ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

MATHEMATIQUES II

Toutes options

Vendredi 12 mai 1989 de 8 h à 12 h

Dans tout le problème, on désigne par a et n deux entiers naturels non nuls. L'objet de la partie I est l'étude d'un marché sur lequel na consommateurs achètent chacun un bien qu'ils peuvent se procurer (de façon équiprobable) auprès de n fournisseurs $F_1, \ldots, F_n$.
Dans la partie II, on étudie la loi asymptotique du nombre de clients par fournisseur lorsque n tend vers l'infini.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la fin de la question I.4° ne s'adresse qu'aux seuls candidats de l'option générale, le reste du problème étant commun aux candidats de toutes les options.

PARTIE I

On étudie dans cette partie les variables aléatoires suivantes:

1. X_i indique le nombre des consommateurs ayant acheté le bien chez le fournisseur F_i $(1 \leq i \leq n)$.
2. Y indique le nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client, et le quotient Y/n représente donc la proportion des fournisseurs n'ayant eu aucun client.

1°/ Etude des variables aléatoires X_i $(1 \leq i \leq n)$.

a) Déterminer la loi commune, l'espérance et la variance des variables aléatoires X_i en précisant l'expression de $P([X_i = k])$ pour tout entier naturel k.

b) Calculer le mode de X_i, c'est à dire le ou les entier(s) k tel(s) que $P([X_i = k])$ soit maximale. A cet effet, on pourra étudier le rapport suivant pour $0 < k \leq na$:

$$r_k = \frac{P([X_i = k+1])}{P([X_i = k])}$$

2°/ Coefficient de corrélation des variables aléatoires X_i.

On désigne par i et j des entiers distincts tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

a) Justifier l'identité $X_1 + X_2 + ... + X_n = na$ et, en l'élevant au carré, déterminer la valeur commune des espérances $E(X_iX_j)$ puis des covariances $Cov(X_i, X_j)$.

b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire des variables X_i et X_j. Interpréter le cas n = 2 en rappelant à quelle condition nécessaire et suffisante le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires est égal à 1 ou -1.

3°/ Espérance et variance de la variable aléatoire Y.

On désigne par B_i $(1 \leq i \leq n)$ la variable aléatoire prenant pour valeur 1 lorsque le fournisseur F_i n'a aucun client, et 0 sinon.

a) En exprimant Y à l'aide des variables aléatoires B_i, calculer l'espérance de Y.

b) Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires B_iB_j en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

c) Déterminer les limites de l'espérance et de la variance de Y/n quand n tend vers l'infini.

4°/ Loi de la variable aléatoire Y.

On désigne par k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.

a) Quelles valeurs la variable Y peut-elle prendre ? Calculer $P([Y = n-1])$.

b) Exprimer l'événement $[Y \neq 0]$ à l'aide des événements $[X_i = 0]$ pour $1 \leq i \leq n$.
En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré ou formule du crible, $P([Y = 0])$.

c) Donner dans un tableau une valeur approchée (avec deux décimales) de $P([Y = 0])$ lorsque $a = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2, 3$.

La fin de cette question 4° ne s'adresse qu'aux seuls candidats de l'option générale, et est indépendante de la suite du problème.

d) Donner, par la même méthode, la probabilité conditionnelle suivante:

$$P\left(\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right) / \left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right)\right).$$

e) Calculer la probabilité pour que les k fournisseurs $F_1, F_2, ..., F_k$ n'aient aucun client et, en remarquant que:

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right)\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right) P\left(\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right) / \left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right)\right).$$

donner la probabilité pour que $F_1, F_2, ..., F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, ..., F_n$ aient au moins un client.

f) En dénombrant alors le nombre des façons de choisir parmi les n fournisseurs les k d'entre eux qui resteront sans clients, en déduire $P([Y = k])$.

PARTIE II.

Dans cette partie, on désigne par k un entier naturel fixé et par $p_n(k)$ la probabilité (calculée en I.1°) pour qu'un fournisseur donné ait exactement k clients, et l'on se propose d'étudier la suite $n \to p_n(k)$.

1°/ Etude de la suite $(p_n(0))$.

On considère la fonction f_0 et la fonction auxiliaire g_0 définies sur]0, 1[par:

$$f_0(x) = \frac{a}{x}\ln(1-x) + a \qquad \text{et} \qquad g_0(x) = x^2 f'_0(x).$$

a) Donner l'expression de la fonction g_0 et étudier son signe.

b) Etudier les variations de $f_0(x)$ et déterminer sa limite L quand x tend vers 0.

c) On pose $f_0(0) = L$. Déterminer la limite de $f_0'(x)$ quand x tend vers 0, montrer que f_0 est de classe C1 sur [0, 1[et donner sa représentation graphique.

d) Exprimer $p_n(0)$ en fonction de $f_0(1/n)$ et en déduire la limite et le sens de variation de la suite $(p_n(0))$.

2°/ Etude de la loi-limite du nombre de clients par fournisseur.

a) Déterminer la limite p(k) de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini et reconnaitre la loi-limite du nombre de clients par fournisseur quand n tend vers l'infini.

Ce résultat était-il prévisible?

b) Donner l'espérance, la variance et calculer le mode de cette loi-limite.

3°/ Etude de la suite $(p_n(k))$ selon les valeurs de k.

On considère la fonction f_k et la fonction auxiliaire g_k définies par:

$$f_k(x) = \left(\frac{a}{x} - k\right)\ln(1-x) + a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad g_k(x) = x^2 f'_k(x)$$

l'entier k étant supposé non nul et distinct des réels b et c définis par:

$$b = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad ; \quad c = a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

a) Comparer $\ln[p_n(k) / p(k)]$ et $f_k(1/n)$.

b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \to x f_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire, selon la position de k par rapport aux réels b et c, le signe de $f_k(1/n)$ et la position de $p_n(k)$ par rapport à p(k) quand n tend vers l'infini.

c) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \to g_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que les suites $(f_k(1/n))$ et $(p_k(n))$ sont monotones à partir d'un certain rang et préciser leur sens de variation selon la position de k par rapport aux réels b et c.

****