Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de $\ell n 2$ par des nombres rationnels, ce qui fait l'objet de la partie III. A cet effet, on établit dans les parties I et II une formule interpolatoire pour le calcul d'une intégrale.

Notations :

1 - Pour toute fonction numérique f de classe C^k sur un intervalle J, on note $f^{(0)} = f$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, $f^{(i)}$ la dérivée $i^{\text{ème}}$ de f.

2 - Pour tout entier naturel n, E_n désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On munit E_n du produit scalaire : $(P,Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, et de la norme euclidienne associée : $P \longmapsto ||P|| = \sqrt{\int_0^1 P^2(t)dt}$.

Enfin, on confond dans la suite polynôme et fonction polynôme associée.

3 - On définit les trois suites de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

. $\forall x\in\mathbb{R}$ $U_0(x) = 1$ et $\forall n \geqslant 1$ $U_n(x) = \dfrac{x^n(x-1)^n}{n!}$

. $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $P_n(x) = U_n^{(n)}(x)$

. $\forall x \in]1, +\infty[$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $Q_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\,dt$.

I - ETUDE DES POLYNOMES P_n et Q_n :

1 - a) Expliciter P_0, P_1, P_2.

b) Montrer que P_n est un polynôme de degré n et préciser le coefficient de x^n dans P_n.

c) Comparer $U_n(1-x)$ à $U_n(x)$ puis $P_n(1-x)$ à $P_n(x)$.

2 - Relation de récurrence entre les polynômes P_n :

a) Vérifier que :

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$ $U'_{n+1}(x) = (2x-1)\,U_n(x)$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $U''_{n+1}(x) = 2(2n+1)\,U_n(x) + U_{n-1}(x)$

b) En dérivant n fois (1) et $(n-1)$ fois (2), démontrer que :

(3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)(2x-1)P_n(x)+nP_{n-1}(x) = 0$

3 - Orthogonalité des polynômes P_n :

a) Pour $n \geqslant 1$, calculer $U_n^{(k)}(1)$ et $U_n^{(k)}(0)$ si $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

b) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties successives que, si f est une fonction numérique de classe C^n sur $[0,1]$:

(4) $\displaystyle\int_0^1 f(t)P_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t)\,U_n(t)dt$

En déduire que, si $n \geqslant 1$, pour tout polynôme Q appartenant à E_{n-1} :

(5) $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,P_n(t)dt = 0$

c) Prouver enfin que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de E_n.

4 - Calcul de la norme du polynôme P_n :

a) On pose : $I_n = \int_0^1 U_n(t)dt$.

Utiliser (2) pour obtenir, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n.

b) Calculer $||P_n||$ en utilisant (4).

2

5 - Etude des racines de P_n :

On suppose que $n \geqslant 1$, et l'on se propose de démontrer que P_n admet n racines distinctes appartenant à $]0,1[$.

a) Que vaut $\int_0^1 P_n(t)dt$? P_n peut-il conserver un signe constant sur $[0,1]$?

En déduire que P_n admet au moins une racine d'ordre impair appartenant à $]0,1[$.

b) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les racines d'ordre impair de P_n appartenant à $]0,1[$.

Montrer que $\int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{k}(t-x_i)\right] P_n(t)dt$ est non nulle et, à l'aide de la formule (5), prouver que $k = n$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les racines du polynôme P_n rangées dans l'ordre croissant.

6 - Minoration de P_n :

a) Comparer x_i et x_{n+1-i} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (utiliser le résultat obtenu au I-1-c).

En déduire que : $P_n^2(x) = \left(C_{2n}^n\right)^2 \prod_{i=1}^{n} [x(x-1) + x_i(1-x_i)]$.

b) Que vaut $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} x(1-x)$? En déduire, par une majoration simple de $|I_n|$, que : $C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$

c- Prouver que : $\forall x \geqslant 1 \quad P_n(x) \geqslant \frac{[4\sqrt{x(x-1)}]^n}{2n+1}$

7) Etude de la suite (Q_n) :

a) Expliciter Q_0, Q_1, Q_2 et montrer que, pour tout entier n, Q_n est un polynôme à coefficients rationnels dont on donnera le degré.

b) Démontrer, en utilisant (3), que :

$$(6) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)Q_n(x) + n\,Q_{n-1}(x) = 0$$

II - CALCUL DE L'INTEGRALE D'UN POLYNOME PAR INTERPOLATION :

Dans cette partie, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Détermination d'une formule interpolatoire :

Pour tout entier i tel que : $1 \leqslant i \leqslant n$, on appelle L_i le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

a) Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, calculer $L_i(x_j)$.

En déduire que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1}.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P de E_{n-1} dans cette base ?

b) Prouver l'existence d'une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de réels tels que :

$$(7) \quad \forall P \in E_{n-1} \qquad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, P(x_i)$$

c) Etablir que :

$$\forall x \neq x_i \qquad L_i(x) = \frac{1}{P_n'(x_i)} \cdot \frac{P_n(x)}{x - x_i}$$

d) En déduire que :

$$(8) \qquad \lambda_i = \frac{Q_n(x_i)}{P_n'(x_i)}$$

2) Extension de la formule interpolatoire :

a) Soit P appartenant à E_{2n-1}, R le reste de sa division euclidienne ...

par P_n, montrer que : $\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 R(t)dt$

b) En déduire que la relation (7) reste valable si P appartient à E_{2n-1}.

3) Applications de cette formule :

a) Si $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$, que vaut $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$?

b) En remarquant que $P_n^2(x) - (C_{2n}^n)^2 x^{2n}$ appartient à E_{2n-1},

calculer $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{2n}$.

c) Montrer que : $\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad \lambda_i = \int_0^1 L_i^2(t)dt$. En déduire que : $\lambda_i > 0$.

III - APPLICATION A LA DETERMINATION DE VALEURS APPROCHEES DE $\ell n\, 2$:

On se propose, dans cette partie, de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie

par : $\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2-x_i}$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ ont été définis précédemment, converge vers $\ell n 2 = \int_0^1 \frac{dt}{2-t}$ et d'étudier la vitesse de convergence.

1) Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

a) En remarquant que : $\frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{2^{k+1}} + \frac{x^{2n}}{4^n(2-x)}$

démontrer que : $u_n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k2^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$

et que : $\ell n 2 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{4^n} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2-t} dt$

b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1 \quad |\ell n 2 - u_n| \leqslant \frac{2}{(2n+1)4^n}$

Conclure.

2) Autre expression de u_n :

Montrer, en décomposant Q_n sur la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ de E_{n-1} et en utilisant la formule (8) que :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{Q_n(2)}{P_n(2)}$$

En déduire que u_n est rationnel.

3) Relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} :

Utiliser les formules (3) et (6) pour simplifier $Q_{n+1}(2)P_n(2) - Q_n(2)P_{n+1}(2)$.

En déduire que : $\forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$

4) Rapidité de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

a) Montrer, en considérant $Q_n(2)$, que : $\ell n 2 - u_n = \frac{1}{P_n(2)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t} dt$.

b) En déduire, en remarquant que $\int_0^1 \frac{P_n(t)-P_n(2)}{t-2} P_n(t)dt = 0$, que :

$$\ell n 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t} dt .$$

c) Démontrer les inégalités :

$$0 \leqslant \ell n 2 - u_n \leqslant \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leqslant \frac{2n+1}{(32)^n}$$

5) Application numérique :

Dresser un tableau, donnant pour $n = 1,2,3,4$, u_n sous forme irréductible, sous forme décimale approchée, ainsi qu'un majorant de $\ell n 2 - u_n$.