PRELIMINAIRE

a) $\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}\\ i+j=k}} x_i y_j = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}\\ i+j\le n}} x_i y_j$

Or $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i+j\le n\} \subset \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i\le n, j\le n\} \subset \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i+j\le 2n\}$

donc $\sum_{k=0}^{n} z_k \le \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i\le n \text{ et } j\le n}} x_i y_j = \sum_{i=0}^{n} x_i \times \sum_{j=0}^{n} y_j \le \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j\le 2n}} x_i y_j = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=k}} x_i y_j = \sum_{k=0}^{2n} z_k$

donc $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} z_k \le \sum_{i=0}^{n} x_i \times \sum_{j=0}^{n} x_j \le \sum_{k=0}^{2n} z_k}}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_n\geq 0$ donc la série de terme général z_n est convergente dès que la suite $(\sum_{k=0}^{n} z_k)_{n\geq 0}$ est majorée. Ceci est clair, en effet :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} z_k \le (\sum_{i=0}^{n} x_i)(\sum_{j=0}^{n} x_j) \le (\sum_{i=0}^{+\infty} x_i)(\sum_{j=0}^{+\infty} y_j)$ (les séries "$\sum x_n$ et $\sum y_n$" sont convergentes et à termes positifs). Donc $(\sum_{k=0}^{n} z_k)_{n\geq 0}$ est majorée par la constante $(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i)(\sum_{j=0}^{+\infty} y_j) = XY$.

Nous pouvons maintenant passer à la limite sur l'inégalité du a), nous obtenons alors :

$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k \le (\sum_{i=0}^{+\infty} x_i)(\sum_{j=0}^{+\infty} y_j) \le \sum_{k=0}^{+\infty} z_k$; c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} y_j$. Donc $Z = XY$

__Remarque__.. ceci vaut encore en supposant les séries "$\sum x_n$ et $\sum y_n$" absolument convergentes.

PARTIE I ..

C'est Wallis. Notons que : $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt \underset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_{\pi/2}^{0} \sin^n u\,(-du) = \int_0^{\pi/2} \sin^n u\,du$.

(Q1).. a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le \cos t\le 1$, $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\le \cos^{n+1} t\le \cos^n t$, par conséquent

$0\le J_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t\,dt \le \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = J_n$

la suite $(J_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\underline{n\geq 2}$.

$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \underset{u'}{\cos t}\ \underset{v}{\cos^{n-1} t}\,dt = [\sin t \cos^{n-1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\,(n-1)(-\sin t)(\cos^{n-2} t)\,dt$

$J_n = 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t\,dt = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^{n-2} t\,dt = \dots = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$

donc : $[(n-1)+1]J_n = (n-1)J_{n-2}$

$$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}.}}$$

c) $J_0=\int_0^{\pi/2}\cos^0 t\,dt=\pi/2$ et $J_1=\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{\pi/2}=1$. $\underline{\underline{J_0=\frac{\pi}{2}}}$ et $\underline{\underline{J_1=1}}$.

La formule du a) ($\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2 \Rightarrow J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$) donne $J_2=\frac{1}{2}J_0$, $J_4=\frac{3}{4}J_2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}J_0$

$J_6=\frac{5}{6}J_4=\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}J_0=\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}$. Il est tentant de montrer par récurrence que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $J_{2n}=\frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times2}\times\frac{\pi}{2}$, ou que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $J_{2n}=\frac{1}{2n+1}u_n\times\frac{\pi}{2}$

Montrons en fait que : $\forall n\in\underline{\underline{\mathbb{N}}}$, $J_{2n}=\frac{1}{2n+1}u_n\times\frac{\pi}{2}$

→ $J_{2\times0}=J_0=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2\times0+1}u_0\times\frac{\pi}{2}=1\times1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. L'égalité est vraie pour $n=0$.

→ Supposons l'   vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$J_{2(n+1)}=J_{2n+2}=\frac{2n+2-1}{2n+2}J_{2n}\underset{\text{H.R.}}{=}\frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{1}{2n+1}\times u_n\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+2}u_n\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+3}\frac{2n+3}{2n+2}u_n\times\frac{\pi}{2}$

Or $\frac{2n+3}{2n+2}u_n=u_{n+1}$ donc $J_{2(n+1)}=\frac{1}{2(n+1)+1}u_{n+1}\times\frac{\pi}{2}$ ... cqfd.

Donc $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ J_{2n}=\frac{1}{2n+1}u_n\times\frac{\pi}{2}}}$. On montre de la même manière que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\underline{\underline{J_{2n+1}=\frac{1}{u_n}}}$.

Q2) a.. et b Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}u_n\times\frac{\pi}{2}\frac{1}{1/u_n}=\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}$ et $\frac{2n+1}{2n}=\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}}$!

La suite $(J_n)_{n\geq0}$ est décroissante donc : $J_{2n-1}\geq J_{2n}\geq J_{2n+1}$; comme $J_{2n+1}\neq0$:

$1\leq\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}\leq\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}}$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1\leq\frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1}\leq\frac{2n+1}{2n}$.

Ceci prouve en particulier que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1}=1$ donc $u_n^2\sim\frac{2}{\pi}(2n+1)\sim\frac{4n}{\pi}$

Par conséquent : $u_n\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

En particulier : $J_{2n}\sim\frac{1}{2n+1}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2}\sim\frac{1}{2n}\sqrt{n}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2\times2n}}$

$J_{2n+1}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\times2n}}\overset{!}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2n+1)}}=\sqrt{\frac{\pi}{2\times(2n+1)}}$. Donc $J_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$!

Finalement : $\underline{\underline{\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}}$ résultat très classique.

En particulier : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=0$.

Notons encore que : $u_n=\frac{3\times5\times\cdots(2n+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}=\frac{(2n+1)!}{[2\times4\times\cdots\times2n]^2}=\frac{(2n+1)!}{[2^n n!]^2}$; donc $\frac{(2n+1)!}{[2^n n!]^2}\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$

Dans une vie antérieure nous avons vu que : $n! \sim L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ avec $L>0$ ... et on nous avait promis $L=\sqrt{2\pi}$. Voyons !

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim L\sqrt{2n+1}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\times\frac{1}{2^{2n}}\times\frac{1}{L^2\times n}\times\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}\ ;\ \text{donc}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{1}{L}\frac{\sqrt{2n+1}}{n}\frac{2n+1}{e}\frac{(2n+1)^{2n}}{2^{2n}\times n^{2n}} \sim \frac{1}{L}\frac{\sqrt{2n}}{n}\times 2n\times\frac{1}{e}\times\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2n\ln(1+\frac{1}{2n})} = e$ $\quad\left(2n\ln(1+\frac{1}{2n})\sim 2n\times\frac{1}{2n}=1\right)$

donc $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{1}{L}\sqrt{2n}\times 2\times\frac{1}{e}\times e = \frac{2\sqrt{2n}}{L}$; en simplifiant : $L\sim\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi}=\sqrt{2\pi}$!

$L\sim\sqrt{2\pi}$ (ici ! ici ! ... suites constantes équivalentes) donc $L=\sqrt{2\pi}$ ← à méditer.

Finalement $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Formule de Stirling.

On peut encore mieux faire : $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$!

Revenons sur $\frac{(2n+1)!}{[2^n n!]^2}\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$; $\frac{1}{2^{2n}}\frac{2n!}{(n!)^2}\sim\frac{1}{2n+1}\times\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\sim\frac{1}{2n}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

Par conséquent : $\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ $\left(\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n\right.$ est la proba d'obtenir autant de piles que de faces lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce honnête.

$n\in\mathbb{N}^*$. Notons la deuxième assertion. Nous devons prouver que : $0\leq u_n-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}\leq\frac{u_n}{2n+1}$.

Soit donc à prouver que : $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\leq u_n$ et $u_n\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\leq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$

Il suffit encore de montrer que : $\frac{4n}{\pi}\leq u_n^2$ et $u_n^2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\leq\frac{4n}{\pi}$

ou encore : $1\leq\frac{\pi}{4n}u_n^2$ et $\frac{\pi}{2}u_n^2\frac{1}{2n+1}\leq\frac{2n(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{2n+1}{2n}$

La deuxième inégalité est la deuxième inégalité de (1) ; la seconde s'obtient en utilisant la 1ère de (1), en effet : $1\leq\frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n+1}\leq\frac{\pi}{2}\frac{u_n^2}{2n}$ ... cqfd !

(93) $x\in[0,1[$. $t\mapsto\frac{1}{1-x\cos^2 t}$ est définie et continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\left(\frac{1}{x}>1\text{ si }x\in\left]0,1\right[\dots\right)$

$$\int_0^\alpha\frac{dt}{1-x\cos^2 t}\underset{\tan t=\sqrt{1-x}\tan u}{=}\int_0^\beta\frac{1}{1-x\frac{1}{1+(\sqrt{1-x}\tan u)^2}}\times\frac{\sqrt{1-x}(1+\tan^2 u)}{1+(1-x)\tan^2 u}du=\int_0^\beta\frac{\sqrt{1-x}(1+\tan^2 u)}{1+(1-x)\tan^2 u-x}du$$

$t=\operatorname{Arctan}(\sqrt{1-x}\tan u)$; $u=\operatorname{Arctan}(\tan t/\sqrt{1-x})$; $\beta=\operatorname{Arctan}(\tan\alpha/\sqrt{1-x})$

$(1+\tan^2 t)dt=\sqrt{1-x}(1+\tan^2 u)du$

$$\int_0^{\alpha} \frac{dt}{1-x\cos^2 t} = \int_0^{\beta} \frac{\sqrt{1-x}\,(1+\tan^2 u)}{(1-x)(1+\tan^2 u)}\,du = \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,du = \frac{\beta}{\sqrt{1-x}}$$

$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \Big[\underbrace{\mathrm{Arctan}(\tan\alpha/\sqrt{1-x})}_{\beta}\Big] = \frac{\pi}{2}$; par conséquent : $\underline{\underline{I(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}}}$.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0,1[$.

$$\sum_{k=0}^{n} J_{2k} x^k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n} (\cos^2 t\, x)^k\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-(x\cos^2 t)^{n+1}}{1-(x\cos^2 t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2 t}\,dt - x^{n+1}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2} t}{1-x\cos^2 t}\,dt$$

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x\cos^2 t \neq 1$ ...cqfd.

b) $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$.

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos^2 t \leq 1$; $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $-x\cos^2 t \geq -x$; $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $1-x\cos^2 t \geq 1-x > 0$

donc $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{\cos^{2n+2}(t)}{1-x\cos^2 t} \leq \frac{\cos^{2n+2}(t)}{1-x}$

En intégrant : $\underline{0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2}(t)}{1-x\cos^2 t}\,dt \leq \frac{1}{1-x} J_{2n+2}}$.

c) $u_n \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$: $J_{2n+2} = \frac{1}{2n+3} u_{n+1} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{2n+3} \times \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4}\,n}$

donc $\lim_{n\to+\infty} J_{2n+2} = 0$, ceci donne : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2}(t)}{1-x\cos^2 t}\,dt = 0$ (b)

Il vient alors en passant à la limite dans a), la convergence de la série de terme général $J_{2k} x^k$ et l'égalité : $\sum_{k=0}^{+\infty} J_{2k} x^k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2 t}\,dt = I(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$

soit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n} x^n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{2n} x^n = \frac{1}{2n+1} u_n x \frac{\pi}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n+1} u_n x^n = \frac{2}{\pi} J_{2n} x^n$.

La série de terme général $J_{2n} x^n$ étant convergente il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{2n+1} u_n x^n$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} J_{2n} x^n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1} x^n$ (développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$).

Q5 a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}$

→ c'est clair pour $n=0$ $(u_0 = 1)$.

→ supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

$u_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+2} u_n$; $\frac{2n+2}{2n+3} u_{n+1} = u_n$; $(1 - \frac{1}{2n+3}) u_{n+1} = u_n$; $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n+3} u_{n+1}$.

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n+3} u_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ HR}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1} + \frac{u_{n+1}}{2(n+1)+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{2k+1}$ ... cqfd.

b) $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \geq 0$ et $\frac{u_n}{2n+1} x^n \geq 0$.

$$\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u_i}{2i+1} x^i \sum_{j=0}^{+\infty} x^j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{préliminaire}}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \quad \text{avec}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1} x^k x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}\right) x^n = u_n x^n$ (... qui assure d'abord la convergence de la série de TG δ_n.

Finalement : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

Q6 a) (2) donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_n$; ceci vaut encore pour $n = 0$.

Soit $x \in [0,1[$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sqrt{n}\, x^n \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_n x^n$. Par conséquent la série de terme général $u_n x^n$ étant convergente : la série de terme général $\sqrt{n}\, x^n$ l'est aussi (comparaison des séries à termes positifs). Nous posons désormais : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n$!

b) $x \in [0,1[$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_n x^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

$S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$; $\frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x) \leq 1$.

⚠ (2) vaut encore pour $n=0$!

La deuxième inégalité de (2) multipliée par x^n et la convergence des 3 séries donnent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}\, x_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2n+1} x^n \text{, soit : } (1-x)^{-3/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(x) \leq (1-x)^{-1/2}$$

Donc $1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x) \leq (1-x)^{3/2} (1-x)^{-1/2} = 1-x$

Donc $1-(1-x) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x)$.

Finalement : $x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x) \leq 1$; $\lim_{x \to 1} x = 1$ donc $\lim_{x \to 1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{3/2} S(x) = 1$.

$S(x) \underset{1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

PARTIE II

Q1 $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n x^n \leq x^n$, la série de terme général x^n converge, il en est de même de la série de terme général $a_n x^n$ (critère de comparaison des séries à termes positifs). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, pour tout $x \in [0,1[$, $f_A(x)$ existe.

Q2 a) Soit $A \in S$. Soit $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n x^n \leq x^n$ donc $0 \leq f_A(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Par conséquent $\forall x \in [0,1[$, $0 \leq (1-x) f_A(x) \leq 1$.

En passant à la limite en 1 : $0 \leq p(A) \leq 1$.

b) $\forall x\in[0,1[,\ f_\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}0\,x^n=0$, donc $\lim_{x\to1}[(1-x)f_\varphi(x)]=0$. $\varphi\in S$ et $p(\varphi)=0$

$\forall x\in[0,1[,\ f_{\mathbb{N}}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}1.\,x^n=\frac{1}{1-x}$; donc $\lim_{x\to1}(1-x)f_{\mathbb{N}}(x)=1$! $\mathbb{N}\in S$ et $p(\mathbb{N})=1$.

c) Soit $x\in[0,1[$. $f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_n=1$ si $n\in A$ et $a_n=0$ si $n\notin A$.

Posons : $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=1-a_n$. $b_n=1$ si $n\notin A$ et $b_n=0$ si $n\in A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=1$ si $n\in\complement A$ et $b_n=0$ si $n\notin\complement A$.

$f_{\bar A}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-a_n)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{1}{1-x}-f_A(x)$.

$(1-x)f_{\bar A}(x)=1-(1-x)f_A(x)$; $\lim_{x\to1}(1-x)f_{\bar A}(x)=1-p(A)$.

Donc $\underline{\bar A\in S \text{ et } p(\bar A)=1-p(A)}$.

d) $\forall x\in[0,1[,\ f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $f_B(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ et $f_{A\cup B}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$

Remarque que $f_{A\cup B}=f_A+f_B$. Il suffit de montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n+b_n=c_n$!

ou $n\notin A\cup B$ et : $a_n=b_n=c_n=0$, donc $a_n+b_n=c_n$

$A\cap B=\varphi \rightarrow$ ou $n\in A$ et $n\notin B$ et : $a_n=1$, $b_n=0$, $c_n=1$, donc $a_n+b_n=c_n$

ou $n\notin A$ et $n\in B$ et : $a_n=0$, $b_n=1$, $c_n=1$, donc $a_n+b_n=c_n$.

Finalement : $\forall x\in[0,1[,\ f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

$\forall x\in[0,1[,\ (1-x)f_{A\cup B}(x)=(1-x)f_A(x)+(1-x)f_B(x)$.

$\lim_{x\to1}(1-x)f_{A\cup B}(x)=p(A)+p(B)$.

Donc $\underline{A\cup B\in S \text{ et } p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$.

Q3) a) Soit $\underline{A}$ une partie finie de $\mathbb{N}$. Soit p un majorant de A.

$\forall x\in[0,1[,\ f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{p}a_nx^n$, donc $\lim_{x\to1}f_A(x)=\sum_{n=0}^{p}a_n$

Donc $\lim_{x\to1}(1-x)f_A(x)=0$. $\underline{A\in S \text{ et } p(A)=0}$.

b) $\underline{A=q\mathbb{N} \text{ avec } q\in\mathbb{N}^*}$. $\forall x\in[0,1[,\ f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{qn}=\frac{1}{1-x^q}$

$\forall x\in[0,1[,\ (1-x)f_A(x)=\frac{1-x}{1-x^q}=\frac{1}{x^{q-1}+x^{q-2}+\dots+x+1}$; $\lim_{x\to1}(1-x)f_A(x)=\frac{1}{q}$

$\underline{A\in S \text{ et } p(A)=\frac{1}{q}}$

c) $\underline{A=q\mathbb{N}+t}$ (!) avec $t\in\mathbb{N}$ et $\underline{q\in\mathbb{N}^*}$

$\forall x\in[0,1[,\ f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{qn+t}=\frac{x^t}{1-x^q}$

$\lim_{x\to1}(1-x)f_A(x)=\lim_{x\to1}\left(x^t\frac{1-x}{1-x^q}\right)=\frac{1}{q}$

$\underline{A\in S \text{ et } p(A)=\frac{1}{q}}$

(Q4) a) soit $x \in [0,1[$. $\dfrac{f_C(x)}{1-x} = f_C(x) \times \dfrac{1}{1-x} = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i x^i \times \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ avec

$z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right) x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\dfrac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right) x^n$. Ne reste plus à établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} c_k = [\sqrt{n}]$.

soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} c_k = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N}^* \mid k^2 \leq n\} = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq \sqrt{n}\} = [\sqrt{n}]$

même si $n=0$!

Finalement : $\forall x \in [0,1[$, $\dfrac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}]\, x^n$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n - \dfrac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n} - [\sqrt{n}])\, x^n$ pour tout $x \in [0,1[$.

$\forall x \in [0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (\sqrt{n} - [\sqrt{n}])\, x^n \leq x^n$.

$\forall x \in [0,1[$, $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n - \dfrac{f_C(x)}{1-x} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (... toutes les séries convergent).

c) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n \underset{1}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$; $\lim_{x \to 1} (1-x)^{3/2} S(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\forall x \in [0,1[$, $0 \leq (1-x)^{3/2} S(x) - (1-x)^{3/2} f_C(x) \leq (1-x)^{1/2}$ (par multiplication des inégalités de b par $(1-x)^{3/2}$ qui est positif).

$\lim_{x \to 1} (1-x)^{1/2} = 0$ donc $\lim_{x \to 1} \left((1-x)^{3/2} S(x) - (1-x)^{3/2} f_C(x)\right) = 0$; comme $\lim_{x \to 1} (1-x)^{3/2} S(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

par soustraction et multiplication par -1 on obtient : $\lim_{x \to 1} (1-x)^{1/2} f_C(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc $f_C(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Par conséquent : $\lim_{x \to 1} (1-x) f_C(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1-x} = 0$.

$C \in S$ et $p(C) = 0$.

(Q5) a) $(f_C(x))^2 = \left(\sum_{i=0} c_i x^i\right)\left(\sum_{j=0} c_j x^j\right) = \sum_{n=0} z_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k c_{n-k} x^{n-k}$

$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v(n) = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $c_k c_{n-k} = 1 \iff \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}^*, p^2 = n$ et $q^2 = n-k$ et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $c_k c_{n-k} \in \{0,1\}$!

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = \operatorname{card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p^2+q^2 = n\} = v(n)$

b) $\forall x \in [0,1[$, $f_D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$ et $(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n$.

Pour avoir : $\forall x \in [0,1[$, $f_D(x) \leq (f_C(x))^2$, il suffit de montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \leq v(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. 1er cas.. $d_n = 0$, c'est clair que : $d_n \leq v(n)$

2e cas.. $d_n \neq 0$. Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$, $p^2+q^2 = n$ donc $v(n) \geq 1$

car $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers non nuls (p,q) tels que : $p^2+q^2 = n$.

Par conséquent : $d_n \leq v(n)$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \leq v(n)$, donc $\forall x \in [0,1[$, $f_D(x) \leq (f_C(x))^2$

$\forall x \in [0,1[$, $0 \leq (1-x) f_D(x) \leq (1-x)(f_C(x))^2$.

$(1-x)(f_C(x))^2 \underset{1}{\sim} (1-x)\frac{\pi}{4}\frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{4}$; donc $\lim_{x \to 1} (1-x)(f_C(x))^2 = \frac{\pi}{4}$

Par conséquent : $\underline{\underline{p(D) \leq \frac{\pi}{4}}}$.

c) Il s'agit de montrer que : $\forall x \in [0,1[$, $2\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n}$

Pour cela il suffit de montrer que : 1°.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 d_{2n} \leq v(2n) + c_n$ et

2°.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 d_{2n+1} \leq v(2n+1)$;

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons tout d'abord 2°. Si $d_{2n+1} = 0$ c'est clair. Supposons $d_{2n+1} = 1$.

$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p^2+q^2 = 2n+1$. $p \neq q$ car $p = q \Rightarrow 2p^2 = 2n+1 \Rightarrow 2n+1$ pair !

Donc $(q,p) \neq (p,q)$ et $q^2+p^2 = 2n+1$!! Par conséquent : $v(2n+1) \geq 2 = 2 d_{2n+1}$!

Montrons maintenant 1°..

Si $c_n = 1$ c'est clair car alors : $d_{2n} \leq v(2n)$ et $d_{2n} \leq c_n$ donc $2d_{2n} \leq v(2n) + c_n$

Supposons $c_n = 0$. Il faut montrer que : $2 d_{2n} \leq v(2n)$.

C'est évident pour $d_{2n} = 0$. Supposons alors $d_{2n} = 1$.

$\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p^2+q^2 = 2n$. Si $p = q$ alors : $2p^2 = 2n$; $p^2 = n$; $c_n = 1$!!

Donc $p \neq q$. On a alors $(q,p) \neq (p,q)$ et $q^2+p^2 = 2n$; $v(2n) \geq 2 = 2 d_{2n}$ ...cqfd.

Finalement $\forall x \in [0,1[$, $2 f_D(x) \leq (f_C(x))^2 + f_C(x^2)$

$\forall x \in [0,1[$, $2(1-x) f_D(x) \leq (1-x)(f_C(x))^2 + (1-x) f_C(x^2) = (1-x)(f_C(x))^2 + \frac{1}{1+x}\left((1-x^2) f_C(x^2)\right)$

A la limite $2p(D) \leq \frac{\pi}{4} + p(C) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$; $\underline{\underline{p(D) \leq \frac{\pi}{8}}}$.

↑ visiblement