n.$$

d) $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{u_n}{8(n+1/2)} - \dfrac{1}{8n}u_n \leq L - \left(1+\dfrac{1}{8n}\right)u_n \leq \dfrac{L}{8n} - \dfrac{u_n}{8n} \leq \dfrac{L}{8n}\dfrac{1}{8n} = \dfrac{L}{64n^2}$ $\left(\leq \dfrac{L}{16n^2}\right)$

$\dfrac{1}{8(n+1/2)} - \dfrac{1}{8n} = \dfrac{1}{8}\dfrac{-1/2}{(n+1/2)n} = \dfrac{-1}{16}\,\dfrac{1}{n(n+\frac{1}{2})} \geq -\dfrac{1}{16n^2}$ $\left(n(n+\frac{1}{2}) \geq n^2\right)$

donc $-\dfrac{u_n}{16n^2} \leq L - \left(1+\dfrac{1}{8n}\right)u_n \leq \dfrac{L}{64n^2}$

$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq L$; $-\dfrac{u_n}{16n^2} \geq -\dfrac{L}{16n^2}$. $-\dfrac{L}{16n^2} \leq L - \left(1+\dfrac{1}{8n}\right)u_n \leq \dfrac{L}{64n^2} \leq \dfrac{L}{16n^2}$

Donc $-\frac{L}{16n^2} \leq L-(1+\frac{1}{8n})u_n \leq \frac{L}{16n^2}$. $|L-(1+\frac{1}{8n})u_n| \leq \frac{L}{16n^2}$.

Q3 a) $0 \leq L-u_n \leq \frac{L}{8n} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}n}$.

Pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près il suffit d'avoir $\frac{1}{8\sqrt{2}n} \leq 10^{-5}$ c'est à dire $n \geq \underline{8839}$! $\left(\frac{1}{8\sqrt{2}n} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq \frac{10^5}{8\sqrt{2}}\right)$

b) Pour que $u_n(1+\frac{1}{8n})$ soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près il suffit d'avoir $\frac{1}{16n^2\sqrt{2}} < 10^{-5}$ c'est à dire $n \geq \underline{\underline{67}}$. $\left(\frac{1}{16n^2\sqrt{2}} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^5}{16\sqrt{2}}}\right)$

L'algorithme ne pose aucun problème. Il suffit de remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_{k+1} = \frac{k+1/2}{\sqrt{k(k+1)}} u_k$

Sur fx 7000G

```
0.5→X : 0→K : 67→N
Lbl 0
K+1→K
(K+.5)xX÷√K(K+1) → X
K+1<N ⇒ GOTO 0
X(1+(8N)⁻¹) ◢
"END"
```

$u_{67} \simeq 0,5641886126$

Remarque.. $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Pour le montrer utiliser les intégrales de Wallis. $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \simeq 0,5641895835\right)$

PARTIE II - **A** Notons D_n le nombre de déplacements d'une unité vers la droite fait par l'individu entre les instants 0 et n. $\underline{\underline{D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}}$ et $X_n = D_n - (n - D_n)$ déplacements vers la gauche

$\underline{\underline{X_n = 2D_n - n}}$

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$p(X_{2n}=0) = p(2D_{2n}-2n=0) = p(D_{2n}=n) = C_{2n}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = C_{2n}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{C_{2n}^n}{4^n}$

$p(X_{2n+1}=0) = p(2D_{2n+1}-(2n+1)=0) = p(D_{2n+1} = n+\frac{1}{2}) = 0$!

Il ne peut être à l'origine à un instant impair.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $E(O_{2k}) = p(O_{2k}=1) = C_{2k}^k/4^k$. $E(O_{2k+1}) = p(O_{2k+1}=1) = 0$.

c) $U_n = O_1 + O_2 + \dots + O_{2n}$.

$\underline{\underline{E(U_n)}} = \sum_{k=1}^{2n} E(O_k) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} C_{2k}^k/4^k}}$.

Q2 a). $E(U_1) = C_{2\times1}^1/4^1 = \frac{1}{2} = (2\times1+1)\,C_{2\times1}^1/4^1 - 1$

. Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$

$$E(U_{n+1}) = E(U_n) + C_{2(n+1)}^{n+1}/4^{n+1} = (2n+1)\,C_{2n}^n/4^n - 1 + C_{2n+2}^{n+1}/4^{n+1} = \frac{1}{4^n}\left[\frac{(2n+1)(2n)!}{n!\,n!} + \frac{(2n+2)!}{4(n+1)!(n+1)!}\right] - 1$$

$$E(U_{n+1}) = \frac{1}{4^n}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\left[\frac{(n+1)^2}{2n+2} + \frac{1}{4}\right] - 1 = \frac{1}{4^n} C_{2n+2}^{n+1}\frac{2n+3}{4} - 1 = (2n+3)\,C_{2n+2}^{n+1}/4^{n+1} - 1 \;\dots\; \text{cqfd.}$$

b] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $E(U_n)=(2n+1)C_{2n}^n/4^n-1=\frac{2n+1}{\sqrt{n}}u_n-1$

$\frac{1}{\sqrt{n}}E(U_n)=\frac{2n+1}{n}u_n-\frac{1}{\sqrt{n}}$. $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}=2$, $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$; par conséquent :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}E(U_n)=2L$ ce qui signifie que : $\underline{\underline{E(U_n)\sim 2L\sqrt{n}}}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $E(U_n)-2L\sqrt{n}=\frac{2n+1}{\sqrt{n}}u_n-1-2L\sqrt{n}=\frac{2n+1}{\sqrt{n}}(u_n-L)+\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)L-1$

$E(U_n)-2L\sqrt{n}=\left(2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(u_n-L)+\frac{1}{\sqrt{n}}L-1=2\sqrt{n}(u_n-L)+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}(u_n-L)}_{\to 0\times 0=0}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}L}_{\to 0}-1$

Nous savons que : $\frac{u_n}{8(n+1/2)}\leq L-u_n\leq\frac{L}{8n}$; $\frac{\sqrt{n}}{8(n+1/2)}u_n\leq\sqrt{n}(L-u_n)\leq\frac{L\sqrt{n}}{8n}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{8(n+1/2)}u_n=0\times L=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{L\sqrt{n}}{8n}=0$ par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}(L-u_n)=0$; donc

$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}(u_n-L))=0$. On a aussi $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(u_n-L)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}L=0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}(E(U_n)-2L\sqrt{n})=-1$. $E(U_n)\sim 2L\sqrt{n}$ et $E(U_n)-2L\sqrt{n}\sim -1$

B **Q1** Notons que X_n et Y_n suivent la même loi, celle de X_n dans **A**

Soit $n\in\mathbb{N}$. $p(X_{2n}=0)=p(Y_{2n}=0)=C_{2n}^n/4^n$ et $p(X_{2n+1}=0)=p(Y_{2n+1}=0)$.

La probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n$ est

$p(X_{2n}=0 \text{ et } Y_{2n}=0)=p(X_{2n}=0)p(Y_{2n}=0)=(C_{2n}^n/4^n)^2$

La probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n+1$ est nulle

Q2.. Soit $\hat{O}_k$ la variable aléatoire égale à 1 si l'individu est à l'origine à l'instant k et 0 sinon ($k\geq 1$).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $V_n=\sum_{k=1}^{2n}\hat{O}_k$. $E(V_n)=\sum_{k=1}^{2n}E(\hat{O}_k)=\sum_{k=1}^{2n}p(\hat{O}_k=1)=\sum_{k=1}^{2n}p(X_k=0 \text{ et } Y_k=0)$

$E(V_n)=\sum_{k=1}^{n}p(X_{2k}=0 \text{ et } Y_{2k}=0)=\sum_{k=1}^{n}(C_{2k}^k/4^k)^2$

$$\underline{\underline{E(V_n)=\sum_{k=1}^{n}(C_{2k}^k/4^k)^2}}$$

Q2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_n/8(n+1/2)\leq L-u_n\leq L/8n$. Multiplions cette inégalité par $L+u_n$.

On obtient : $0\leq\frac{u_n}{8(n+1/2)}(L+u_n)\leq L^2-u_n^2\leq\frac{L}{8n}(L+u_n)\underset{u_n\leq L}{\leq}\frac{L}{8n}\times 2L=\frac{L^2}{4n}$

$0\leq\frac{L^2}{n}-\frac{u_n^2}{n}\leq\frac{L^2}{4n^2}$. $\frac{u_n^2}{n}=\frac{1}{n}\times n\times(C_{2n}^n/4^n)^2=(C_{2n}^n/4^n)^2$

donc $\underline{\underline{0\leq L^2/n-(C_{2n}^n/4^n)^2\leq L^2/4n^2}}$

En particulier : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $0\leq L^2/k-(C_{2k}^k/4^k)^2\leq L^2/4k^2$. En sommant de 1 à n

on obtient : $0\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)L^2-E(V_n)\leq\frac{L^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Divisons par $\ln n$ en supposant $\underline{n\geq 2}$,

$$0 \leq \frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)L^2 - \frac{1}{\ln n}E(V_n) \leq \frac{L^2}{4}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)L^2 - \frac{L^2}{4}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\ln n}E(V_n) \leq \frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)L^2$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)L^2 = L^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = 0$ $\left(0 \times \frac{\pi^2}{6} !\right)$

donc $\left(\frac{1}{\ln n}E(V_n)\right)_{n\geq 2}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers L^2.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln n}E(V_n)\right) = L^2$; $\underline{\underline{E(V_n) \sim L^2 \ln n}}$

C Q1.. Même chose que A et B !!

La probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant $2n$ est : $(C_{2n}^{n}/4^n)^3$.

" " $2n+1$ est : 0.

$E(W_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(C_{2k}^{k}/4^k\right)^3$ (... introduire O_k !)

Q2.. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x\in[n,n+1]$, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \frac{2}{3x\sqrt{x}}$. g et h sont dérivables sur $[n,n+1]$.

$\forall x\in[n,n+1]$, $g'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$ et $h'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

$\forall x\in[n,n+1]$, $g'(n) = -\frac{1}{n\sqrt{n}} \leq g'(x) \leq g'(n+1) = -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

Par conséquent l'inégalité des accroissements finis donne :

$-\frac{1}{n\sqrt{n}}(n+1-n) \leq g(n+1)-g(n) = \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}(n+1-1)$; ceci donne encore :

$$\underline{\underline{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}}}$$

Un raisonnement analogue avec h donne : $\frac{1}{(n+1)^2\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$

Fixons n dans $\mathbb{N}^*$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \overset{(\beta)}{\leq} \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}} \overset{(\alpha)}{\leq} \frac{1}{k\sqrt{k}}$

Soit $p\in\mathbb{N}$ et $p>n+1$. $\sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\sqrt{k}}$ d'après (α)

donc $\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{p+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\sqrt{k}}$.

$$\sum_{k=n}^{p-1}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=n}^{p-1}\left(\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{p}} \quad \text{d'après } (\beta)$$

donc $\sum_{k=n}^{p-1}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{p}}$ c'est à dire $\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{p}}$

Finalement : $\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{p+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{p}}$

La série de terme général $\frac{1}{k\sqrt{k}}$ est convergente ($\frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{3/2}}$ et $3/2 > 1$) ; $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ existe.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ existe aussi ; $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ existe.

Passons à la limite sur les inégalités de la fin de la page 5 :

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Un raisonnement analogue à partir de ii) donne : $\frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{u_n}{8(n+3/2)} \leq L - u_n \leq \frac{L}{8n}$. Multiplions cette inégalité par $L^2 + L u_n + u_n^2$.

On obtient : $0 \leq \frac{u_n}{8(n+3/2)}(L^2 + Lu_n + u_n^2) \leq (L-u_n)(L^2+Lu_n+u_n^2) = L^3 - u_n^3 \leq \frac{L}{8n}(L^2+Lu_n+u_n^2) \underset{u_n \leq L}{\leq} \frac{3L^3}{8n}$.

$0 \leq L^3 - (\sqrt{n})^3 \left(C_{2n}^n/4^n\right)^3 \leq \frac{3L^3}{8n}$. D'où par $(\sqrt{n})^3 = n\sqrt{n}$

$0 \leq \frac{L^3}{n\sqrt{n}} - \left(C_{2n}^n/4^n\right)^3 \leq \frac{3L^3}{8n^2\sqrt{n}}$.

En particulier $0 \leq \left(C_{2n}^n/4^n\right)^3 \leq \frac{L^3}{n\sqrt{n}}$.

La série de terme général $\frac{L^3}{n\sqrt{n}}$ converge donc la série de terme général $\left(C_{2n}^n/4^n\right)^3$ aussi.

$s = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(C_{2k}^k/4^k\right)^3$ existe ; $\lim_{n\to+\infty} E(W_n)$ existe.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{L^3}{k\sqrt{k}} - \frac{3L^3}{8k^2\sqrt{k}} \leq \left(C_{2k}^k/4^k\right)^3 \leq \frac{L^3}{k\sqrt{k}}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq n+1$

Donc $L^3 \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \frac{3L^3}{8}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^2\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{p}\left(C_{2k}^k/4^k\right)^3 \leq L^3 \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\sqrt{k}}$

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient : $L^3 \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}} - \frac{3L^3}{8}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(C_{2k}^k/4^k\right)^3 \leq L^3\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$

Donc $L^3 \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{3L^3}{8}\frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq r_n \leq L^3 \frac{2}{\sqrt{n}}$ (voir encadrements a))

En particulier : $0 \leq r_n \leq L^3 \frac{2}{\sqrt{n}} \underset{L \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}{\leq} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Pour que s_n soit une valeur approchée de s à 10^{-3} il suffit d'avoir $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq 10^{-3}$ soit $n \geq 500000$!!

c) Nous avons $L^3 \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{3L^3}{8}\frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq r_n \leq L^3\frac{2}{\sqrt{n}}$

Donc $L^3\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{4n\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \leq r_n - \frac{2L^3}{\sqrt{n}} \leq 0$

Soit $0 \leq -r_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} = s_n - s + \frac{2L^3}{\sqrt{n}} \leq L^3\left(\frac{1}{4n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)$.

$L^3\left(\frac{1}{4n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{5L^3}{4n\sqrt{n}} + L^3\left(-\frac{5}{4n\sqrt{n}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{5L^3}{4n\sqrt{n}} + L^3\left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

Reste donc à montrer que : $\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 0$, c'est à dire que $\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ... ce qui est contenu dans (i)

Finalement : $0 \leq s_n + 2L^3/\sqrt{n} - s \leq 5L^3/4n\sqrt{n} \leq \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4n\sqrt{n}} = \frac{5}{8\sqrt{2}\, n\sqrt{n}}$

Pour que $s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}}$ soit une valeur approchée de s à 10^{-3} près il suffit d'avoir

$\frac{5}{8\sqrt{2}\, n^{3/2}} \leq 10^{-3}$ soit $n \geq 59$ $\left(\dots(n \geq \left(\frac{5000}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3}\dots\right)$

Pas de problème pour calculer s_{59} ; il suffit de remarquer que $s_{k+1} = s_k + \left(C_{2k+2}^{k+1} / 4^{k+1}\right)^3$;

donc $s_{k+1} = s_k + \left(\frac{u_{k+1}}{\sqrt{k+1}}\right)^3$. On mènera donc de front le calcul des u_k et des s_k ... ce qui permettra d'obtenir une valeur approchée de L^3.

En fait ce que l'on obtiendra est une valeur approchée de la valeur approchée $s_n + \frac{2L^3}{\sqrt{n}}$.

```
? → N
.5 → X : 1 ÷ 8 → Y : 0 → K
Lbl 0
K+1 → K
(K+.5) × X ÷ √(K(K+1)) → X
Y + (X ÷ √(K+1)) x^y 3 → Y
K+1 < N ⇒ GOTO 0
X(1+ (8N)^-1) → L
Y+ 2 × (L x^y 3) ÷ √N ◢
"END"
```

$\boxed{D}$ La comparaison est claire car :

$E(U_n) \sim 2L\sqrt{n}$, $E(V_n) \sim L^2 \ln n$, $E(W_n) \sim D$

donc pour n assez grand :

$E(W_n) < E(V_n) < E(U_n)$.

Il est clair que ce qui se passe dans l'espace est très différent de ce qui se passe dans le plan ou sur la droite. Dans l'espace la limite de l'espérance est finie alors que dans le plan ou sur la droite l'espérance a une limite infinie.

↳ pour $n = 59$ on obtient $\simeq 0{,}393498550$