

PARTIE I

dans cette partie nous utiliserons des "notations polynomiales"

Nous écrivons donc $\varphi = P + \frac{1}{n}(1-x)P'$, $P_k = x^{n-k}, \dots$

Q1.. Etude de l'application F.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $P' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc $\frac{1}{n}(1-x)P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$; par conséquent $F(P) = P + \frac{1}{n}(1-x)P'$ est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

F est donc une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même.

$\forall (P, R) \in \mathbb{R}_{n-1}^2[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda P + R) = \lambda P + R + \frac{1}{n}(1-x)(\lambda P' + R') = \lambda P + R + \frac{1}{n}(1-x)(\lambda P' + R')$.

$\forall (P, R) \in \mathbb{R}_{n-1}^2[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda P + R) = \lambda(P + \frac{1}{n}(1-x)P') + (R + \frac{1}{n}(1-x)R') = \lambda F(P) + F(R)$.

c1.. F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Soit $k \in [1, n-1]$. $P_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $F(P_k) = P_k + \frac{1}{n}(1-x)P_k' = x^{n-k} + \frac{1}{n}(1-x)(n-k)x^{n-k-1}$

$$F(P_k) = x^{n-k} + (1 - \frac{k}{n})(x^{n-k-1} - x^{n-k}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à simplifier} \\ \text{à développer} \end{array} \right.$$

$$F(P_k) = \frac{k}{n}x^{n-k} + (1 - \frac{k}{n})x^{n-k-1}$$

rien. $\left\| \forall k \in [1, n-1], F(P_k) = \frac{k}{n}P_k + (1 - \frac{k}{n})P_{k+1} \right\}$ sans abus!

$$F(P_n) = P_n$$

$$c) \pi = \pi_B(F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-2}{n} & \dots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{bmatrix}$$

Q2.. Etude des éléments propres de F.

a) Les valeurs propres de F sont les valeurs propres de π . π est une matrice triangulaire inférieure; ses valeurs propres sont donc les éléments de sa diagonale

Par conséquent les valeurs propres de π et de F sont : $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n ; par conséquent F est diagonalisable.

Remarque.. F a n sous-espaces propres et ces sous-espaces sont nécessairement de dimension 1

b) soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$F(P) = P \Leftrightarrow P + \frac{1}{n}(1-X)P' = P \Leftrightarrow \frac{1}{n}(1-X)P' = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X].$$

Le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1 est $\text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

c) $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k < n$. $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P \neq 0$ et $F(P) = \frac{n-k}{n}P$.

On a $P + \frac{1}{n}(1-X)P' = \frac{n-k}{n}P$ donc $P(1) + 0 = \frac{n-k}{n}P(1)$ ou $-\frac{k}{n}P(1) = 0$; par conséquent $\underline{P(1) = 0}$.

Soit r l'ordre de multiplicité de 1 dans P et soit R le quotient de P par $(X-1)^r$.

On a: $1 \leq r < n$, $P = (X-1)^r R$ et $R(1) \neq 0$.

$$\frac{n-k}{n}(X-1)^r R = \frac{n-k}{n}P = F(P) = P + \frac{1}{n}(1-X)P' = (X-1)^r R + \frac{1}{n}(1-X)[r(X-1)^{r-1}R + (X-1)^r R'].$$

Donc $\frac{n-k}{n}(X-1)^r R = (X-1)^r [R - \frac{r}{n}R + \frac{1}{n}(1-X)R']$. En divisant par $(X-1)^r$ à gauche:

$$(*) \quad \frac{n-k}{n}R = \frac{n-r}{n}R + \frac{1}{n}(1-X)R'. \quad \text{En prenant la valeur de 1 on obtient:}$$

$$\frac{n-k}{n}R(1) = \left(\frac{n-r}{n}\right)R(1) + 0, \quad \text{soit: } \frac{n-k}{n} = \frac{n-r}{n} \quad \text{car } R(1) \neq 0. \quad \text{Ceci}$$

donne alors: $r = k$

La relation (*) n'écrit alors: $\frac{n-k}{n}R = \frac{n-r}{n}R + \frac{1}{n}(1-X)R'$; elle donne: $\frac{1}{n}(1-X)R' = 0$

donc $R' = 0$ et en conséquence R est constant.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^{(*)}, \quad P = \lambda(X-1)^k.$$

Ceci prouve que si P est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ alors $P \in \text{Vect}((X-1)^k)$

d) On prend $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k < n$. Notons $H_{n,k}$ le sous-espace propre ^{de F} associé à la valeur propre $(n-k)/n$.

On a $H_{n,k} \geq 1$ et $H_{n,k} \subset \text{Vect}((X-1)^k)$ donc $H_{n,k} = \text{Vect}((X-1)^k)$ car

$$\dim \text{Vect}((X-1)^k) = 1$$

Noter que ce résultat reste encore pour $k=0$ car le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $1 = \frac{n-0}{n}$ est $\text{Vect}(1) = \text{Vect}((X-1)^0)$.

Donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ le sous-espace propre de F associé à la valeur propre $\frac{n-k}{n}$ est $\text{Vect}((X-1)^k)$. Ceci s'écrit encore:

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$ est $\text{Vect}((x-1)^{n-k})$.

Q3.. Etude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$.

a) $\forall t \in \mathbb{R}, U_j(t) = t^{n-1} = (t-1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (t-1)^k$. $U_j = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$

b) soit $j \in \mathbb{N}^*$. $U_j = F^{j-1}(U_1)$ donc $U_j = F^{j-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^k\right)$. Par récurrence :

$$U_j = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F^{j-1}((x-1)^k)$$

Or $F((x-1)^k) = \frac{n-k}{n} (x-1)^k$. Une récurrence rapide donne : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $F^i((x-1)^k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^i (x-1)^k$

Par conséquent : $U_j = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (x-1)^k$.

Or : $\forall t \in \mathbb{R}, U_j(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (t-1)^k \dots$ ce qui est bien la génératrice U_2 et $U_3 \dots$

En particulier : $U_j(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (-1)^k$.

PARTIE II

Q3.. Etude de la loi des variables aléatoires X_j .

commande

a) $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $p(X_{j+1} = k | X_j = k) = \frac{k}{n}$ (le $j+1$ ième consommateur chez un des k fournisseurs ayant reçu au moins une commande d'un des j premiers clients)

$p(X_{j+1} = k | X_j = k-1) = \frac{n-k+1}{n}$ (le $j+1$ ième consommateur commande chez un des $n-k+1$ fournisseurs n'ayant pas encore eu de commande).

clairement $p(X_{j+1} = k | X_j = i) = 0$ si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{k, k-1\}$.

b) soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $p(X_{j+1} = k) = \sum_{i=1}^n p(X_{j+1} = k | X_j = i) p(X_j = i)$. Ce qui précède donne alors

1^{ère} cas... $k=1$. $p(X_{j+1} = k) = p(X_{j+1} = k | X_j = k) p(X_j = k) = \frac{k}{n} p(X_j = k)$

2^{ème} cas... $k \geq 2$. $p(X_{j+1} = k) = p(X_{j+1} = k | X_j = k-1) p(X_j = k-1) + p(X_{j+1} = k | X_j = k) p(X_j = k)$.

ou : $p(X_{j+1}=k) = \frac{n-k+1}{n} p(X_j=k-1) + \frac{k}{n} p(X_j=k)$. Notons que cette formule vaut aussi pour $k=1$ car $p(X_j=0)=0$. Finalement :

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(X_{j+1}=k) = \frac{n-k+1}{n} p(X_j=k-1) + \frac{k}{n} p(X_j=k)$.

Q2. Etude de la suite (G_j)

a) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(X_1=k) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$. $G_1 = \sum_{k=1}^n p(X_1=k) X^{n-k} = X^{n-1}$.

$G_{j+1} = \sum_{k=1}^n p(X_{j+1}=k) X^{n-k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n} p(X_j=k-1) + \frac{k}{n} p(X_j=k) \right) X^{n-k}$;

$G_{j+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-(k-1)) p(X_j=k-1) X^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k p(X_j=k) X^{n-k}$;

$\downarrow k \rightarrow k+1$

$G_{j+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p(X_j=k) X^{n-1-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k p(X_j=k) X^{n-k}$;

$G_{j+1} = \frac{1}{n} G'_j + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-(n-k)) p(X_j=k) X^{n-k} = \frac{1}{n} G'_j + G_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k) p(X_j=k) X^{n-k}$;

$G_{j+1} = \frac{1}{n} G'_j + G_j - \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n (n-k) p(X_j=k) X^{n-k-1} = \frac{1}{n} G'_j + G_j - \frac{1}{n} \times G'_j = \dots = F(G_j)$;

Donc $G_{j+1} = F(G_j)$.

Plutôt que par récurrence que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, G_j = U_j$.

- $G_1 = X^{n-1} = U_1$.

- Supposons la propriété vraie pour $j \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $j+1$.

$G_{j+1} = F(G_j) \stackrel{H.R.}{=} F(U_j) = U_{j+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall j \in \mathbb{N}^*, G_j = U_j$.

b) $p(X_j=1)$ et G_j sont constants de G_j donc :

$p(X_j=1) = G_j(1) = U_j(1)$. D'après I Q3 b :

$p(X_j=1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (-1)^k$.

si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, récursivement $p(X_j = n) = 0$.

$$\text{d'ac si } 1 \leq j < n : \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{k}{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0}}$$

$$\text{d) } p(X_j = n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{k}{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

$|1 - \frac{k}{n}| < 1$ d'où que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'ac $\lim_{j \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\text{Finalement } \lim_{j \rightarrow +\infty} p(X_j = n) = (-1)^0 \binom{0}{n-1} \left(1 - \frac{0}{n}\right)^{j-1} ; \lim_{j \rightarrow +\infty} p(X_j = n) = 1 \text{ (quelle surprise!).}$$

Notons aussi que, si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$0 \leq p(X_j = k) = 1 - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n p(X_j = \ell) = 1 - p(X_j = n) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n-1} p(X_j = \ell) \leq 1 - p(X_j = n).$$

Il vient alors par encadrement: $\underline{\underline{\lim_{j \rightarrow +\infty} p(X_j = k) = 0}}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\text{A cela: } \lim_{j \rightarrow +\infty} E(X_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k p(X_j = k) = n \text{ car } \lim_{j \rightarrow +\infty} (k p(X_j = k)) = \begin{cases} k > n: 0 \\ n: 1 \\ k < n: 0 \end{cases}$$

$$\text{de même } \lim_{j \rightarrow +\infty} E(X_j^2) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k^2 p(X_j = k) = n^2 ; \lim_{j \rightarrow +\infty} V(X_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} [E(X_j^2) - (E(X_j))^2] = n^2 - n^2 = 0$$

$$\text{Finalement: } \underline{\underline{\lim_{j \rightarrow +\infty} E(X_j) = n}} \text{ et } \underline{\underline{\lim_{j \rightarrow +\infty} V(X_j) = 0}}$$

Récapitulons... ceci permet d'affirmer que $(X_j)_{j \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine n .

Q3.. calcul de l'espérance de X_j :

$$\text{a) } \underline{\underline{G_j(s) = \sum_{k=1}^n p(X_j = k) = 1}} \text{ (} X_j(\omega) \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{).}$$

$$G'_j(s) = \sum_{k=1}^n (n-k) p(X_j = k) = n \sum_{k=1}^n p(X_j = k) - \sum_{k=1}^n k p(X_j = k) = n - E(X_j)$$

$$\underline{\underline{G'_j(1) = n - E(X_j)}}.$$

b) $G_{j+1} = G_j + \frac{1}{n}(1-x)G'_j \quad (G_{j+1} = F(G_j)).$

$G'_{j+1} = G'_j - \frac{1}{n}G'_j + \frac{1}{n}(x-1)G''_j;$

$G'_{j+1}(z) = (1 - \frac{1}{n})G'_j(z)$

$(G'_j(z))_{j \geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison $(1 - \frac{1}{n})$ et de premier

terme $G'_1(z) = U'_1(z) = n-1 \quad (U_1 = X^{n-1}; U'_1 = (n-1)X^{n-1}).$

Donc $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $G'_j(z) = (1 - \frac{1}{n})^{j-1} (n-1) = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1}$

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $G'_j(z) = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1}$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $E(X_j) = n - G'_j(z)$

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $E(X_j) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1}\right)$; ce qui redonne clairement $\lim_{j \rightarrow +\infty} E(X_j) = n$ car $|\frac{n-1}{n}| < 1$.

PARTIE III

1°. Etude de la variable aléatoire T.

$\{T \leq j\}$ est réalisé si et seulement si les j premiers consommateurs ont permis à chacun des n fournisseurs de recevoir ^{au moins} une commande ; c'est à dire si et seulement si $\{X_j = n\}$ est réalisé.

Donc les événements $\{T \leq j\}$ et $\{X_j = n\}$ sont égaux.

$P(T = j+1) = P(T \leq j+1) - P(T \leq j) = P(X_{j+1} = n) - P(X_j = n).$

$P(T = j+1) = P(X_{j+1} = n) - P(X_j = n).$

b) soit $j \in [1, +\infty[$

$P(T=1) + P(T=2) + \dots + P(T=j) = \sum_{k=1}^j P(T=k) = P(T=1) + \sum_{k=2}^j (P(X_k=n) - P(X_{k-1}=n))$

$P(T=1) + P(T=2) + \dots + P(T=j) = P(X_j=n)$

$\lim_{j \rightarrow +\infty} (P(T=1) + P(T=2) + \dots + P(T=j)) = \lim_{j \rightarrow +\infty} P(X_j=n) = 1.$

Par conséquent : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T=k) = 1$ ou : $\sum_{j=1}^{+\infty} P(T=j) = 1$.

Remarque... ceci signifie que $\sum_{j=1}^{+\infty} P(T=j)$ est un événement quasi-certain. Et est donc quasi-certain que chacun des n fournisseurs reçoive une commande.

c) $P(T=j+1) = P(X_{j+1}=n) - P(X_j=n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (-1)^k \left[\left(\frac{n-k}{n}\right)^{j+1} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^j \right]$

$P(T=j+1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (-1)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^j \left[\frac{n-k}{n} - 1 \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (-1)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^j \left(-\frac{k}{n}\right)$

$P(T=j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (-1)^{k-1} \frac{k}{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^j$.

Q2. Etude de l'espérance de T.

a) $k \in \mathbb{I}1, n\mathbb{I}$

$S_k = \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)^2} = \frac{n^2}{k^2}$ car $\sum_{j=1}^{+\infty} j x^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1, 1[$.

b) $\forall j \in \mathbb{N}, j P(T-1=j) = j P(T=j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-k}{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) j \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}$

Pour tout $k \in \mathbb{I}1, n-1\mathbb{I}$, la série de terme général $(-1)^{k-1} \binom{n-k}{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) j \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}$ converge d'après a). La série de terme général $j P(T-1=j)$ est donc convergente comme somme de $n-1$ séries convergentes ; comme $j P(T-1=j) \geq 0$ elle est même absolument convergente ; par conséquent $T-1$ possède une espérance.

$E(T-1) = \sum_{j=1}^{+\infty} j P(T=j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-k}{n-1} \frac{k}{n} \times \frac{n^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-k}{n-1} \frac{n}{k}$

avec $E(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-k}{n-1}}{k}$.

c) Soit $x \in]0, 1[$. $\sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-(x-1+1)^n}{1-x} = \frac{(x-1+1)^n - 1}{x-1} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (x-1)^k - 1}{x-1}$
 $\sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (x-1)^k}{x-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-k}{n-1} (x-1)^{k-1}$

Pour $x=1$, $\sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1} = n-1$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1} = \binom{n-1}{n-1} = n-1$

Finalement : $\forall x \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}$

Remarque... On peut avec une certaine ce résultat a appliquer la formule de Taylor à $P = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}$

d) Intégrons entre 0 et 1 l'égalité précédente ; il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \int_0^1 (x-1)^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 x^{k-1} dx ;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left[\frac{(x-1)^k}{k} \right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{x^k}{k} \right]_0^1 ; \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(-\frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

donc $E(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k} = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Pour conclure $E(T)$ existe et $E(T) = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$E(T) = n \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right]$

Q3.. Evaluation asymptotique de E(T).

Program essec91;

var k,n:integer;s:real;

begin

write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);s:=1;

for k:=2 to n do s:=s+1/k;

writeln('Pour n=',n,' l'espérance est sensiblement : ',n*s:5:1)

end.

Donnez la valeur de n. n=10

Pour n=10 l'espérance est sensiblement : 29.3

Donnez la valeur de n. n=100

Pour n=100 l'espérance est sensiblement : 518.7

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$; En intégrant : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

Par sommation de $k=1$ à $n-1$ il vient : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$; soit encore :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} ; \text{ donc } : 1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Par passage à la limite il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln n} = 1$; donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$

$E(T) \sim n \ln n$