

I Etude des fonctions f_n associées à $f: x \mapsto x^2$.

$n \in \mathbb{N}^*$.

Q1 a) $\forall x \in [0,1], f(x) = 1$ donc $\forall x \in [0,1], f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$. $f_n = f$

b) $\forall x \in [0,1], f(x) = x$; $\forall x \in [0,1], f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}$

fixe $x \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}$ n'est autre que l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et x

donc $\forall x \in [0,1], f_n(x) = \frac{1}{n} x n x = x$. Par conséquent : $\forall x \in [0,1], f_n(x) = x$. $f_n = f$.

Remarque - On pourrait aussi partir de $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, puis dériver par rapport à a , multiplier par a , puis remplacer a par x et b par $1-x$ et enfin multiplier par $\frac{1}{n}$!
On peut aussi utiliser $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Q2 Soit $x \in [0,1]$. f_n est dérivable en x et $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) [kx^{k-1}(1-x)^{n-k}] + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x [x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}]$

$\frac{x(x-1)}{n} f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{x-k}{n} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$

$\frac{x(x-1)}{n} f'_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(1-k)}{n} x^{k+1} (1-x)^{n-k}$

$\frac{x(x-1)}{n} f'_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} (1-x+x) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k+1} (1-x)^{n-k}$

$\frac{x(x-1)}{n} f'_n(x) = q_n(x) - x f_n(x)$ en effet $q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$
 $q_n(x) = x f_n(x) = f(x)x$

donc $\forall x \in [0,1], \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = q_n(x) - x f_n(x)$.

Q3 a) Varian 1. Pour $\forall x \in [0,1], \hat{f}(x) = x$ et $\hat{g}(x) = x f(x)$. $\hat{g} = f$!

d'après ce qui précède : $\forall x \in [0,1], \frac{x(1-x)}{n} \hat{f}'_n(x) = (\hat{g})'_n(x) - x (\hat{f})'_n(x)$! (a)

d'après Q1 b : $\forall x \in [0,1], (\hat{f})'_n(x) = x$. donc $\forall x \in [0,1], ((\hat{f})'_n)'(x) = 1$.

Par conséquent en reportant (a) : $\forall x \in [0,1], \frac{x(1-x)}{n} \times 1 = (\hat{g})'_n(x) - x \times x$

$\forall x \in [0,1], f'_n(x) = (\hat{g})'_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$

$\forall x \in [0,1], f'_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$

Veria 1. Soit $x \in [0, 1]$. $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k}$; (2)

$f_n(x) = \frac{1}{n^2} E(X^2)$ où X est une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres n et x

$f_n(x) = \frac{1}{n^2} [V(X) + (E(X))^2] = \frac{1}{n^2} n x (1-x) + \frac{1}{n^2} (n x)^2$

$f_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$... nous retrouvons le résultat précédent.

b) $\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| = \frac{x(1-x)}{n}$. Pour $\forall x \in [0, 1], f(x) = x(1-x)$.

0	1/4	1
x	0	1

 $\cdot \sup_{x \in [0, 1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$

donc $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4n}$. △ Bien obtenu ce résultat pour la fin.

Q4 Veria 1. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

\nearrow Q3a
 \nearrow Q3b
 \nearrow Q1a

$$= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1$$

donc $\forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Veria 2. Soit $x \in [0, 1]$. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$ n'attend que :

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ où X est une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres n et x .

$V(X) = nx(1-x)$. En divisant de tout par n^2 on retrouve l'égalité demandée.

II Etude des fonctions f_n associées à $f: x \mapsto e^x$

Binôme de P

Q1 Soit $x \in [0, 1]$. $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{k/n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{x/n})^k (1-x)^{n-k} = (e^{x/n} + 1 - x)^n$

$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = (x(e^{1/n} - 1) + 1)^n$

Q2 Soit $x \in [0, 1]$. $f_n(x) = e^{n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1)}$

$n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) \sim n [x(e^{1/n} - 1) + 1 - 1] = nx(e^{1/n} - 1) \sim nx \cdot \frac{1}{n} = x$ ←

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) = 1$

ceci vaut bien

pour $x = 0 \dots$

↑
pour CLT + J.6

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(x(e^{1/n} - 1) + 1) = x$

Finalement : $\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$.

Pour les initiés : $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f . Nous allons maintenant montrer que la convergence est uniforme ! c'est toujours pour les initiés. Le cache est retiré et la continuité se vérifie car cela n'est pas évident !

(Q3) a) Soit $x \in]0,1[$. $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $h(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. (3)

$$x(e^u - 1) + 1 = 1 + xu + x\frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

$$\text{d'ac } h(x(e^u - 1) + 1) = xu + x\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}(xu + x\frac{u^2}{2})^2 + o(u^2) = xu + x\frac{u^2}{2} - \frac{x^2}{2}u^2 + o(u^2).$$

$$\text{d'ac } \underline{h(x(e^u - 1) + 1) = xu + \frac{x(1-x)}{2}u^2 + o(u^2)} \quad (\frac{x(1-x)}{2} \text{ et non par } x(1-\frac{x}{2}) \dots)$$

Remarques.. 1.. Ceci vaut encore pour $x=0$ et $x=1$!

2.. Ce résultat signifie d'ac que $h(x(e^u - 1) + 1) - xu \sim \frac{x(1-x)}{2}u^2 \dots$ l'ovculaire étant u . ↑
toujours pour (1) + 3.6

Retrouvons ce résultat en utilisant la règle de l'Hôpital. Il s'agit de montrer que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{h(x(e^u - 1) + 1) - xu}{u^2} \right] = \frac{x(1-x)}{2}$$

$\psi_1: u \mapsto h(x(e^u - 1) + 1) - xu$ est dérivable sur un voisinage de 0 et $\psi_1: u \mapsto \frac{x e^u}{x(e^u - 1) + 1} - x$

$\psi_2: u \mapsto u^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et non nul : $\forall u \in \mathbb{R}^*, \psi_2'(u) = 2u \neq 0$.

Les hypothèses d'application de la règle de l'Hôpital sont très largement vérifiées. Notamment : $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi_1'(u)}{\psi_2'(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{x e^u - x^2(e^u - 1) - x}{(x(e^u - 1) + 1) \cdot 2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x(e^u - 1) + 1} \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{x(e^u - 1)}{u} - \frac{x^2(e^u - 1)}{u} \right]$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi_1'(u)}{\psi_2'(u)} = \frac{1}{x \times 0 + 1} \times \frac{1}{2} \times [x \times 1 - x^2 \times 1] = \frac{x(1-x)}{2}; \text{ d'ac } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi_1(u)}{\psi_2(u)} = \frac{1}{2} \dots \text{ qfd.}$$

b) Soit $x \in]0,1[$ (ou $[0,1]$)

$$f_n(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = [x(e^{1/n} - 1) + 1]^n - e^x = e^x \left[e^{n h(x(e^{1/n} - 1) + 1) - x} - 1 \right]$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n h(x(e^{1/n} - 1) + 1) - x) = 0$ (vérifier haut!) d'ac $f_n(x) \cdot e^x \sim e^x (n h(x(e^{1/n} - 1) + 1) - x)$

$$f_n(x) \cdot e^x \sim n e^x \left[h(x(e^{1/n} - 1) + 1) - x \right] \sim n e^x \frac{x(1-x)}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{x(1-x)}{2} e^x \times \frac{1}{n}.$$

$$\text{d'ac } \underline{f_n(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \sim \frac{x(1-x)}{2} e^x \times \frac{1}{n}} \quad (\text{my va, vers } e^x, \text{ mais doucement!})$$

Remarque.. Ceci vaut encore pour $x=0$ et $x=1$

(Q4) ψ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Rôle majeur l'existence d'un jéro pour ψ' dans $]0,1[$.

$$\forall x \in]0,1[, \psi'(x) = n \frac{e^{1/n} - 1}{x(e^{1/n} - 1) + 1} - 1 = \frac{n e^{1/n} - n - x(e^{1/n} - 1) - 1}{x(e^{1/n} - 1) + 1} = \frac{-(e^{1/n} - 1)x + n(e^{1/n} - 1) - 1}{x(e^{1/n} - 1) + 1}$$

ψ' est de signe de $h: x \mapsto -(e^{1/n} - 1)x + n(e^{1/n} - 1) - 1$ sur $[0,1]$.

Les jéros de ψ' coïncident avec les jéros de h . Et affirmer d'ac h admet un plus un jéro dans \mathbb{R} d'ac dans $]0,1[$; ψ' s'annule au plus une fois sur $]0,1[$ et au moins une fois sur $]0,1[$!

ψ' admet un zéro et on peut x_n dans $]0, 1[$. $-(e^{3/n}-1)x_n + ne^{3/n}-1=0$ d'où $x_n = n - \frac{1}{e^{3/n}-1}$

Le signe de ψ' est celui de h qui est affiné, d'où le tableau de variation

suivant :

x	0	x_n	1
$\psi'(x)$		+	0
$\psi(x)$			-

Remarque.. d'utilisation de Rolle pour l'existence de x_n dispense le candidat (d'oublier!) de vérifier que: $n - \frac{1}{e^{3/n}-1} \in]0, 1[$.

Regardons un peu cela. Il s'agit de montrer que: $1 - \frac{3/n}{e^{3/n}-1} \in]0, \frac{1}{n}[$!

Montrons donc que: $\forall y \in]0, 1[$, $1 - \frac{y}{e^y-1} \in]0, y[$. Soit $y \in]0, 1[$

$1 - \frac{y}{e^y-1} \in]0, y[\Leftrightarrow 1 - \frac{y}{e^y-1} > 0$ et $1 - \frac{y}{e^y-1} < y \Leftrightarrow e^y > y+1$ et $e^y(1-y) < 1$

$1 - \frac{y}{e^y-1} \in]0, y[\Leftrightarrow (y=1 \text{ et } e > 2 \text{ et } 0 < 1) \text{ ou } (y \neq 1 \text{ et } y > h(y+1) \text{ et } y + h(1-y) < 0$

$1 - \frac{y}{e^y-1} \in]0, y[\Leftrightarrow y=1 \text{ ou } (y \neq 1 \text{ et } h(y+1) < y \text{ et } h(1-y) < -y)$

Cette dernière propriété est vraie car $\forall t \in \mathbb{R}^*_2 - \{1\}$, $\ln t < t-1$ d'où $\forall u \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ $h(1+u) < u$

Q5. $\forall x \in]0, 1[$, $0 \leq \psi(x) \leq \psi(x_n)$ d'après Q4 (voir tableau)

$\forall x \in]0, 1[$, $1 \leq e^{\psi(x)} \leq e^{\psi(x_n)}$

$\forall x \in]0, 1[$, $e^x \leq e^{\psi(x)+x} \leq e^{\psi(x_n)+x}$

$\forall x \in]0, 1[$, $e^x \leq f_n(x) \leq e^{x+\psi(x_n)}$. $f_n(x) = e^{n \ln(x(e^{3/n}-1)+1)}$

$\psi(x) = n \ln(x(e^{3/n}-1)+1) - x$

$\forall x \in]0, 1[$, $0 \leq f_n(x) \cdot e^{-x} \leq e^{x+\psi(x_n)} \cdot e^{-x} = e^x (e^{\psi(x_n)-1}) \leq e (e^{\psi(x_n)-1})$

d'où $\forall x \in]0, 1[$, $|f_n(x) - e^x| \leq e (e^{\psi(x_n)-1})$

En conséquence: $\sup_{x \in]0, 1[} |f_n(x) - e^x| \leq e (e^{\psi(x_n)-1})$

Q6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x_n = n - \frac{1}{e^{3/n}-1}$ et $\psi(x_n) = n \ln \left[\left(n - \frac{1}{e^{3/n}-1} \right) (e^{3/n}-1) + 1 \right] - n + \frac{1}{e^{3/n}-1}$

$\psi(x_n) = n \left[\ln \left(n(e^{3/n}-1) \right) - 1 + \frac{3/n}{e^{3/n}-1} \right] = n \left[\ln \left(\frac{e^{3/n}-1}{3/n} \right) - 1 + \frac{3/n}{e^{3/n}-1} \right]$

$\psi(x_n) = n \left[\ln \left(1 + \left(\frac{e^{3/n}-1}{3/n} - 1 \right) \right) - 1 + \left(\frac{e^{3/n}-1}{3/n} \right)^{-1} \right]$

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\frac{e^u-1}{u} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + o(u^2)$; $\left(\frac{e^u-1}{u}\right)^{-1} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + o(u^2)$

d'où $\ln \left(1 + \left(\frac{e^u-1}{u} - 1 \right) \right) - 1 + \left(\frac{e^u-1}{u} \right)^{-1} = \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} \right)^2 - 1 + \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} \right) + o(u^2)$

$\ln \left(1 + \left(\frac{e^u-1}{u} - 1 \right) \right) - 1 + \left(\frac{e^u-1}{u} \right)^{-1} = \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} - \frac{u^2}{8} - 1 + 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + o(u^2)$

$\ln \left(1 + \left(\frac{e^u-1}{u} - 1 \right) \right) - 1 + \left(\frac{e^u-1}{u} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) u^2 + o(u^2) = \frac{1}{8} u^2 + o(u^2)$.

Fonction A: $\ln(1 + (\frac{e^y-1}{u})) - 1 + (\frac{e^y-1}{u})^{-1} \sim \frac{1}{8} u^2$

Donc $h(1 + (\frac{e^{3/n}-1}{3/n}))^{-1} + \frac{3/n}{e^{3/n}-1} \sim \frac{1}{8n^2}$; on multiplie par u

multiplie par $\psi(x_n) \sim \frac{1}{8n}$

Ceci montre en particulier que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(x_n) = 0$ donc $\frac{e^{\psi(x_n)} - 1}{\psi(x_n)} \sim \frac{1}{8n}$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{e^{\psi(x_n)} - 1} - 1) = 0$; ceci, grace à l'inégalité de QS assure la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f .

III Etude des fonctions f_n associées à $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

(Q1) Soit $x \in [0, 1]$. $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{1+k/n} x^k (1-x)^{n-k} = n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n+k} x^k (1-x)^{n-k}$

$n \int_0^1 u^{n-1} (1-x(1-u))^n du = n \int_0^1 u^{n-1} (\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ux)^k (1-x)^{n-k}) du = n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 u^{n+k-1} du$

$1-x(1-u) = ux + (1-x)$ $\int_0^1 u^{n+k-1} du = \frac{1}{n+k}$

$n \int_0^1 u^{n-1} (1-x(1-u))^n du = n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{n+k} = f_n(x)$

Fonction A: $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n+k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1} (1-x(1-u))^n du$

(Q2)

a) Pour $\forall t \in [0, 1], f(t) = t^n, \forall t \in [0, 1], |f'(t)| = |nt^{n-1}| \leq n$

les A.F. domat: $\forall (t, t') \in [0, 1]^2, |f(t) - f(t')| \leq n|t - t'|$

Donc $\forall (t, t') \in [0, 1]^2, |t^n - t'^n| \leq n|t - t'|$ $t^k t'^{n-k} \leq 1$ pour $k \in [0, n-1]$

Plus simplement: $\forall (t, t') \in [0, 1]^2, |t^n - t'^n| = |t - t'| [\sum_{k=0}^{n-1} t^k t'^{n-1-k}] \leq n|t - t'|$

b) soit $(x, x') \in [0, 1]^2$ et soit $u \in [0, 1]$.

$1-x(1-u)$ et $1-x'(1-u)$ sont dans $[0, 1]$ donc $|(1-x(1-u))^n - (1-x'(1-u))^n| \leq n |1-x(1-u) - 1+x'(1-u)|$

Donc $|(1-x(1-u))^n - (1-x'(1-u))^n| \leq n|(1-u)(x'-x)| = n(1-u)|x-x'|$

$\forall (x, x') \in [0, 1]^2, \forall u \in [0, 1], |(1-x(1-u))^n - (1-x'(1-u))^n| \leq n(1-u)|x-x'|$

soit $(x, x') \in [0, 1]^2$.

$|f_n(x) - f_n(x')| = n \left| \int_0^1 u^{n-1} [(1-x(1-u))^n - (1-x'(1-u))^n] du \right|$

$|f_n(x) - f_n(x')| \leq n \int_0^1 u^{n-1} |(1-x(1-u))^n - (1-x'(1-u))^n| du \leq n \int_0^1 u^{n-1} n(1-u)|x-x'| du = n^2|x-x'| \int_0^1 (u^{n-1} - u^n) du$

$$\int_0^1 (u^{n-1} - u^n) du = \left[\frac{u^n}{n} - \frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Donc $\forall (x, x') \in [0, 1]^2$, $|f_n(x) - f_n(x')| \leq \frac{n}{n+1} |x - x'| \leq |x - x'|$.

f_n et donc f Lipschitzienne sur $[0, 1]$. (f_n et aussi $\frac{n}{n+1}$ - Lipschitzienne)

c) Soit $a \in [0, 1]$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in [0, 1]$.

$$\left| \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{(a+h) - a} \right| \leq \frac{|a+h-a|}{|a+h-a|} = 1 \quad \& \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{(a+h) - a} \right| = |f'_n(a)| \quad (\text{car}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{(a+h) - a} = f'_n(a))$$

Donc $|f'_n(a)| \leq 1$. Par conséquent: $\sup_{a \in [0, 1]} |f'_n(a)| \leq 1$.

(Q3) 0) $\forall x \in [0, 1]$, $x f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - f(x)$

Pour $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) = x f(x)$. $g = 1 - f$.

(1) donc: $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g'_n(x) - x f'_n(x)$

Et donc que: $\forall x \in [0, 1]$, $(1-f)_n(x) = (1)_n(x) - f_n(x) = 1 - f_n(x)$ (l'application $f \mapsto f_n$ est linéaire!). $\forall x \in [0, 1]$, $g'_n(x) = 1 - f'_n(x)$.

Donc $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - f'_n(x) - x f'_n(x) = 1 - (1+x) f'_n(x) \dots$ cqfd

b) $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+x} - f_n(x) = \frac{1}{1+x} [1 - (1+x) f_n(x)] = \frac{x(1-x)}{n(1+x)} f'_n(x)$

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - f_n(x)| = \frac{x(1-x)}{n(1+x)} |f'_n(x)| \stackrel{Q2 \text{ c)}}{\leq} \frac{x(1-x)}{n(1+x)} \leq \frac{1/4}{n(1+x)} \leq \frac{1/4}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

\uparrow $\sup_{x \in [0, 1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$ (I Q3)
 \uparrow $1+x \geq 1$

Donc $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{4n}$

Remarque... Ceci donne $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f . La dernière inégalité assure la convergence uniforme.

IV Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0, 1]$.

Fini de résumer. Pour en venir au cas général.

(Q4) Soit $k \in [0, n-1]$. $I_n(k+1) = \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} dx = \left[x^{k+1} \left(-\frac{(1-x)^{n-k}}{n-k} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 (k+1)x^k \left[-\frac{(1-x)^{n-k}}{n-k} \right] dx$

Donc $I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{k+1}{n-k} I_n(k)$.

$\forall k \in \{0, n-1\}, I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} I_n(k).$

$I_n(1) = \frac{1}{n} I_n(0) = \frac{1}{n} \times \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

$I_n(2) = \frac{2}{n-1} I_n(1) = \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$ (... si $n \geq 2$)

$I_n(3) = \frac{3}{n-2} I_n(2) = \frac{3}{n-2} \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{3!}{A_{n+1}^3}$ (... si $n \geq 3$)

Et est temps de montrer par récurrence que: $\forall k \in \{0, n\}, I_n(k) = \frac{k!}{A_{n+1}^{k+1}}$.

Ceci vaut pour $k=0$ ($I_n(0) = \frac{1}{n+1} = \frac{0!}{A_{n+1}^1}$)

Supposons la propriété vraie pour $k \in \{0, n-1\}$ et montrons la pour $k+1$.

$I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} I_n(k) = \frac{k+1}{n-k} \times \frac{k!}{A_{n+1}^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{A_{n+1}^{k+2}}$... cqfd.

c) $\forall k \in \{0, n\}, I_n(k) = \frac{k!}{A_{n+1}^{k+1}} = \frac{k! (n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}$

A ce propos vérifiez que l'on sait calculer $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$

b) $\int_0^1 h_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}$

$\int_0^1 h_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \right]$

On joue le même! $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} f(1)\right) = 0$

Finalment: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$

Q2) a) On suppose f de classe C^2 sur $[0,1]$. Poser $\pi_2 = \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|$, $\pi_2 \in \mathbb{R}_+$

b) $\forall (x, x') \in [0,1]^2$, $|f(x) - f(x')| \leq \pi_2 |x-x'|^2$ car $\forall t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leq \pi_2$

Donc f est π_2 lipschitzienne. On pose désormais $k = \pi_2$! Notation des plus adroite... voir l'écriture de f_n .

Soit $(x, x') \in [0,1]^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1^{er} Cas.. Supposons $|x'-x| \leq \alpha$.

$|f(x') - f(x)| \leq \pi_2 |x'-x| = k |x'-x| \leq k \alpha \leq k \alpha + 2 \frac{\pi_0(f)}{\alpha^2} (x'-x)^2$

(Tièrdeu, hein? Fin, surtout!)

2^{er} Cas.. Supposons $|x'-x| > \alpha$. Pour avoir la bonne idée, analysons le

majourd! $k \alpha + 2 \frac{\pi_0(f)}{\alpha^2} (x'-x)^2 \geq k \alpha + 2 \pi_0(f) \geq 2 \pi_0(f) = \pi_0(f) + \pi_0(f)$

Alas c'est déjà maintenant!

$\pi_0(f) \geq |f(x')|$ et $\pi_0(f) \geq |f(x)|$ donc $\pi_0(f) + \pi_0(f) \geq |f(x')| + |f(x)|$

et $|f(x')| + |f(x)| \geq |f(x') - f(x)|$!! Reprenons dans l'ordre :

$$|f(x') - f(x)| \leq |f(x')| + |f(x)| \leq 2\pi_0(f) \leq k\alpha + 2\pi_0(f) \leq k\alpha + 2\pi_0(f) \frac{(x'-x)^2}{\alpha^2} = k\alpha + \frac{2\pi_0(f)}{\alpha^2} (x'-x)^2$$

donc $\forall (x, x') \in [0, 1]^2$, $|f(x') - f(x)| \leq k\alpha + \frac{2\pi_0(f)}{\alpha^2} (x'-x)^2$ et ceci pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Fixons α dans \mathbb{R}_+^* et x dans $[0, 1]$!!

$$f_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n h^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x) = \sum_{k=0}^n h^k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\uparrow \quad \downarrow$$

$$1 = \sum_{k=0}^n h^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n h^k x^k (1-x)^{n-k} |f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)|$$

" $|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n h^k x^k (1-x)^{n-k} \dots$ " Non! Ceci nous mettrait dans le k^k !

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^n h^i x^i (1-x)^{n-i} |f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^n h^i x^i (1-x)^{n-i} \left[k\alpha + 2 \frac{\pi_0(f)}{\alpha^2} \left(\frac{i}{n} - x\right)^2 \right]$$

Remarque... Saluons le concepteur pour sa notation f et k lipschitzienne et son goût du calcul. Cette petite n pouvait que conduire les élèves à se perdre les pieds dans le tapis... afin de quelques élèves qui n'étaient pas accés... au tapis.

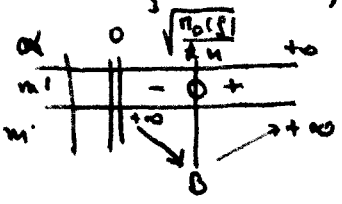
Reprenons. $|f_n(x) - f(x)| \leq k \underbrace{\sum_{i=0}^n h^i x^i (1-x)^{n-i}}_1 + \frac{2\pi_0(f)}{\alpha^2} \sum_{i=0}^n h^i x^i (1-x)^{n-i} \underbrace{\left(\frac{i}{n} - x\right)^2}_{\frac{x(1-x)}{n}} \text{ (voir 3-94)}$

Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{2\pi_0(f)}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq k\alpha + \frac{2\pi_0(f)}{\alpha^2} \times \frac{3/4}{n} = k\alpha + \frac{\pi_0(f)}{2n\alpha^2}$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{\pi_0(f)}{2n\alpha^2}$.

d) 1^{er} Cas... $\pi_0(f) > 0$ et $k > 0$. (à ne pas oublier... n'oubliez pas...)

pour $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $m(\alpha) = k\alpha + \frac{\pi_0(f)}{2n\alpha^2}$. mat dérivable sur \mathbb{R}_+^* . $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $m'(\alpha) = k - \frac{\pi_0(f)}{n\alpha^3}$



$$0 = m' \left(\sqrt[3]{\frac{\pi_0(f)}{k n}} \right) \quad B = \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} (m(\alpha)) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \left(m(\alpha) \right)$$

doit $x \in [0, 1]$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(x) - f(x)| \leq m(\alpha)$. $|f_n(x) - f(x)|$ est un minimum de m sur \mathbb{R}_+^* donc $|f_n(x) - f(x)| \leq B$ à vérifier tranquillement

$$B = k \sqrt[3]{\frac{\pi_0(f)}{k n}} + \frac{\pi_0(f)}{2n} \times \left(\sqrt[3]{\frac{\pi_0(f)}{k n}} \right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left[\sqrt[3]{k^2 \pi_0(f)} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\pi_0(f)} \sqrt[3]{k^2} \right] = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{3}{2} \sqrt[3]{k^2 \pi_0(f)}$$

Pour $A = \frac{3}{2} \sqrt[3]{k^2 \pi_0(f)}$. $\forall x \in [0,1], |h_n(x) - f(x)| \leq B = \frac{A}{\sqrt{n}}$. (9)

Donc $\sup_{x \in [0,1]} |h_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt{n}}$

2^e Cas. $\pi_0(f) = 0$. $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0$. $\forall x \in [0,1], f(x) = 0$. $\forall x \in [0,1], f_n(x) = 0$.

Donc $\sup_{x \in [0,1]} |h_n(x) - f(x)| = 0 \leq \frac{A}{\sqrt{n}}$ avec $A = \frac{3}{2} \sqrt[3]{k^2 \pi_0(f)}$.

3^e Cas. $k = 0$. $\forall (u, x') \in [0,1]^2, |f(u) - f(x')| \leq 0 |u - x'| = 0$;

f est constante, donc $\forall x \in [0,1], f_n(x) = f(x)$. $\sup_{x \in [0,1]} |h_n(x) - f(x)| = 0 \leq \frac{A}{\sqrt{n}}$ avec

Donc tous les cas: $\sup_{x \in [0,1]} |h_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt{n}}$ avec $A = \frac{3}{2} \sqrt[3]{k^2 \pi_0(f)}$.

Ceci permet de dire que h_n converge uniformément vers la fonction f .

$|\int_0^1 h_n(x) dx - \int_0^1 f(x) dx| \leq \int_0^1 |h_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{A}{\sqrt{n}} \int_0^1 dx = \frac{A}{\sqrt{n}}$.

lim $\frac{A}{\sqrt{n}} = 0$ donc lim $\int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

(Q3) a) C'est exactement l'inégalité de Taylor. Lagrange. ($\pi_2(f)$ est un majorant de $|f''|$ sur le segment déterminé par x et x').

Reprenons pour ceux qui ont oublié.

Soit $(x, x') \in [0,1]^2$. L'inégalité est évidente pour $x = x'$. Supposons $x \neq x'$. Pour des raisons de symétrie, allons jusqu'à supposer $x < x'$. Appliquons la formule de Taylor avec cette intégral.

$f(x') = f(x) + (x' - x) f'(x) + \int_x^{x'} \frac{(x' - t)^2}{2!} f''(t) dt$ (... fait de classe C^2 sur (x, x'))

Donc $|f(x') - f(x) - (x' - x) f'(x)| = |\int_x^{x'} (x' - t) f''(t) dt| \leq \int_x^{x'} (x' - t) |f''(t)| dt \leq \pi_2(f) \int_x^{x'} (x' - t) dt = \pi_2(f) \left[-\frac{(x' - t)^2}{2} \right]_x^{x'}$

Donc $|f(x') - f(x) - (x' - x) f'(x)| \leq \frac{\pi_2(f)}{2} (x' - x)^2$.

b) Soit $x \in [0,1]$. On voit très bien qu'à faire $x' = \frac{x}{n}$, en multipliant par $h^k \frac{1}{n} (1-x)^{n-k}$

et en sommant on récupère à droite: $\frac{\pi_2(f)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} h^k x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{x}{n} - x\right)^2$ qui est avec

$\frac{\pi_2(f)}{2} \frac{x(1-x)}{n}$ qui se majore sans difficulté par $\frac{\pi_2(f)}{8n}$. Ce qui semble moins drôle est ce qui

x passe à gauche de $f(x') - f(x)$ va nous permettre de récupérer $f(x) - f(x)$ mais que va donner $(x' - x) f(x)$? Réponse: rien!

regardez le travail.

$$\forall k \in [0, n-1], |f(\frac{k}{n}) - f(x) - (\frac{k}{n} - x)f'(x)| \leq \frac{n_2(f)}{2} (\frac{k}{n} - x)^2$$

$$\forall k \in [0, n-1], |h^k f(\frac{k}{n}) x^{n-k} - f(x) h^k x^{n-k} - h^k (\frac{k}{n} - x) x^{n-k} f'(x)| \leq \frac{n_2(f)}{2} h^k (\frac{k}{n} - x)^2 x^{n-k}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n |h^k f(\frac{k}{n}) x^{n-k} - f(x) h^k x^{n-k} - h^k (\frac{k}{n} - x) x^{n-k} f'(x)| \leq \frac{n_2(f)}{2} \sum_{k=0}^n h^k (\frac{k}{n} - x)^2 x^{n-k}$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$| \sum_{k=0}^n h^k f(\frac{k}{n}) x^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^n h^k x^{n-k} - f'(x) \sum_{k=0}^n h^k (\frac{k}{n} - x) x^{n-k} | \leq \frac{n_2(f)}{2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{n_2(f)}{2n}$$

$$| f_n(x) - f(x) - f'(x) \sum_{k=0}^n h^k \frac{k}{n} x^{n-k} + x f'(x) \sum_{k=0}^n h^k x^{n-k} | \leq \frac{n_2(f)}{8n} = \frac{n_2(f)}{8n}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x \leq 1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{1 \leq x \leq 1}$

$$\text{Donc } |f_n(x) - f(x) - f'(x)x + x f'(x)| \leq \frac{n_2(f)}{8n}$$

$$\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n_2(f)}{8n} \quad \text{Donc } \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n_2(f)}{8n}$$

cette majoration est la meilleure possible. En effet reprenons $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$.

$$\text{Nous avons : } \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{x(1-x)}{n} = \frac{1}{4n} = \frac{1}{8n} = \frac{n_2(f)}{8n}$$

peut donc être strictement plus petit que $\frac{n_2(f)}{8n}$ tel que $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{8n}$ d'où pour toute fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$.

Notons nous donc de démontrer que toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. Précisons :

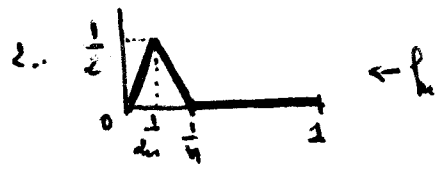
doit $(h)_n$, une suite d'applications de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Soit f une application de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

$(h)_n$ converge simplement vers f si pour tout $x \in [a, b]$ la suite $(h_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, c'est à dire si : $\forall x \in [a, b], \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |h_n(x) - f(x)| < \epsilon$ (p dépend de ϵ et de x !)

$(h)_n$ converge uniformément vers f si $(\sup_{x \in [a, b]} |h_n(x) - f(x)|)_n$ converge vers 0, c'est à dire si : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow (\forall x \in [a, b], |h_n(x) - f(x)| < \epsilon)$ (ici p ne dépend que de ϵ)

La convergence uniforme donne la convergence simple mais la réciproque est fautive.

Exercice 1.. prouver que si $(h)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et si toutes les fonctions h_n sont continues sur $C([a, b])$ alors f est continue sur C .



prouver que h_n converge simplement vers une fonction f que l'on détermine. La convergence est-elle uniforme ?