PARTIE I

1°.. Etude des variables aléatoires X_i $(1\leq i\leq n)$.

a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. X_i suit une loi binomiale de paramètres na et $\frac{1}{n}$ $(X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(na,\frac{1}{n}))$

$\forall k\in[\![0,na]\!]$, $p(X_i=k)=C_{na}^{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k}$

$E(X_i)=na\times\frac{1}{n}$. $E(X_i)=a$

$V(X_i)=na\times\frac{1}{n}\times(1-\frac{1}{n})$. $V(X_i)=a(1-\frac{1}{n})$.

b) 1er Cas.. $n>1$

Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que : $0\leq k<na$

$r_k=\dfrac{p(X_i=k+1)}{p(X_i=k)}=\dfrac{C_{na}^{k+1}}{C_{na}^{k}}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}=\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{(na)!}{(k+1)!\,(na-k-1)!}\times\dfrac{k!\,(na-k)!}{(na)!}=\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{na-k}{k+1}$

$r_k>1 \iff \dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{na-k}{k+1}>1\iff na-k>nk-k+n-1 \iff k<a-1+\frac{1}{n}$.

$r_k<1\iff\cdots\iff k>a-1+\frac{1}{n}$.

Par conséquent : $p(X=k+1)>p(X=k)\iff k<a-1+\frac{1}{n}$ et $p(X=k+1)<p(X=k)\iff k>a-1+\frac{1}{n}$

Notons encore que $E(a-1+\frac{1}{n})=a-1$

Par conséquent si $k\in[\![0,na]\!]$ et si $k<a-1$ alors $p(X=k)<p(X=a)$

si $k\in[\![0,na]\!]$ et si $k>a-1$ alors $p(X=k)<p(X=a)$

Donc $p(X=k)$ est maximum si et seulement si $k=a$.

2e Cas.. $n=1$. $\forall k\in[\![0,a-1]\!]$, $p(X_i=k)=0$ et $p(X_i=a)=\left(\frac{1}{n}\right)^{a}$

Le résultat précédent demeure.

Conclusion.. Le mode est a.

Q2.. Coefficient de corrélation des variables aléatoires X_i. $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$ et $i\neq j$

a) Chacun des na consommateurs passe une commande à l'un des n fournisseurs et le nombre de commandes reçues est $X_1+X_2+\cdots+X_n$.

Par conséquent $X_1+X_2+\cdots+X_n=na$.

$n^2a^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}X_iX_j$. $n^2a^2=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}E(X_iX_j)$

Donc $n^2a^2=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\times\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{nombre de termes dans la dernière somme}}\alpha$ où α est la valeur commune des espérances $E(X_iX_j)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = a\left(1-\frac{1}{n}\right) + a^2$

Donc $\quad n(n-1)\alpha = n^2a^2 - n\left[a\left(1-\frac{1}{n}\right)+a^2\right] = (n^2-n)a^2 - a(n-1)$

Soit $\alpha = \dfrac{na^2-a}{n} = a^2 - \dfrac{a}{n}$ (... le problème ne se pose pas pour $n=1$).

Finalement : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \underline{E(X_iX_j) = a^2 - \frac{a}{n}}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \underline{\operatorname{cov}(X_i,X_j)} = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \underline{-\frac{a}{n}}$.

Remarque.. X aurait été beaucoup plus simple de partir de :
$0 = V(na) = V(X_1+X_2+\cdots+X_n)$.

b) $\rho(X_i,X_j) = \dfrac{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{V(X_i)}\sqrt{V(X_j)}} = \dfrac{-a/n}{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} = -\dfrac{1}{n-1}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \underline{\rho(X_i,X_j) = -\frac{1}{n-1}}$.

Pour $n=2$ on obtient $\rho(X_1,X_2) = -1$. L'une des deux variables est une fonction quasi-affine de l'autre à coefficient négatif. Ceci est confirmé par $X_1+X_2 = 2a$ c'est à dire $X_2 = -X_1+2a$.

Q3 a) $Y = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i=1) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i=0) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}$

$\underline{E(Y) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$

b) $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. B_iB_j est une variable de Bernoulli

$\to i=j$ $\quad B_iB_j = B_i^2$. $\underline{B_i^2 \text{ est une variable de Bernoulli de paramètre } \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$.

$\to i \neq j$ $\quad p(B_iB_j=1) = p(B_i=1 \text{ et } B_j=1) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{na}$ (← les fournisseurs F_i et F_j sont sans clients, les na clients se répartissent chez les n-2 fournisseurs restants)

$\underline{B_iB_j \text{ est donc une variable de Bernoulli de paramètre } \left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}}$

Donc si $i=j$: $\underline{E(B_iB_j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}}$ et si $\underline{i \neq j \quad E(B_iB_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}}$

$V(Y) = V(B_1+B_2+\cdots+B_n) = \sum_{i=1}^{n} V(B_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}(B_i,B_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[E(B_i^2)-(E(B_i))^2\right] + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(E(B_iB_j) - E(B_i)E(B_j)\right)$

$V(Y) = n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right] + 2\times\frac{n(n-1)}{2}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right]$

$V(Y) = n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} + (n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na} - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\right]$

c) $E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n}E(Y) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na} = e^{na\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ et $na\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim na\left(-\frac{1}{n}\right) = -a$

Par conséquent : $\underline{\lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{Y}{n}\right) = e^{-a}}$.

$$V\left(\frac{Y}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(Y)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}+\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2na}\times\frac{n}{n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na}=e^{-a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{na}=e^{-2a}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V\left(\frac{Y}{n}\right)=0\times e^{-a}+1\times e^{-2a}-e^{-2a}=0$. $\quad\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}V\left(\frac{Y}{n}\right)=0}}$

Q4 Loi de la variable Y.

a) Y peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n-1.

$\underline{\underline{p(Y=n-1)=n\left(\frac{1}{n}\right)^{na}}}$ ← proba pour que les na clients commandent chez ce fournisseur.

1 choix du fournisseur recevant toutes les commandes

b) $p(Y\neq 0)=p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}X_i=0\right)$ (au moins 1 fournisseur n'a pas de commande ; l'un des évènements $X_i=0$ est réalisé).

$$p(Y\neq 0)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}p(X_{i_1}=0 \text{ et } X_{i_2}=0 \text{ et} \dots X_{i_k}=0)$$

$$p(Y\neq 0)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nombre d'éléments dans la somme interne}}}{C_n^k}\times\left(\frac{n-k}{n}\right)^{na}$$ ← proba pour que les na clients ne passent pas commande chez $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}$.

$$p(Y=0)=1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\left(\frac{n-k}{n}\right)^{na}=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}$$

donc $$\underline{\underline{p(Y=0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\left(\frac{k}{n}\right)^{na}}}$$

↪ Spécialiste des surjections, es-tu surpris !

c)

	a = 1	a = 2	a = 3
n = 1	1	1	1
n = 2	0,5	0,88	0,97
n = 3	0,22	0,74	0,92

(1/2 ; 7/8 ; 31/32)

(2/9 ; 20/27 ; 6050/6561)

* Ce n'est pas dit dans le texte mais dans d et e, $k\in[\![1,n-1]\!]$.

d) $p\left(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \;/\; \bigcap\limits_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)=1-p\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \;/\; \bigcap\limits_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$ car $\overline{\bigcap\limits_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]}=\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}[X_i=0]$

(Ne pas oublier que p_A " $B\to p(B/A)$ " est une probabilité !)

Appliquons la formule du crible à la réunion $\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0]$ avec la probabilité $p_{\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]}$

Nous obtenons : $p\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1} \sum_{k+1\le i_1<i_2<\dots<i_j\le n} p\left([X_{i_1}=0]\cap[X_{i_2}=0]\cap\dots[X_{i_j}=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$

Il y a $n-k$ éléments dans cette union !

donc $p\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}[X_i=0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1} \sum_{k+1\le i_1<\dots<i_j\le n} \left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na} = \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1} \times C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na}$

donc $p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = 1-\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{n-k-j}{n-k}\right)^{na}$

Par conséquent : $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)}} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na} \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}}}$

changement d'indice classique.

e) La probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient aucun client est :

$p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{na} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}$ (les na clients choisissent parmi $n-k$ fournisseurs)

La probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_n$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_n$ aient au moins un client est :

$p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0] \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]\right) = p\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0] \,/\, \bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right) p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right)$

donc $\underline{\underline{p\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0] \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i\neq 0]\right) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}}} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j} \times \left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na}$.

f) Si $k=0$ voir plus haut $\left(p(Y=0) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{k}C_n^{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\right)$

Supposons $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Notons que 1°. La probabilité pour que k fournisseurs <u>donnés</u> n'aient pas de client <u>et</u> que les $n-k$ autres aient au moins un client est la même que que la probabilité pour que $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'aient pas de client et que $F_{k+1}, \dots, F_n$ aient au moins un client ; c'est celle obtenue en e)

2° Il y a C_n^k manière de choisir k fournisseurs qui n'aient pas de client

Par conséquent : $p(Y=k) = C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}C_{n-k}^{j}\left(\frac{j}{n-k}\right)^{na}$

ou $\underline{p(Y=k) = C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{na}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}\left(1-\frac{j}{n-k}\right)^{na}}$

Notons encore que : $p(Y=k) = C_n^k \dfrac{(n-k)^{na}}{n^{na}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \dfrac{j^{na}}{(n-k)^{na}}$

donc $p(Y=k) = C_n^k \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \left(\dfrac{j}{n}\right)^{na}$ à priori pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$k = n-j$!!

or $C_n^0 \displaystyle\sum_{j=0}^{n-0} (-1)^{n-0-j} C_{n-0}^j \left(\dfrac{j}{n}\right)^{na} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j \left(\dfrac{j}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{n-k} \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{na} = \sum_{k=0}^{n \text{ ou } n-1\,!} (-1)^k C_n^k \left(1-\dfrac{k}{n}\right)^{na}$

$= p(Y=0)$!

Finalement : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $p(Y=k) = C_n^k \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-k}^j \left(\dfrac{j}{n}\right)^{na}$

Complément.. En fait tout cela est bien connu et se fait en quelques lignes. C'est un problème de surjections ; c'est encore un problème de rangements ! On range na clients chez n fournisseurs et on compte le nombre de fournisseurs "vides" !!

Le nombre de rangements est le nombre d'applications d'un ensemble de na éléments dans un ensemble de n éléments, soit : n^{na}

Pour faire un rangement contenant exactement k fournisseurs "vides"

1°.. On choisit ces k fournisseurs (C_n^k possibilités)

2°.. On définit une surjection de l'ensemble des na clients dans l'ensemble des $n-k$ autres fournisseurs (S_{na}^{n-k} possibilités).

Rappel.. Le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments est

$$S_p^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} j^p.$$

donc $S_{na}^{n-k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j (-1)^{n-k-j} j^{na}$

Finalement : $p(Y=k) = \dfrac{C_n^k S_{na}^{n-k}}{n^{na}} = C_n^k \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j (-1)^{n-k-j} \left(\dfrac{j}{n}\right)^{na}$.

Exercice.. Utiliser cette formule pour retrouver $E(Y)$ et $V(Y)$. Ce n'est pas si difficile que semblent le dire C.L + J.G. (... correction avec pas mal d'erreurs ...)

Partie II

1.. Etude de la suite $(p_n(0))$.

a) Soit $x \in]0,1[$. $f_0'(x) = -\frac{a}{x^2}\ln(1-x) + \frac{a}{x} \times \frac{-1}{1-x}$. $g_0(x) = -a\ln(1-x) - \frac{ax}{1-x}$

$g_0(x) = -a\left[\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right]$

Nous savons que : $\ln(1-x) > 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$ donc $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} > 0$.

$\forall u \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, \ln u > 1 - \frac{1}{u}$

Finalement : $g_0(x) < 0$.

b) Le signe de f_0' sur $]0,1[$ est celui de g_0 ; donc $\forall x \in]0,1[$, $f_0'(x) < 0$. f_0 est strictement décroissante.

$\frac{a}{x}\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{a}{x}(-x) = -a$; $\lim_{x\to 0} \frac{a}{x}\ln(1-x) = -a$ donc $\underline{\underline{\lim_{x\to 0} f_0(x) = 0}}$

c) $\forall x \in]0,1[$, $f_0'(x) = -\frac{a}{x^2}\left[\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}\right] = -\frac{a}{1-x}\left[\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}\right]$

$(1-x)\ln(1-x) + x = (1-x)\left[(-x) - \frac{(-x)^2}{2}\right] + x + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 + x + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Par conséquent $\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0} f_0'(x) = -\frac{a}{1} \times \frac{1}{2} = -\frac{a}{2}$.

Le théorème du prolongement de la dérivée prouve que f_0 est dérivable en 0 et que f_0' est continue en 0.

Nous savions déjà que f_0 est dérivable sur $]0,1[$ et que f_0' est continue sur $]0,1[$.

Finalement f_0 est de classe C^1 sur $[0,1[$

d) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $p_n(0) = (1-\frac{1}{n})^{na} = e^{na\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{\frac{a}{1/n}\ln(1-\frac{1}{n}) + a - a} = e^{f_0(\frac{1}{n}) - a}$

$\underline{\underline{p_n(0) = e^{f_0(\frac{1}{n})-a}}}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; $f_0(\frac{1}{n}) < f_0(\frac{1}{n+1})$; $e^{f_0(\frac{1}{n})-a} < e^{f_0(\frac{1}{n+1})-a}$; $p_n(0) < p_{n+1}(0)$.

$(p_n(0))_{n\geq 1}$ est donc croissante (strictement croissante)

$\lim_{n\to+\infty} p_n(0) = e^{0-a} = e^{-a}$.

2°.. Etude de la loi-limite du nombre de diodes par fournisseur.

a) $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, na]\!]$

a) $p_n(k) = C_{na}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k} = \frac{(na)}{n}\frac{(na-1)}{n}\cdots\frac{(na-k+1)}{n} \times \frac{1}{k!} \times e^{(na-k)\ln(1-\frac{1}{n})}$

$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{na}{n} \times \frac{na-1}{n} \times \cdots \times \frac{na-k+1}{n}\right)}_{k \text{ termes}} = a \times a \times \cdots \times a = a^k$. $\lim_{n\to+\infty} e^{(na-k)\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-a}$

$(na-k)\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{na-k}{n}$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} p_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$

La loi-limite du nombre de diodes par fournisseur quand n tend vers l'infini suit une loi de Poisson de paramètre a. Ceci n'est pas surprenant car chaque x_i suit une loi binomiale de paramètres an et $\frac{1}{n}$, et $an \times \frac{1}{n} = a$ (voir cours approximation)

b) Notons Z cette loi limite. $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(Z=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$.

$E(Z) = a$ et $V(Z) = a$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\frac{p(Z=k+1)}{p(Z=k)} = \frac{a^{k+1}e^{-a}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{a^k e^{-a}} = \frac{a}{k+1}$

$p(Z=k+1) > p(Z=k) \Leftrightarrow \frac{a}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < a-1$. $p(Z=k+1) < p(Z=k) \Leftrightarrow k > a-1$.

$p(Z=k+1) = p(Z=k) \Leftrightarrow k = a-1$. Il résulte de ceci que :

Soit $k \in \mathbb{N}$. $k < a-1 \Rightarrow p(Z=k) < p(Z=a-1) = p(Z=a)$ et $k > a \Rightarrow p(Z=k) < p(Z=a) = p(Z=a-1)$

Il y a donc deux modes : $a-1$ et a

3°.- Etude de la suite $(p_n(k))$ selon les valeurs de k.

a) $\ln(p_n(k)/p(k)) = \ln\left[C_{na}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k} \frac{k!}{a^k e^{-a}}\right] = \ln\left[\frac{na}{na}\frac{na-1}{na}\times\dots\times\frac{na-k+1}{na}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{na-k}e^a\right]$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \ln\frac{na-j}{na} + (na-k)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + a = \left(\frac{a}{1/n}-k\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + a + \sum_{j=0}^{k-1}\ln\left(1-\frac{j\,1/n}{a}\right)$$

Donc $\ln(p_n(k)/p(k)) = f_k(1/n)$.

b) Soit $x \in D_{f_k}$.

$x f_k(x) = (a-kx)\ln(1-x) + ax + \sum_{j=0}^{k-1} x\ln\left(1-\frac{jx}{a}\right)$

$x f_k(x) = (a-kx)\left(-x-\frac{x^2}{2}\right) + ax + \sum_{j=0}^{k-1} x\left(-\frac{jx}{a}\right) + o(x^2)$.

$x f_k(x) = kx^2 - a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{a}\times\frac{(k-1)k}{2}\times x^2 + o(x^2)$

$x f_k(x) = \left[k - \frac{a}{2} - \frac{k(k-1)}{2a}\right]x^2 + o(x^2)$. $= \frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a}x^2 + o(x^2)$

Donc $\frac{1}{n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Considérons le polynôme $-X^2+(2a+1)X-a^2$ et factorisons le.

$\Delta = (2a+1)^2-4a^2 = 1+4a$. Donc $-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X - \frac{-(2a+1)+\sqrt{1+4a}}{-2}\right)\left(X - \frac{-(2a+1)-\sqrt{1+4a}}{-2}\right)$

$$-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X-\left(a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4a}}{2}\right)\right)\left(X-\left(a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a}}{2}\right)\right)$$

$$-X^2+(2a+1)X-a^2 = -\left(X-\left(a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\tfrac{1}{4}}\right)\right)\left(X-\left(a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\tfrac{1}{4}}\right)\right) = -(X-b)(X-c)$$

Si $k \in]b,c[$ on a alors $-k^2+(2a+1)k-a^2>0$ et $\frac{1}{n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-k^2+(2a+1)k-a^2}{2a} \times \frac{1}{n^2}$

Par conséquent pour n assez grand : $f_k\left(\frac{1}{n}\right)>0$.

Si $k \notin [b,c]$: on a alors de la même manière $f_k\left(\frac{1}{n}\right)<0$. pour n assez grand

Rappelons que : $f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \ln \frac{p_n(k)}{p(k)}$.

Par conséquent si $k\in]b,c[$: $p_n(k)>p(k)$ pour n assez grand;

si $k\notin [b,c]$: $p_n(k)<p(k)$ pour n assez grand.

<u>c)</u> f_k est dérivable par produit. Soit $x\in \mathcal{D}_k$.

$$f_k'(x) = -\frac{a}{x^2}\ln(1-x) + \left(\frac{a}{x}-k\right)\frac{-1}{1-x} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{-j/a}{1-\frac{jx}{a}}$$

$$g_k(x) = x^2 f_k'(x) = -a\ln(1-x) + (kx^2-ax)\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^2}{1-\frac{jx}{a}}\times\frac{j}{a}$$

Donc $g_k(x) = -a\left[-x-\frac{x^2}{2}\right]+kx^2-ax(1+x)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{a}x^2+o(x^2)$; en effet :

- $\frac{1}{1-x} = 1+o(1)$ donc $kx^2\times\frac{1}{1-x} = kx^2+o(x^2)$.
- $\frac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$ donc $-ax\times\frac{1}{1-x} = -ax(1+x)+o(x^2)$ } OK ?
- $\frac{1}{1-\frac{jx}{a}} = 1+o(1)$ donc $\frac{x^2}{1-\frac{jx}{a}} = x^2+o(x^2)$

Finalement : $g_k(x) = ax+\frac{ax^2}{2}+kx^2-ax-ax^2-\frac{x^2}{a}\times\frac{(k-1)k}{2}+o(x^2)$

$$g_k(x) = \left[-\frac{1}{2a}k^2+\left(1+\frac{1}{2a}\right)k-\frac{a}{2}\right]x^2+o(x^2)$$

$$g_k(x) = -\frac{1}{2a}(k-b)(k-c)x^2+o(x^2).$$

Si $k \in]b,c[$: $x^2 f_k'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2a}(k-b)(k-c)x^2$ et $-\frac{1}{2a}(k-b)(k-c) > 0$

donc f_k' est strictement positive au voisinage de 0 ; f_k est strictement croissante au voisinage de 0.

Pour n assez grand : $f_k\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f_k\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\ln \frac{P_{n+1}(k)}{P(k)} \leq \ln \frac{P_n(k)}{P(k)}$ ou encore : $P_{n+1}(k) \leq P_n(k)$.

A partir d'un certain rang la suite $(P_n(k))$ est donc décroissante.

De même si $k \notin [b,c]$: $(P_n(k))$ est croissante à partir d'un certain rang.