PRELIMINAIRES

Q1.. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[n,n+1]$, $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{n}$

Intégrons. On obtient : $\frac{(n+1)-n}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{(n+1)-n}{n}$

Soit : $\underline{\underline{\frac{1}{n+1}\leq\ln(n+1)-\ln n\leq\frac{1}{n}}}$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)\leq 0$; $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-(\ln(n+1)-\ln n)\geq 0$; $(v_n)_{n\geq1}$ est croissante.

de plus $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}(-1/n)=0$

$((v_n)_{n\geq1},(u_n)_{n\geq1})$ est un couple de suites adjacentes

Q2.. Les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont donc convergentes ~~et ont~~ même limite que nous notons γ.

a) $(v_n)_{n\geq1}$ est croissante, $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante et $\gamma=\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n$

On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\leq\gamma\leq u_n$

Donc $v_n-\frac{u_n+v_n}{2}\leq\gamma-\frac{u_n+v_n}{2}\leq u_n-\frac{u_n+v_n}{2}$

Soit : $\frac{v_n-u_n}{2}\leq\gamma-m_n\leq\frac{u_n-v_n}{2}$ ou $-\frac{1}{2n}\leq\gamma-m_n\leq\frac{1}{2n}$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |\gamma-m_n|\leq\frac{1}{2n}}}$. c'est nous ! mais attendons la suite.

b) Notons que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $m_{k+1}-m_k=\frac{1}{2}\left(2u_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(2u_k-\frac{1}{k}\right)$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $m_{k+1}-m_k=u_{k+1}-u_k-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}-\ln(k+1)+\ln k$.

Ou encore : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $m_{k+1}-m_k=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2k}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Ceci signifie que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geq2\Rightarrow m_k-m_{k-1}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k-1)}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Soit : $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geq2\Rightarrow m_k=m_{k-1}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k-1)}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$... ceci pour une version 1

Avec une version 2 on peut aussi considérer que : $m_n=u_n-\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n+\frac{1}{2n}$!

VERSION 1 ? → N : 0.5 → A : 1 → K : Lbl 0 : ISZ K : A + (K⁻¹ + (K−1)⁻¹) ÷ 2 + ln (1 − K⁻¹) → A : K < N ⇒ Goto 0 : A ◢

VERSION 2 ? → N : 1 → A : 1 → K : Lbl 0 : ISZ K : A + K⁻¹ → A : K < (N−1) ⇒ Goto 0 : A + 0.5N⁻¹ − ln N → A ◢

Pour n = 5 : $m_n\simeq 0{,}573\ 835\ 860\ 3$; n = 50 : $\simeq 0{,}577\ 186\ 5\ldots$; n = 500, $m_n\simeq 0{,}577\ 215\ 331\ 6$

n = 5000, $m_n\simeq 0{,}577\ 215\ 6\ldots5$. $\gamma\simeq 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 512\ 090\ldots$

Q3.. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\,dt = -\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} + (2k+1)\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2} + k(k+1)\int_k^{k+1} -\frac{dt}{t^3}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\,dt = -\ln(k+1) + \ln k + (2k+1)\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] + \frac{k(k+1)}{2}\left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}\right]$$

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\,dt = -\ln\frac{k+1}{k} + \frac{1}{k}\left[(2k+1) - \frac{k+1}{2}\right] + \frac{1}{k+1}\left[-(2k+1) + \frac{k}{2}\right]$$

$$= -\ln\frac{k+1}{k} + \frac{3k+1}{2k} - \frac{3k+2}{2(k+1)} = -\ln\frac{k+1}{k} + 3/2 + \frac{1}{2k} - 3/2 + \frac{1}{2(k+1)} = \underbrace{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \ln\frac{k+1}{k}}_{m_{k+1}-m_k \ (Q2b)}$$

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3}\,dt = m_{k+1} - m_k$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall t \in [k,k+1],\ 0 \leq \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} \leq \frac{1}{t^3}\max_{t\in[k,k+1]} (t-k)(k+1-t) = \frac{1}{t^3}\max_{t\in[k,k+1]}\left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{2k+1}{2}\right)^2\right]$$

donc $\forall t \in [k,k+1],\ 0 \leq \dfrac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} \leq \dfrac{1}{t^3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4t^3}$

En intégrant il vient : $0 \leq m_{k+1} - m_k \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{4t^3}$.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

$$0 \leq m_{n+p} - m_n = \sum_{k=n}^{n+p-1}(m_{k+1} - m_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{4t^3}$$

$$0 \leq m_{n+p} - m_n \leq \int_n^{n+p}\frac{dt}{4t^3} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+p)^2}\right]$$

A la limite : $0 \leq \gamma - m_n \leq \dfrac{1}{8n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\dfrac{1}{8 \times 50^2} = 5\times10^{-5}$. m_{50} est donc une valeur approchée par défaut à 5×10^{-5} près.

Donc : $m_{50} \leq \gamma \leq m_{50} + 5\times10^{-5}$

On peut estimer que (!) :

$0{,}57718 \leq \gamma \leq 0{,}57724$ ($m_{50} \simeq 0{,}5771823329$ et $m_{50} + 5\times10^{-5} \simeq 0{,}5772323329$

```
PROGRAM CRAC_CRAC;
VAR : K,N: INTEGER; A: REAL;
BEGIN
 WRITE ('DONNEZ LA VALEUR DE N'); READLN(N);
V1   A := 0.5;
     FOR K:= 2 TO N DO
     A:= A + (1/K + 1/(K-1)) / 2 + LN(1-1/K);
 WRITE ('LA VALEUR DE m(',N,') EST: ', A)
 END.

V2   A:=1;
     FOR K:= 2 TO N-1 DO   A:= A + 1/K ;
     A:= A + LN(N) + 0.5/N;
```

PARTIE I

Q1.– a) $\mathbb{N}_n = [\![1,n]\!]$ a n éléments, le nombre de parties de p éléments de $[\![1,n]\!]$ est donc $\underline{C_n^p}$ (rappelons que : $1 < p \leq n$).

b) Il s'agit de compter les p-listes sans répétitions d'éléments d'une partie A de $[\![1,n]\!]$ ayant p éléments. Il y en a A_p^p, soit $\underline{p!}$.

c) On compte les p-listes sans répétitions d'éléments de $[\![1,n]\!]$; il y en a $\underline{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$.

d) Le dernier élément d'une telle suite est déterminé c'est max A ; constituer une telle suite revient donc à constituer une suite de p-1 éléments avec les p-1 éléments de A-{max A} ; il y a donc $\underline{(p-1)!}$ possibilités.

e) Pour constituer une telle suite :

- on choisit une partie A de $[\![1,n]\!]$ ayant p éléments, il y a C_n^p manières de le faire.
- on constitue avec les p éléments de A une suite de p éléments dont le dernier est max A ; il y a $(p-1)!$ possibilités de le faire.

Par conséquent il y a $\underline{(p-1)!\,C_n^p}$ suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p^{ième} position.

f) Pour $1 < p \leq n$, c) et e) donnent :

$$p(Z_p > X_{p-1}) = \frac{(p-1)!\,C_n^p}{A_n^p} = \frac{(p-1)!\,C_n^p}{p!\,C_n^p} = \frac{1}{p}.$$

$$\underline{p(Z_p > X_{p-1}) = \frac{1}{p}}. \quad \text{(surpris ?!)}$$

Q2.– $1 < p \leq n$. $E(B_p) = p(B_p = 1) = p(Z_p > X_{p-1}) = \frac{1}{p}$.

$$\underline{E(B_p) = \frac{1}{p}}.$$

$$E(B_2 + B_3 + \dots + B_n) = E\left(\sum_{p=2}^{n} B_p\right) = \sum_{p=2}^{n} E(B_p) = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}$$

$$\underline{E(B_2 + B_3 + \dots + B_n) = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}}.$$

$B_2 + B_3 + \dots + B_n$ compte le nombre fois où l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé lorsque p décrit $[\![2,n]\!]$. $E(B_2 + \dots + B_n)$ en est le nombre moyen.

Q3. a) Lorsque $Z[1]=1, Z[2]=2, \ldots, Z[n]=n$, X prend successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$

Lorsque $Z[1]=n, Z[2]=n-1, \ldots, Z[n]=1$, X ne prend qu'une seule valeur : n.

b) Montrons par récurrence que pour tout $p \in [\![2,n]\!]$ à la fin du "passage p" dans la boucle, X contient $\max(Z[1], Z[2], \ldots, Z[p])$.

Ceci montrera alors qu'à la fin de l'algorithme X contient le plus grand élément de la liste $Z[1], Z[2], \ldots, Z[n]$.

→ le 1er passage dans la boucle ($p=2$) effectue le travail suivant

* compare $Z[2]$ à $X = Z[1]$

si $Z[2] > X = Z[1]$ alors X reçoit la valeur de $Z[2]$ c'est à dire $\max(Z[1], Z[2])$.

si $Z[2] \leq X$ le passage est terminé et X garde $Z[1]$ c'est à dire $\max(Z[1], Z[2])$.

La propriété est donc vraie pour $p=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in [\![2, n-1]\!]$ et montrons la pour $p+1$.

X contient $\max(Z[1], \ldots, Z[p])$.

Le passage $p+1$ compare $Z[p+1]$ et X

si $Z[p+1] > X$ alors X reçoit la valeur de $Z[p+1]$ qui supérieur à $\max(Z[1], \ldots, Z[p])$ et qui est donc $\max(Z[1], \ldots, Z[p], Z[p+1])$.

si $Z[p+1] \leq X = \max(Z[1], \ldots, Z[p])$, X garde sa valeur qui est aussi bien $\max(Z[1], \ldots, Z[p])$ que $\max(Z[1], \ldots, Z[p], Z[p+1])$ car $Z[p+1] \leq \max(Z[1], \ldots, Z[p])$.

Dans les deux cas à la fin de ce passage X contient $\max(Z[1], \ldots, Z[p], Z[p+1])$.

Ceci achève la récurrence.

<u>La valeur contenue dans la variable X à l'issue de l'algorithme est le plus grand élément de la liste $Z[1], \ldots, Z[n]$ soit n.</u>

<u>Le nombre de comparaisons > effectuées est $n-1$</u> (il y en a une à chaque passage dans la boucle)

Le nombre minimal d'affectations est 1 (seule l'affectation $X := Z[1]$ est effectuée dans le 2ième exemple de Q3 a))

Le nombre maximal d'affectations est n (la 1ère + une à chaque passage dans la boucle, c'est le cas dans le 1er exemple de Q3 a)).

c) Rappelons que le passage p dans la boucle voit s'effectuer une affectation si et seulement si $Z[p] > X$; c'est à dire si et seulement si $Z[p] > \max(Z[1], \dots, Z[p-1])$; c'est à dire encore si et seulement si $Z_p > X_{p-1}$.

Le nombre d'affectations effectuées au cours de l'algorithme est donc compté par : $1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n$

Par conséquent : $E_n = E(1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)$

$$E_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} E(B_p)$$

$$E_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = u_n + \ln n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = u_n + \ln n$

Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = \gamma$, en posant $\varepsilon_n = u_n - \gamma$ on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

PARTIE II

Q1.. $p(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}) = \dfrac{\alpha_p}{A_n^p}$ où α_p est le nombre de suites $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telles que :

$\max(\{a_1, a_2, \dots, a_p\} - \{\max\{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\}\}) < a_p < \max(\{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\})$

(ceci signifie que a_p est plus petit que le plus grand élément de $\{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\}$ et plus grand que le "2ème" plus grand élément de $\{a_1, a_2, \dots, a_{p-1}\}$ ou encore que $a_p = \max(\{a_1, a_2, \dots, a_p\} - \{\max\{a_1, a_2, \dots, a_p\}\})$).

Pour construire une telle suite

1°.. Je choisis p éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Il y a C_n^p possibilités.
Soit A la partie constituée par ces éléments.

2°.. Je pose $a_p = \max(A - \{\max A\})$.

3°.. Il reste plus qu'à choisir $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ parmi les $p-1$ éléments de $A - \{a_p\}$; il y a $(p-1)!$ possibilités.

Finalement $\alpha_p = C_n^p (p-1)! = \frac{1}{p} A_n^p$

Donc $p(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}) = \dfrac{1}{p}$.

Q2.. D'après Q1, $p(C_p = 1) = p(Y_{p-1} < Z_p < Y_{p-1}) = \frac{1}{p}$ et $p(C_p = 2) = \frac{1}{p}$

Donc $E(C_p) = 1 \times \frac{1}{p} + 2 \times \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$; $E(C_p) = \dfrac{3}{p}$.

Notons que : $p(C_p = 0) = 1 - \frac{2}{p}$.

Q3.. a) 1ᵉʳ cas.. $Z[1]=1, Z[2]=2, \dots, Z[n]=n$

Y prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, n-1$

X prend successivement les valeurs $2, 3, \dots, n$.

2ème cas.. $Z[1]=n$, $Z[2]=n-1, \dots, Z[n]=1$

X ne prend que la valeur n et Y que la valeur $n-1$.

b) Une récurrence analogue à celle de I Q3 b montre que ; à la fin de l'algorithme X contient $\alpha = \max\{Z[1], Z[2], \dots, Z[n]\}$ et

Y contient $\beta = \max(\{Z[1], \dots, Z[n]\} - \{\alpha\})$

* Le cas $Z[1]=1, Z[2]=2, \dots, Z[n]=n$ produit

- la comparaison initiale
- deux comparaisons à chaque passage dans la boucle (le test $Z[p]>Y$ est toujours positif)

Il y a donc $1+2(n-2)=2n-3$ comparaisons et il ne peut y en avoir moins ; c'est le nombre maximal de comparaisons.

Dans ce cas encore il y a : les deux affectations initiales

\+ deux affectations à chaque passage dans la boucle ; il ne peut y en avoir davantage.

Le nombre maximum d'affectations est : $2+2(\ \cdot 2) = 2n-2$.

* Le cas $Z[1]=n, Z[2]=n-1, \dots, Z[n]=1$ produit

- la comparaison initiale
- une comparaison à chaque passage dans la boucle (le test $Z[p]>Y$ est toujours négatif)

Il y a donc dans ce cas $1+n-2=n-1$ comparaisons et il ne peut y en avoir moins.

Dans ce cas encore il y a : les deux affectations initiales et c'est tout ; il ne peut y en avoir moins.

Résumons

	Maxi	Mini
Comparaisons	$2n-3$	$n-1$
Affectations	$2n-2$	2

c) Remarquons que le passage "p" dans la boucle voit s'effectuer :

(1) → si $Z[p] > Y$ est négatif : 1 comparaison et 0 affectation.

(2) → si $Z[p] > Y$ est positif et $Z[p] < X$ est positif : 2 comparaisons et 1 affectation

(3) → si $Z[p] > Y$ est positif et $Z[p]$ X est négatif : 2 comparaisons et 2 affectations

(1) correspond à l'événement : $Z_p < Y_{p-1}$ ou $C_p = 0$

(2) correspond à l'événement : $Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}$ ou $C_p = 1$ ((2) ou (3)) correspond à $Z_p > Y_{p-1}$

(3) correspond à l'événement : $Z_p > X_{p-1}$ ou $C_p = 2$

Le nombre d'affectations est donc $2 + \sum_{p=3}^{n} C_p$

Le nombre de comparaisons est donc $1 + \sum_{p=3}^{n} D_p$ où D_p est la variable aléatoire qui vaut 1 si $Z_p < Y_{p-1}$ et 2 si $Z_p > Y_{p-1}$.

$$E''_n = 2 + \sum_{p=3}^{n} E(C_p) = 2 + \sum_{p=3}^{n} \frac{3}{p} = 2 + 3\left(u_n + \ln n - 1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} + 3u_n + 3\ln n$$

Donc, en posant $\varepsilon''_n = 3(u_n - \gamma)$ on obtient $E''_n = 3\ln n - \frac{5}{2} + 3\gamma + \varepsilon''_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon''_n = 0$

$E'_n = 1 + \sum_{p=3}^{n} E(D_p)$. $\quad p(D_p = 1) = p(Z_p < Y_{p-1}) = p(C_p = 0) = 1 - \frac{2}{p}$.

$p(D_p = 2) = p(C_p = 1) + p(C_p = 2) = \frac{2}{p}$.

$$E'_n = 1 + \sum_{p=3}^{n} \left[\left(1 - \frac{2}{p}\right) + 2 \times \frac{2}{p} \right] = 1 + \sum_{p=3}^{n} 1 + 2 \sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p} = n - 1 + 2\left(u_n + \ln n - 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$E'_n = 2\ln n + n - 4 + 2u_n$. Posons $\varepsilon'_n = 2u_n - 2\gamma$

$E'_n = n + 2\ln n + (2\gamma - 4) + \varepsilon'_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon'_n = 0$.