PRELIMINAIRE $a>0$

Montrons par récurrence sur n que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/a}\,dt$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Notons pour commencer, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto t^n e^{-t/a}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable.

→ $n=0$ $\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A e^{-t/a}dt=\left[-ae^{-t/a}\right]_0^A=-ae^{-A/a}+a$. $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t/a}dt=a$.

Par conséquent : $J_0(a)=\int_0^{+\infty} t^0e^{-t/a}\,dt$ existe et vaut a.

→ Supposons que $J_n(a)=\int_0^{+\infty}t^ne^{-t/a}\,dt$ converge et notons que : $J_{n+1}(a)=\int_0^{+\infty}t^{n+1}e^{-t/a}\,dt$ $(n\in\mathbb{N})$

Utilisons une intégration par parties (en remarquant que : $u: t\to \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v: t\mapsto e^{-t/a}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$).

$\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A \underbrace{t^n}_{u'}\underbrace{e^{-t/a}}_{v}dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t/a}\right]_0^A-\int_0^A\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-t/a}dt=\frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A/a}+\frac{1}{a(n+1)}\int_0^A t^{n+1}e^{-t/a}\,dt$

Comme $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A/a}\right)=0$: $\int_0^{+\infty}t^ne^{-t/a}dt$ et $\int_0^{+\infty}t^{n+1}e^{-t/a}dt$ sont de même nature.

L'hypothèse de récurrence donne la convergence de la première ; donc $\int_0^{+\infty}t^{n+1}e^{-t/a}dt$ converge ; mieux : $\int_0^{+\infty}t^ne^{-t/a}dt=\frac{1}{a(n+1)}\int_0^{+\infty}t^{n+1}e^{-t/a}\,dt$.

ceci achève la récurrence.

Conclusion. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $J_n(a)=\int_0^{+\infty}t^ne^{-t/a}\,dt$ converge.

La récurrence a aussi montré que : → $J_0(a)=a$.
→ $\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n(a)=\frac{1}{a(n+1)}J_{n+1}(a)$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!}J_n(a)=\frac{1}{a^{n+1}(n+1)!}J_{n+1}(a)$.

$\left(\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!}J_n(a)\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante de premier terme a.

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{a^n}\frac{1}{n!}J_n(a)=a$.

Ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n(a)=n!\,a^{n+1}$.

PARTIE I $\quad K(x) = e^{-x/2a} \quad a>0$

(Q1) Soit f une solution de (1). f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t)f(t)\,dt$ converge pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)\,dt$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} P(x+t)\, e^{-\frac{x+t}{2a}} f(t)\,dt \underset{P=1}{=} K(x) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2a}} e^{-\frac{t}{2a}} f(t)\,dt$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x) = K(x) + e^{-\frac{x}{2a}} \int_0^{+\infty} e^{-t/2a} f(t)\,dt = K(x) + K(x) \int_0^{+\infty} e^{-t/2a} f(t)\,dt$.

Posons alors : $c = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t/2a} f(t)\,dt$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = cK(x)$.

Cl.. <u>Si f est solution : $\exists c\in\mathbb{R},\ f = cK$.</u> Ce qui signifie que l'ensemble des solutions est contenu dans la droite vectorielle engendrée par K (on évolue dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ des applications continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$).

(Q2).. <u>Réciproquement</u> soit $c\in\mathbb{R}$. Posons $f = cK$ et donnons une CNS pour que f soit solution. <u>Remarquons d'abord</u> que :

1°.. f est continue sur $[0,+\infty[$ car K est continue sur $[0,+\infty[$;

2°.. $\forall x\in[0,+\infty[, \forall t\in[0,+\infty[,\ K(x+t) f(t) = c\, e^{-\frac{x+t}{2a}} e^{-\frac{t}{2a}} = c e^{-\frac{x}{2a}} e^{-t/a}$.

D'après le préliminaire, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t) f(t)\,dt$ existe et vaut $c e^{-\frac{x}{2a}} \int_0^{+\infty} e^{-t/a}\,dt = ac\, e^{-\frac{x}{2a}}$ (.. $\int_0^{+\infty} e^{-t/a}dt$ converge et vaut a).

Dès lors : f est solution de (1) si et seulement si : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x) = K(x) + ac\, e^{-\frac{x}{2a}}$;

ou, si et seulement si : $\forall x \in\mathbb{R}_+,\ c e^{-\frac{x}{2a}} = e^{-\frac{x}{2a}} + ac\, e^{-\frac{x}{2a}}$

Finalement <u>f est solution de (1) si et seulement si : $c = 1 + ac$ ou $(1-a)c = 1$.</u>

(Q3) Ne reste plus qu'à résoudre l'équation : $c\in\mathbb{R}$ et $(1-a)c = 1$.
Si $a=1$ il n'y a pas de solution ; si a n'est pas 1, l'équation admet une solution et une seule : $\frac{1}{1-a}$.

Finalement si $a = 1$, (1) n'a pas de solution ;
si $a \neq 1$, (1) admet une solution et une seule : $\frac{1}{1-a} K$.

PARTIE II $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \lambda a + X$.

(Q1) a) Par définition (ϕ_0, ϕ_1) est une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha\phi_0+\beta\phi_1 = 0_E$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0=\alpha\phi_0(x)+\beta\phi_1(x) = \left(\alpha+\beta\frac{x}{a}\right)e^{-x/2a}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \alpha+\beta\frac{x}{a}=0$. Le polynôme $\alpha+\frac{\beta}{a}X$ admet une infinité de 0 ; il est nul.

Donc $\alpha=\frac{\beta}{a}=0$; $\alpha=\beta=0$.

Ceci achève de prouver que (ϕ_0,ϕ_1) est une famille libre de E.

Cl.. (ϕ_0,ϕ_1) est une base de E.

b) Soit ϕ un élément de E de coordonnées (α,β) dans $\mathcal{B}=(\phi_0,\phi_1)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ K(x+t)\phi(t) = P(x+t)e^{-\frac{x+t}{2a}}\phi(t) = \underset{\uparrow\, P=\lambda a+X}{(\lambda a+x+t)}\left(e^{-\frac{x+t}{2a}}\right)\left(\alpha+\beta\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{t}{2a}}$$

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)\phi(t) = e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}t^2+\left(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a}\right)t+\alpha(\lambda a+x)\right]e^{-t/a}$$

Fixons x dans $\mathbb{R}_+$. $e^{-x/2a}$, $\frac{\beta}{a}$, $\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a}$ et $\alpha(\lambda a+x)$ sont des constantes.

Le préliminaire a montré que : $\int_0^{+\infty}t^2e^{-t/a}dt$ existe et vaut $2a^3$, $\int_0^{+\infty}te^{-t/a}dt$ existe et vaut a^2 et $\int_0^{+\infty}e^{-t/a}dt$ existe et vaut a.

$t\mapsto K(x+t)\phi(t)$ apparaît alors comme une combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrales, entre 0 et $+\infty$, convergentes ; on peut donc dire que : $\int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)\,dt$ converge et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

Mieux : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)\,dt = e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}J_2(a)+\left(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a}\right)J_1(a)+\alpha(\lambda a+x)J_0(a)\right]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \psi(x)=\int_0^{+\infty}K(x+t)\phi(t)\,dt = e^{-\frac{x}{2a}}\left[\frac{\beta}{a}\times 2a^3+\left(\alpha+(\lambda a+x)\frac{\beta}{a}\right)a^2+\alpha(\lambda a+x)a\right]$

ce qui s'écrit encore, en regroupant les x du crochet :

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \psi(x) = e^{-\frac{x}{2a}}\times\frac{x}{a}\left[\beta a^2+\alpha a^2\right]+e^{-\frac{x}{2a}}\left[2\beta a^2+\alpha a^2+\lambda\beta a^2+\alpha\lambda a^2\right]$

Soit encore :

$\psi = a^2(\alpha+\beta)\,\phi_1 + a^2\left[(\lambda+1)\alpha+(\lambda+2)\beta\right]\phi_0$; donc $\psi\in E$.

 p4

c) Revenons pour gagner du temps.

Remarquons que si $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ est la matrice de $\phi\in E$ dans la base $\mathcal{B}=(\phi_0,\phi_1)$ alors $\psi=u(\phi)$ a pour matrice dans cette même base : $\begin{bmatrix} a^2(\lambda+1)\alpha+a^2(\lambda+2)\beta \\ a^2(\alpha+\beta)\end{bmatrix} = a^2\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$

Notons v (!) l'endomorphisme de E, tel que :
$M_{(\phi_1,\phi_2)}(v) = a^2\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}$. v transforme un élément ϕ de E de coordonnées (α,β) dans $\mathcal{B}$ en l'élément, de E, de coordonnées $(a^2(\lambda+1)\alpha+a^2(\lambda+2)\beta\ ,\ a^2(\alpha+\beta))$ dans la base $\mathcal{B}$! v transforme un élément ϕ de E en $u(\phi)$!! $v=u$.

Donc 1.. u est un endomorphisme de E

2.. $\underline{\underline{M_{(\phi_0,\phi_1)}(u) = a^2\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}}} = a^2 M(\lambda)$ avec $M(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}$.

u automorphisme de $E \Leftrightarrow a^2\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}$ inversible $\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}$ inversible.

Cherchons une réduite de Gauss de cette dernière matrice.

$\begin{bmatrix}\lambda+1&\lambda+2\\ 1&1\end{bmatrix}\ \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\begin{bmatrix}1&1\\ \lambda+1&\lambda+2\end{bmatrix}}\ \underset{L_2\leftarrow L_2-(\lambda+1)L_1}{\begin{bmatrix}1&1\\ 0&1\end{bmatrix}}$. cette dernière matrice étant inversible :

<u>u est un automorphisme de E</u> $\left(M_{(\phi_0,\phi_1)}(u^{-1}) = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix}-1&\lambda+2\\ 1&-(\lambda+1)\end{bmatrix}\right)$

Q2 Soit f une solution de (1).

Remarquons d'abord que :

→ $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ K(x) = (\lambda a+x)e^{-x/2a} = a(\lambda e^{-\frac{x}{2a}} + \frac{x}{a}e^{-\frac{x}{2a}}) = [a(\lambda\phi_0+\phi_1)](x)$.

Donc $K = a(\lambda\phi_0+\phi_1)\in E$.

→ $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ K(x+t) = a\left[\lambda e^{-\frac{x+t}{2a}} + \frac{x+t}{a}e^{-\frac{x+t}{2a}}\right] = a\left[\lambda\phi_0(x) + \frac{t}{a}\phi_0(x) + \phi_1(x)\right]e^{-\frac{t}{2a}}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt \overset{(*)}{=} \left[a\int_0^{+\infty}(\lambda+\frac{t}{a})e^{-t/2a}f(t)\,dt\right]\phi_0(x) + \left[a\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt\right]\phi_1(x)$

Ce qui prouve que " $x\mapsto\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt$ " appartient à E constantes.

Comme f vérifie (1) : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(t) = K(x) + \int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)\,dt$;

<u>f est alors élément de E</u> <u>comme somme de deux éléments de E</u>.

 p 5

<u>Remarque</u>.. Les puristes pourront justifier (*) en disant qu'il est possible de "couper" l'intégrale en deux car $\int_0^{+\infty} K(x+t)\,f(t)\,dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc en particulier pour $x=0$ (ce qui donne de la convergence à $\int_0^{+\infty} (\lambda a + t)\, e^{-t/2a} f(t)\,dt$, qui ajoutée à la convergence de $\int_0^{+\infty} K(x+t)\,f(t)\,dt$ suffit pour conclure ; OK ?).

Q3- Réciproquement soit $f = \alpha\,\phi_0 + \beta\,\phi_1 \in E$.

1°.. f est continue sur $\mathbb{R}_+$

2°.. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t)\,f(t)\,dt$ existe (<u>1° b)</u>) ; mieux

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} K(x+t)\,f(t)\,dt = u(f)(x)$

3°.. $K = a(\lambda\,\phi_0 + \phi_1)$

Les acteurs sont en place.

<u>a)</u> D'après ce que l'on vient de dire :

f solution de (1)

$\Updownarrow$

$f = K + u(f)$

$\Updownarrow$

$(u - Id_E)(f) = -K$

$$\Updownarrow \quad \left(a^2 \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\,\alpha + a^2(\lambda+2)\,\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\,\beta = -a \end{cases}$$

<u>b)</u> Soit $f = \alpha\,\phi_0 + \beta\,\phi_1 \in E$.

f vérifie (1) si et seulement si : $\begin{cases} [a^2(\lambda+1)-1]\,\alpha + a^2(\lambda+2)\,\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\,\beta = -a. \end{cases}$

b) La résolution du système est facile. On "tire" α dans la 2ème équation et l'on remplace dans la 1ère. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}[a^2(\lambda+1)-1]\alpha + a^2(\lambda+2)\beta = -\lambda a \\ \text{et} \\ a^2\alpha + (a^2-1)\beta = -a\end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases}\alpha = (\frac{1}{a^2}-1)\beta - \frac{1}{a} \\ \text{et} \\ -\lambda a = \beta\left(a^2(\lambda+2) + [a^2(\lambda+1)-1][\frac{1}{a^2}-1]\right) - \frac{1}{a}(a^2(\lambda+1)-1) = \beta\left(\frac{a^4+(\lambda+2)a^2-1}{a^2}\right) - \lambda a - a + \frac{1}{a}\end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases}\alpha = (\frac{1}{a^2}-1)\beta - \frac{1}{a} \\ (a^4+(\lambda+2)a^2-1)\beta = a(a^2-1)\end{cases}$$

. Ne reste plus qu'à discuter de la non nullité de $a^4+(\lambda+2)a^2-1$.

1er Cas .. $a^4+(\lambda+2)a^2-1 \neq 0$. Le système admet une solution et une seule.

(1) admet une solution et une seule : $\alpha\phi_0+\beta\phi_1$ avec :

$$\beta = \frac{a(a^2-1)}{a^4+(\lambda+2)a^2-1} \quad \text{et} \quad \alpha = (\frac{1}{a^2}-1)\beta - \frac{1}{a} = \frac{-a(\lambda+2a^2)}{a^4+(\lambda+2)a^2-1}$$

2ème Cas .. $a^4+(\lambda+2)a^2-1 = 0$. Rappelons que : $a>0$. $a(a^2-1)=0 \Leftrightarrow a=1$

* Si $a\neq 1$ le système n'a pas de solution. (1) n'a pas de solution
* Si $a=1$ l'ensemble des solutions du système est : $\{(-1,\beta);\beta\in\mathbb{R}\}$

Notons que $a=1$ et $a^4+(\lambda+2)a^2-1=0$ signifie $a=1$ et $\lambda=-2$

(1) admet pour ensemble de solution : $\{-\phi_0+\beta\phi_1 ; \beta\in\mathbb{R}\}$; c'est à dire

$-\phi_0+\mathrm{Vect}(\phi_1)$.

c) Posons $x=a^2$ et $y=\lambda$. Notons que $x\neq 0$ car $a>0$.

(1) n'a pas de solution $\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x^2+(y+2)x-1=0$

(1) " " " $\Leftrightarrow x\neq 1$ et $y=\frac{1-x^2-2x}{x}$.

(1) n'a pas de solution si et seulement le point de coordonnées (a^2,λ) appartient à la représentation graphique de la fonction $x\mapsto\frac{1-x^2-2x}{x}$ privée du point de coordonnées $(1,-2)$ et des points d'abscisse négative.

PARTIE III

Q1 a), b) et c). Soit $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$MX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x+2y+6z=0\\ -x-\lambda y+2z=0\\ x+2y+(2-\lambda)z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\lambda y+2z & (\leftarrow L_2)\\ 0=(1-\lambda)(-\lambda y+2z)+2y+6z=(\lambda^2-\lambda+2)y+2(4-\lambda)z & L_1\\ 0=-\lambda y+2z+2y+(2-\lambda)z=(2-\lambda)y+(4-\lambda)z & L_3\end{cases}$$

$$MX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\lambda y+2z\\ (2-\lambda)y+(4-\lambda)z=0\\ 0=(\lambda^2-\lambda+2-4+2\lambda)y=(\lambda^2+\lambda-2)y=(\lambda-1)(\lambda+2)y\end{cases}$$

$L_2\leftarrow L_2-2L_3$

1er cas.. $\lambda=1$. $MX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y+2z\\ y+3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-3z\\ x=5z\end{cases}$

Donc $1\in\operatorname{Spec} M$ et $\hat{F}_1=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$

2e cas.. $\lambda=-2$ $MX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y+2z\\ 4y+6z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{3}{2}z\\ x=-z\end{cases}$

Donc $-2\in\operatorname{Spec} M$ et $\hat{F}_{-2}=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-3/2\\1\end{bmatrix}\right)$.

3ème cas.. $\lambda\neq 1$ et $\lambda\neq -2$

$MX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ (4-\lambda)z=0\\ x=2z\end{cases}$

ou $\lambda\neq 4$ et : $MX=\lambda X \Leftrightarrow X=0$; $\lambda\notin\operatorname{Spec} M$

ou $\lambda=4$ et : $MX=\lambda X \Leftrightarrow y=0$ et $x=2z$;

$4\in\operatorname{Spec} M$ et $\hat{F}_4=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

Finalement : - $\operatorname{Spec}(M)=\{4,1,-2\}$

- les sous-espaces propres respectivement associés à 4, 1 et -2 sont respectivement : $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$ et $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-3/2\\1\end{bmatrix}\right)$

$\left(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3/2\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M associés aux valeurs propres 4, 1 et -2. La matrice de passage de la base canonique à cette base est $P=\begin{bmatrix}2&5&-1\\0&-3&-3/2\\1&1&1\end{bmatrix}$ et on a alors : $P^{-1}MP=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

donc si $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$: $M = P \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}$

d) Déterminons P^{-1}

V1

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & +\frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$ $\quad \begin{cases} L_3 \leftarrow \frac{4}{9}L_3 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$ $\quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$

V2 Soient $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX = Y$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = x' \\ -3y - \frac{3}{2}z = y' \\ x + y + z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 6y = x' + z' & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -3y - \frac{3}{2}z = y' \\ 3y - 3z = x' - 2z' & L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{9}{2}z = y' + x' - 2z' & (L_2 + L_3) \\ -\frac{9}{2}y = -\frac{1}{2}x' + y' + z' & (L_2 - \frac{1}{2}L_3) \\ x = \frac{1}{3}(x' + z') - 2y & (L_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{-2}{9}(-\frac{1}{2}x' + y' - z') = \frac{1}{9}(x' - 2y' - 2z') \\ z = \frac{1}{9}(-2x' - 2y' + 4z') \\ x = \frac{1}{9}(3x' + 3z' - 2x' + 4y' + 4z') = \frac{1}{9}(x' + 4y' + 7z') \end{cases}$$

On retrouve, plus facilement $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Q2.. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \left(P \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}\right)^n = P \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} P^{-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} P \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 4^n \\ 5 \\ 2(-2)^n \end{bmatrix}$

Ce qui donne a car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{9}(4\times 4^n + 25 - 2(-2)^n)$

$$\boxed{\begin{aligned} v_n &= \tfrac{1}{9}(-15 - 3(-2)^n) \\ w_n &= \tfrac{1}{9}(2\times 4^n + 5 + 2(-2)^n) \end{aligned}}$$

b) $a^{3n}u_n \sim \frac{1}{9}\times 4 \times 4^n a^{3n} = \frac{4}{9}(4a^3)^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{4}{9}(4a^3)^n \geq 0$.

la série de terme général $a^{3n}u_n$ est de même nature que la série de terme général $\frac{4}{9}(4a^3)^n$ qui converge si et seulement si $|4a^3|<1$ (série géométrique)

la série de terme général $a^{3n}u_n$ converge ssi $a<\sqrt[3]{1/4}$ $(a>0)$

Un raisonnement analogue montre que :

la série de terme général $a^{3n}w_n$ converge ssi : $a<\sqrt[3]{1/4}$ $\left(w_n \sim \frac{2}{9}4^n\right)$

C'est un peu différent au niveau de $a^{3n}v_n$ (signe...).

$a^{3n}v_n \sim -\frac{3}{9}(-2a^3)^n$; $|a^{3n}v_n| \sim \frac{1}{3}(2a^3)^n$; la série de TG $|a^{3n}v_n|$ est de même nature que la série de TG $\frac{1}{3}(2a^3)^n$.

Si $a<\sqrt[3]{1/2}$ la série de terme général $a^{3n}v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Si $a\geq\sqrt[3]{1/2}$, la suite $(|a^{3n}v_n|)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0. La suite $(a^{3n}v_n)_{n\geq 0}$ pas davantage ; la série de terme général $a^{3n}v_n$ diverge.

Finalement : la série de terme général $a^{3n}v_n$ converge ssi : $a<\sqrt[3]{1/2}$.

Supposons : $a<\sqrt[3]{1/4}$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}u_n \underset{\uparrow}{=} \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(4a^3)^n + \frac{25}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(a^3)^n - \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2a^3)^n$

les trois séries convergent.

donc $$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}u_n = \frac{4}{9}\,\frac{1}{1-4a^3} + \frac{25}{9}\,\frac{1}{1-a^3} - \frac{2}{9}\,\frac{1}{1+2a^3} = U$$

De même

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n}w_n = \frac{2}{9}\,\frac{1}{1-4a^3} + \frac{5}{9}\,\frac{1}{1-a^3} + \frac{2}{9}\,\frac{1}{1+2a^3} = W$$

Supposons : $a < 1/\sqrt[3]{2}$ on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} a^{3n} v_n = -\frac{5}{3}\,\frac{1}{1-a^3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+2a^3} = V$

Q3 Rappel.. $\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = (3a^2 - 4ax + x^2)\,e^{-x/2a}$. Attention ici les calculs ne sont pas simples.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

g_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $\exists (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) = a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a x + \gamma_n x^2)\,e^{-x/2a}$

→ C'est clair pour $n = 0$. $g_0 = K$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et comme :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_0(x) = K(x) = (3a^2 - 4ax + x^2)\,e^{-x/2a}$ en posant : $\alpha_0 = 3$, $\beta_0 = -2$ et $\gamma_0 = 1$,
on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_0(x) = a^{3\times 0}(\alpha_0 a^2 + 2\beta_0 a x + \gamma_0 x^2)\,e^{-x/2a}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)\,g_n(t) = \left(3a^2 - 4a(x+t) + (x+t)^2\right)e^{-\frac{x+t}{2a}}\,a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\,e^{-\frac{t}{2a}}$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)\,g_n(t) = a^{3n} e^{-\frac{x}{2a}}\Big[x^2(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\,e^{-t/a} + x(-4a+2t)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\,e^{-t/a}$
$+ (3a^2 - 4at + t^2)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)\,e^{-t/a}\Big]$

↕ Il était plus simple de regrouper les t

Posons : $u(t) = \alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2$

$v(t) = (-4a + 2t)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2) = 2\gamma_n t^3 + 4a(\beta_n - \gamma_n)t^2 + 2a^2(\alpha_n - 4\beta_n)t - 4a^3\alpha_n$

$w(t) = (3a^2 - 4at + t^2)(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2) = \gamma_n t^4 + (2\beta_n a - 4a\gamma_n)t^3 + (3a^2\gamma_n - 8\beta_n a^2 + \alpha_n a^2)t^2$
$+ (6a^3\beta_n - 4a^3\alpha_n)t + 3a^4\alpha_n$.

u, v, w sont des fonctions polynomes et :

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ K(x+t)\,g_n(t) = a^{3n} e^{-\frac{x}{2a}}\left[x^2 u(t)\,e^{-t/a} + x\,v(t)\,e^{-t/a} + w(t)\,e^{-t/a}\right]$

Fixons x dans $\mathbb{R}_+$.

L'existence de $g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\,g_n(t)\,dt$ résultera de l'existence des intégrales :

$\int_0^{+\infty} u(t)\,e^{-t/a}\,dt$, $\int_0^{+\infty} v(t)\,e^{-t/a}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} w(t)\,e^{-t/a}\,dt$.

Nous avons dans le préliminaire que : $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t/a}\,dt$ existe pour tout $p \in \mathbb{N}$;

par combinaison linéaire $\int_0^{+\infty} Q(t)\,e^{-t/a}\,dt$ existe dès que Q est un polynome. Par conséquent

les trois intégrales précédentes existent ; $g_{n+1}(x)$ existe et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

g_{n+1} est dès lors définie sur $\mathbb{R}^+$.

 p11

Calculons : $\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt$, $\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt$ et $\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt$ en ne pouvant que :

$\forall p\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^p e^{-t/a}\,dt = p!\,a^{p+1}$.

$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n a t + \gamma_n t^2)e^{-t/a}dt = \alpha_n a^2 a + 2\beta_n a a^2 + \gamma_n 2a^3$

$\underline{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-t/a}dt = a^3(\alpha_n + 2\beta_n + 2\gamma_n)}$.

$\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}[2\gamma_n t^3 + 4a(\beta_n-\gamma_n)t^2 + 2a^2(\alpha_n-4\beta_n)t - 4a^3\alpha_n]e^{-t/a}dt$

$= 2\gamma_n\, 3!\,a^4 + 4a(\beta_n-\gamma_n)\,2a^3 + 2a^2(\alpha_n-4\beta_n)\,a^2 - 4a^3\alpha_n\, a$

$\underline{\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt} = 2a^4(6\gamma_n + 4\beta_n - 4\gamma_n + \alpha_n - 4\beta_n - 2\alpha_n) = \underline{a^3\, 2a\,(-\alpha_n + 2\gamma_n)}$.

$\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt = \int_0^{+\infty}[\gamma_n t^4 + (2\beta_n a - 4a\gamma_n)t^3 + (3a^2\gamma_n - 8\beta_n a^2 + \alpha_n a^2)t^2 + (6a^3\beta_n - 4a^3\alpha_n)t + 3a^4\alpha_n]e^{-t/a}dt$

$= \gamma_n\, 4!\,a^5 + (2\beta_n a - 4a\gamma_n)\,3!\,a^4 + (3a^2\gamma_n - 8\beta_n a^2 + \alpha_n a^2)\,2a^3 + (6a^3\beta_n - 4a^3\alpha_n)a^2 + 3a^4\alpha_n\, a$

$= a^5[24\gamma_n + 12\beta_n - 24\gamma_n + 6\gamma_n - 16\beta_n + 2\alpha_n + 6\beta_n - 4\alpha_n + 3\alpha_n]$

$\underline{\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt} = a^5[6\gamma_n + 2\beta_n + \alpha_n] = \underline{a^3\, a^2(\alpha_n + 2\beta_n + 6\gamma_n)}$.

Tout est en place. Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$q_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\,q_n(t)\,dt = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(\int_0^{+\infty}(x^2u(t) + x\,v(t) + w(t))e^{-t/a}dt\right)$

$q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(\int_0^{+\infty} w(t)e^{-t/a}dt + x\int_0^{+\infty} v(t)e^{-t/a}dt + x^2\int_0^{+\infty} u(t)dt\right)$

$q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(a^3a^2(\alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n) + x\,a^3\,2a(-\alpha_n+2\gamma_n) + x^2a^3(\alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n)\right)$.

Posons $\underline{\underline{\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n + 6\gamma_n,\ \beta_{n+1} = -\alpha_n + 2\gamma_n \text{ et } \gamma_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n + 2\gamma_n}}$.

Il vient : $q_{n+1}(x) = a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}a^3(a^2\alpha_{n+1} + x\,2a\beta_{n+1} + x^2\gamma_{n+1})$

<u>ou</u> $q_{n+1}(x) = a^{3(n+1)}(\alpha_{n+1}a^2 + 2\beta_{n+1}ax + \gamma_{n+1}x^2)e^{-x/2a}$ ... pour tout $x\in\mathbb{R}_+$

ceci achève cette petite récurrence.

Notons que : $\alpha_0=3$, $\beta_0=-2$, $\gamma_0=1$ et $u_0=3$, $v_0=-2$, $w_0=1$

De plus : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}\alpha_{n+1} = \alpha_n+2\beta_n+6\gamma_n\\ \beta_{n+1} = -\alpha_n+2\gamma_n\\ \gamma_{n+1} = \alpha_n+2\beta_n+2\gamma_n\end{cases}$ et $\begin{cases}u_{n+1} = u_n+2v_n+6w_n\\ v_{n+1} = -u_n+2w_n\\ w_{n+1} = u_n+2v_n+2w_n\end{cases}$

Une récurrence très simple donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=u_n$, $\beta_n=v_n$ et $\gamma_n=w_n$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\frac{1}{9}(4\times 4^n+25-2(-2)^n)$, $\beta_n=\frac{1}{9}(-15-3(-2)^n)$ et $\gamma_n=\frac{1}{9}(2\times 4^n+5+2(-2)^n)$.

b) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty}K(x+t)\,g_k(t)\,dt$ converge. Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f_n(t)=\sum_{k=0}^{n} g_k(t)$, donc

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty}K(x+t)\,f_n(t)\,dt$ converge. Soit $x\in\mathbb{R}_+$ et soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)g_k(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}g_{k+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}g_k(x)$$

Donc $K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)\,dt=g_0(x)+\sum_{k=1}^{n+1}g_k(x)=\sum_{k=0}^{n+1}g_k(x)=f_{n+1}(x)$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)\,dt$.

Q4 a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}g_k(x)=\sum_{k=0}^{n}a^{3k}(\alpha_k a^2+2\beta_k ax+\gamma_k x^2)e^{-x/2a}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n(x)\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha_k=u_k,\,\beta_k=v_k,\,\gamma_k=w_k}}{=}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}u_k\right)a^2+2\left(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}v_k\right)ax+\left(\sum_{k=0}^{n}a^{3k}w_k\right)x^2\right]e^{-x/2a}$$

Nous avons ici $a<\sqrt[3]{1/4}$; ceci suffit pour donner la convergence des séries de termes généraux $a^{3k}u_k$, $a^{3k}v_k$ et $a^{3k}w_k$

Donc $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=(Ua^2+2Vax+Wx^2)e^{-x/2a}=L(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $L(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $L(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$!

b) $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f_n(t)\,dt$ passer à la limite … de manière licite ! Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\sum_{\ell=0}^{n}g_\ell(t)\,dt=\sum_{\ell=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)g_\ell(t)\,dt+K(x)$$

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\sum_{\ell=0}^{n}\int_0^{+\infty}K(x+t)\,(a^{3\ell})(\alpha_\ell a^2+2\beta_\ell at+\delta_\ell t^2)e^{-t/2a}\,dt$$

les 3 intégrales sont convergentes

$$f_{n+1}(x)=K(x)+\Big[\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\alpha_\ell\Big]a^2\int_0^{+\infty}K(x+t)e^{-t/2a}\,dt+\Big(\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\beta_\ell\Big)2a\int_0^{+\infty}K(x+t)te^{-t/2a}\,dt+$$
$$+\Big[\sum_{\ell=0}^{n}a^{3\ell}\delta_\ell\Big]\int_0^{+\infty}K(x+t)t^2e^{-t/2a}\,dt.$$ Passer à la limite ; il vient : $f_{n+1}(x)=$

$$K(x)+Ua^2\int_0^{+\infty}K(x+t)e^{-t/2a}\,dt+V2a\int_0^{+\infty}K(x+t)te^{-t/2a}\,dt+W\int_0^{+\infty}K(x+t)t^2e^{-t/2a}\,dt$$

ou $L(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\,[Ua^2+2Vat+Wt^2]\,e^{-t/2a}\,dt$

c'est à dire : $L(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\,L(t)\,dt$. Donc L est solution de (1)

(Q5) Soit f une solution de (1)

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)\,f(t)\,dt$

$$f(x)=(3a^2-4ax+x^2)e^{-x/2a}+\int_0^{+\infty}(3a^2-4a(x+t)+(x+t)^2)\,e^{-\frac{x+t}{2a}}f(t)\,dt$$

$$f(x)\overset{*}{=}e^{-x/2a}\Big[3a^2-4ax+x^2+x^2\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt+x\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)\,dt+\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big]$$

$$f(x)=e^{-x/2a}\Big[\underbrace{\Big(1+\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big)}_{C}x^2+\underbrace{\Big(-4a+\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)\,dt\Big)}_{2Ba\ (\dots\text{divisé par } 2a\dots)}x+\underbrace{3a^2+\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)\,dt}_{a^2A\ (\text{divisé par } a^2\dots)}\Big]=(a^2A+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$$

ce qui donne : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$.

Donc toute solution f de (1) est de la forme : $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$.

On peut encore écrire que toute solution f de (1) est de la forme : $f(x)=g(x)e^{-x/2a}$ où $g\in\mathbb{R}_2[X]$.

<u>Remarque</u>.. L'égalité (*) est licite car la convergence de $\int_0^{+\infty}(3a^2-4a(x+t)+(x+t)^2)e^{-\frac{x+t}{2a}}f(t)dt$ pour tout réel x positif., donne de la convergence aux intégrales $\int_0^{+\infty}e^{-t/2a}f(t)dt$, $\int_0^{+\infty}(2t-4a)e^{-t/2a}f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}(3a^2-4at+t^2)e^{-t/2a}f(t)dt$ (se débarasser de $e^{-x/2a}$ et donner trois valeurs à x : 0, 1 et 2 ... puis faire des combinaisons linéaires).

Q6.. Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=(Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}$ et revenons sur le calcul fait en Q3..

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g_n(x)=a^{3n}(\alpha_n a^2+2\beta_n a x+\delta_n x^2)e^{-x/2a}$ nous a montré l'existence pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ de $\int_0^{+\infty}K(x+t)g_n(t)dt$ et l'égalité $\int_0^{+\infty}K(x+t)g_n(t)dt=a^{3n}e^{-\frac{x}{2a}}\left(a^3a^2(\alpha_n+2\beta_n+6\delta_n)+xa^3\,2a(-\alpha_n+2\delta_n)+x^2a^3(\alpha_n+2\beta_n+2\delta_n)\right)$ (Notons que a^{3n} est "neutre").

Par analogie on peut donc dire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$ existe et vaut $e^{-\frac{x}{2a}}\left[a^3a^2(A+2B+6C)+xa^3\,2a(-A+2C)+x^2a^3(A+2B+2C)\right]$.

Par conséquent :

f solution de (1)

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=K(x)+\int_0^{+\infty}K(x+t)f(t)dt$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ (Aa^2+2Bax+Cx^2)e^{-x/2a}=(3a^2-4ax+x^2)e^{-\frac{x}{2a}}+\left[a^5(A+2B+6C)+2a^4x(-A+2C)+x^2a^3(A+2B+2C)\right]e^{-x/2a}$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ Aa^2+2Bax+Cx^2=3a^2+a^5(A+2B+6C)+(-4a+2a^4(-A+2C))x+(1+a^3(A+2B+2C))x^2$

$$\Updownarrow\ \begin{cases} Aa^2=3a^2+a^5(A+2B+6C)\\ 2Ba=-4a+2a^4(-A+2C)\\ C=1+a^3(A+2B+2C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-a^3(A+2B+6C)=3\\ B-a^3(-A+2C)=-2\\ C-a^3(A+2B+2C)=1\end{cases} \Leftrightarrow (I_3-a^3M)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}1&2&6\\-1&0&2\\1&2&2\end{bmatrix}$$

p 15

b) Le système admet une solution et une seule

$\Updownarrow$ $(I_3 - a^3 M)$ inversible

$\Updownarrow$ $a^3 M - I_3$ inversible

$\Updownarrow$ $M - \frac{1}{a^3} I_3$ inversible

$\Updownarrow$

$\frac{1}{a^3} \notin \operatorname{spec} M$

$\Updownarrow$ $\frac{1}{a^3} \notin \{4, 1, -2\}$

$a>0$ $\Updownarrow$ $a^3 \notin \{\frac{1}{4}, 1\}$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{a \neq 1/\sqrt[3]{4} \text{ et } a = 1}}$.

Supposons $a \neq 1$ et $a \neq 1/\sqrt[3]{4}$.

Le système admet une solution et une seule. Au lieu de calculer ... vérifions que (U, V, W) est la solution !

Prouvons alors que :

$$\begin{cases} U - a^3(U + 2V + 6W) = 3 \\ V - a^3(-U + 2W) = -2 \\ W - a^3(U + 2V + 2W) = 1 \end{cases}$$

$$U + 2V + 6W = \frac{1}{1-4a^3}\left[\frac{4}{9} \underset{\text{vide!!}}{\sim\sim\sim} + 6 \times \frac{2}{9}\right] + \frac{1}{1-a^3}\left[\frac{25}{9} + 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 6\left(\frac{5}{9}\right)\right] + \frac{1}{1+2a^3}\left[-\frac{2}{9} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \times \frac{2}{9}\right]$$

$$U + 2V + 6W = \frac{1}{1-4a^3}\left[\frac{16}{9}\right] + \frac{1}{1-a^3}\left[\frac{25}{9}\right] + \frac{1}{1+2a^3}\left[\frac{4}{9}\right]$$

$$U - a^3(U + 2V + 6W) = \frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{25}{9}\frac{1}{1-a^3} - \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} - \frac{16}{9}\frac{a^3}{1-4a^3} - \frac{25}{9}\frac{a^3}{1-a^3} - \frac{4}{9}\frac{a^3}{1+2a^3}$$

$$U - a^3(U + 2V + 6W) = \frac{4}{9}\left(\frac{1-4a^3}{1-4a^3}\right) + \frac{25}{9}\frac{1-a^3}{1-a^3} - \frac{2}{9}\frac{1+2a^3}{1+2a^3} = \frac{4+25-2}{9} = \frac{27}{9} = \underline{\underline{3}}.$$

$$V - a^3(-U + 2W) = -\frac{5}{3}\frac{1}{1-a^3} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+2a^3} - a^3\left(-\frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} - \frac{25}{9}\frac{1}{1-a^3} + \frac{2}{9}\frac{1}{1+2a^3} + \frac{4}{9}\frac{1}{1-4a^3} + \frac{10}{9}\frac{1}{1-a^3} + \frac{4}{9}\frac{1}{1+2a^3}\right)$$

$$V - a^3(-U + 2W) = \frac{1}{1-a^3}\left(-\frac{5}{3} + \frac{25}{9}a^3 - \frac{10}{9}a^3\right) + \frac{1}{1+2a^3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}a^3 - \frac{4}{9}a^3\right)$$

$$V - a^3(-U + 2W) = -\frac{15}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{18}{9} = \underline{\underline{-2}}$$

$$W - a^3(U + 2V + 2W) = \frac{1}{1-4a^3}\left[\frac{2}{9} - a^3\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)\right] + \frac{1}{1-a^3}\left[\frac{5}{9} - a^3\left(\frac{25}{9} - \frac{10}{3} + \frac{10}{9}\right)\right] + \frac{1}{1+2a^3}\left[\frac{2}{9} - a^3\left(\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{9} - \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)\right] = \frac{1}{1-4a^3}\frac{2}{9}(1-4a^3) + \frac{1}{1-a^3}\frac{5}{9}(1-a^3) + \frac{1}{1+2a^3}\frac{2}{9}(1+2a^3) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \underline{\underline{1}}$$

ceci achève de prouver que pour $a \neq 1$ et $a \neq 1/\sqrt[3]{4}$ l'unique solution du système est : (U, V, W) (... ce que nous savions pour $a < 1/\sqrt[3]{4}$ ... ok ?)

(1) admet alors une unique solution : L !

Q7 1er cas : $a=1$

$$(I_3-a^3 M)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A-(A+2B+6C)=3\\B-(-A+2C)=-2\\C-(A+2B+2C)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2B-6C=3\\A+B-2C=-2\\-A-2B-C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B+3C=-3/2\\A+B-2C=-2\\-B-3C=-1\end{cases}\ !!$$

$L_3 \leftarrow L_3+L_2$

Le système n'a pas de solution.

Conclusion : Si $a=1$: (1) n'a pas de solution.

2ème cas : $a=1/\sqrt[3]{4}$

$$(I_3-a^3 M)\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}A-\frac{1}{4}(A+2B+6C)=3\\B-\frac{1}{4}(-A+2C)=-2\\C-\frac{1}{4}(A+2B+2C)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3A-2B-6C=12\\A+4B-2C=-8\\-A-2B+2C=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-14B=36\\2B=-4\end{cases}\ !$$

$L_1 \leftarrow L_1-3A$

$L_3 \leftarrow L_3+L_2$

Conclusion : Si $a=1/\sqrt[3]{4}$: (1) n'a pas de solution.

Si $a\neq 1$ et $a\neq 1/\sqrt[3]{4}$: (1) admet une solution et une seule : L.