ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

MATHEMATIQUES I

Option générale

Jeudi 11 mai 1989 de 14 h à 18 h

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle (notée aussi exp) par des fonctions rationnelles.

I. ETUDE D'UNE SUITE DE POLYNOMES.

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur IR telles que, pour tout nombre réel x:

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0$$

1°) Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \exp(x/2)$ appartient à E_0.

2°) Etant donné un élément f_n de E_n, on note f_{n+1} la fonction définie sur IR par:

$$(1) \qquad f_{n+1}(x) = 2\Big((2n+1)f_n(x) - xf'_n(x)\Big)$$

Montrer que:

a) $f'_{n+1}(x) = -\frac{x}{2} f_n(x)$.

b) $f_{n+1} \in E_{n+1}$.

3°) On définit à partir de la fonction f_0 donnée au 1° et de la relation (1) une suite de fonctions (f_n) telle que, pour tout entier naturel n, f_n appartienne à E_n.

a) Expliciter f_1.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x:

$$(2) \qquad f_{n+1}(x) = 2(2n+1)f_n(x) + x^2 f_{n-1}(x)$$

4°) Pour tout entier naturel n, on note P_n le polynôme défini pour tout nombre réel x par:

$$P_n(x) = f_n(x).e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Expliciter P_0 et P_1.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x:

$$(3) \qquad P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x)$$

En déduire pour tout entier naturel n:
- que $P_n(x)$ est strictement positif pour $x < 2$.
- que P_n est un polynôme à coefficients entiers dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
- la valeur de $P_n(0)$.

II. ETUDE D'UNE SUITE DE FRACTIONS RATIONNELLES.

Dans la suite du problème, on désigne par n un entier naturel et l'on pose pour tout nombre réel x non racine de P_n:

$$u_n(x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)}$$

En particulier, u_n est au moins définie sur $]-\infty, 2[$.

1°) <u>Etude numérique d'un exemple.</u>

a) Ecrire un algorithme de calcul des n premiers termes de la suite $(P_k(x))$ pour une valeur donnée du réel x.

b) Utiliser cet algorithme pour calculer pour $k \leq 8$ les valeurs exactes de $P_k(1)$, $P_k(-1)$, et des valeurs approchées (à la précision fournie par la calculatrice) de $u_k(1)$ (les résultats obtenus figureront dans un tableau).

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n(1))$?

2°) <u>Etude d'une fonction auxiliaire.</u>

On désigne par g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g_n(x) = (-1)^n (f_n(x) - f_n(-x))$$

a) Etablir que, pour x non racine de P_n:

$$(4) \qquad u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{2}} g_n(x)}{P_n(x)}$$

b) Montrer que g_n est impaire et prouver que, pour tout nombre réel x:

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t g_n(t)\, dt$$

c) En déduire, par récurrence sur n, que, pour tout réel positif x:

$$0 \leq g_n(x) \leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{n!}$$

3°) <u>Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.</u>

a) A l'aide de la relation (3), montrer, par récurrence sur n, que, pour $x \leq 0$:

$$P_n(x) \geq P_n(0).$$

b) Déduire des résultats précédents que, pour tout réel $x \leq 0$:

$$\left|u_n(x) - e^x\right| \leq \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

c) En déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.

4°) <u>Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $0 \leq x < 2$.</u>
Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $0 \leq x < 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

Dans la suite de cette partie, on étudie la suite $(u_n(x))$ pour x supérieur à 2.

5°) <u>Variations de f_n.</u>
a) Prouver, d'abord pour $x \leq 0$, puis (en utilisant g_n) pour $x > 0$ que, si n est pair, alors $f_n(x) > 0$.
b) Utiliser l'expression de f'_{n+1} en fonction de f_n obtenue en I.2° pour étudier les variations de f_n pour $n \geq 1$ (on commencera par l'étude de f_{2p+1}).

6°) <u>Etude des racines de P_n.</u>
a) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution si n est pair, et en possède une et une seule, notée a_p, si $n = 2p + 1$.
b) Montrer, en utilisant (2) et les variations de f_{2p+1}, que la suite (a_p) est strictement croissante.
c) Montrer que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$ (on pourra raisonner par l'absurde en considérant la suite $(u_{2p+1}(-L))$ avec $L = \lim a_p$).

7°) <u>Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \geq 2$.</u>
a) Montrer que, pour tout réel $x \geq 2$, existe un entier p_x tel que, pour $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.

On n'étudie désormais la suite $(u_n(x))$ que pour $n \geq 2p_x$.

b) Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $x \geq 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

III. VITESSE DE CONVERGENCE DE LA SUITE $(u_n(x))$.

1°) <u>Equivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.</u>
a) On suppose que n est supérieur ou égal à 1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f_n sur $[x, 0]$, établir que, pour $x \leq 0$:

$$0 \leq P_n(0) - P_n(x).e^{\frac{x}{2}} \leq \frac{x^2}{2}.P_{n-1}(0).$$

b) En déduire, que pour tout x fixé, $P_n(x)$ équivaut lorsque n tend vers l'infini à:

$$P_n(0).e^{-\frac{x}{2}}$$

(on commencera par le cas $x \leq 0$ et on l'étendra au cas $x > 0$ à l'aide de $u_n(x)$).

2°) <u>Majoration de $|u_n(x) - \exp(x)|$.</u>

a) Déduire de la relation (4) que, pour tout réel x:

$$\left|u_n(x) - e^x\right| \leq \left|u_{n+1}(x) - u_n(x)\right|$$

b) Déduire de la relation (3) que, pour tout réel x:

$$P_{n+1}(-x).P_n(x) - P_{n+1}(x).P_n(-x) = 2(-1)^n.x^{2n+1}$$

c) En déduire enfin que:

$$\left|u_n(x) - e^x\right| \leq \frac{2|x|^{2n+1}}{P_n(x).P_{n+1}(x)}$$

d) Donner un majorant de l'erreur commise au II.1° en prenant $u_7(1)$ comme valeur approchée du nombre e.

3°) <u>Equivalent de $u_n(x) - \exp(x)$.</u>

Déduire des résultats précédents, pour tout réel non nul x fixé:

a) un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0.$

c) que $u_n(x) - \exp(x)$ équivaut quand n tend vers l'infini à:

$$(-1)^{n+1} e^{x-1}\left(\frac{ex}{4n}\right)^{2n+1} \qquad \text{(on rappelle: } \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1\text{)}.$$

****