**Rappels**.. 1°.. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $|a|-|b| \leqslant |a-b|$ et $|b|-|a| \leqslant |a-b|$. ← R1

2°.. Soit $h$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. ← R2

On suppose que $|h^{(n+1)}|$ est majorée par $M$ sur $I$.

Alors $\forall (a,b)\in I^2$, $\left|h(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}h^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\times M$.

PARTIE I $\quad n=2$ et $f\in E_2$

## Q1 Une première majoration de $M_1$.

a.. Il suffit d'appliquer R2 à $f$, $I=\mathbb{R}$, $n=1$, $a=x$, $b=x+h$ et $M=M_2$ en ayant choisi $x$ et $h$ dans $\mathbb{R}$.

Il vient alors $\left|f(x+h)-\sum_{k=0}^{1}\frac{(x+h-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{|x+h-x|^2}{2!}M_2$

ou : $|f(x+h)-(f(x)+hf'(x))| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}, h\in\mathbb{R}$, $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}$

b.. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{M_2 h^2}{2} \geqslant |f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \overset{R1}{\geqslant} |hf'(x)|-|f(x+h)-f(x)| = h|f'(x)|-|f(x+h)-f(x)|$$

Donc $h|f'(x)| \leqslant |f(x+h)-f(x)| + \frac{M_2h^2}{2} \leqslant |f(x+h)|+|f(x)|+\frac{M_2h^2}{2} \leqslant 2M_0+\frac{M_2h^2}{2}$

En divisant par $h$ $(h>0)$ il vient : $|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h}+\frac{M_2 h}{2}$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$.

En particulier $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leqslant 2M_0+\frac{M_2}{2}$ $(h=1)$ ; $f'$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$

$f$ est donc une application $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que sa dérivée première soit bornée

$f$ est donc un élément de $E_1$

Conclusion.. $E_2 \subset E_1$

c.. Montrons que : $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $u(t)=\frac{2M_0}{t}+\frac{M_2 t}{2}$. $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, u'(t)=-\frac{2M_0}{t^2}+\frac{M_2}{2}$

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $u'(t)=\frac{1}{2t^2}(M_2t^2-4M_0)$

1er cas.. $M_2=0$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall h\in\mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{h}$ ; or $\lim_{h\to+\infty}\frac{2M_0}{h}=0$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leqslant 0$. $f'$ est nulle donc $M_1$ aussi

$M_1=0\leqslant 0 = 2\sqrt{M_0M_2}$

2ème cas.. $M_0=0$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall h\in\mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)|\leqslant\frac{M_2 h}{2}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leqslant 0$ ... voir plus haut

3ème cas : $M_2 \neq 0$ et $M_0 \neq 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = \dfrac{M_2}{2t^2}\left(t^2 - 4\dfrac{M_0}{M_2}\right) = \dfrac{M_2}{2t^2}\left(t + 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)\left(t - 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)$

| $t$ | $0$ | | $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $A$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Par conséquent $\min\limits_{t \in \mathbb{R}_+^*} u(t) = u\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right) = A$

$u\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right) = 2M_0 \times 1/2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}} + \dfrac{M_2}{2} \times 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}} = \dfrac{M_0\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_0}} + \dfrac{M_2\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$

Donc $\min\limits_{t \in \mathbb{R}_+^*} u(t) = 2\sqrt{M_0 M_2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq u(h)$ ; $|f'(x)| \leq \min\limits_{h \in \mathbb{R}_+^*} u(h) = 2\sqrt{M_0 M_2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Finalement $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

## Q2 : Une seconde majoration de $M_1$.

Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

(1) donne : $|f(x+t) - f(x) - tf'(x)| \leq \dfrac{M_2 t^2}{2}$ et $|f(x-t) - f(x) + tf'(x)| \leq \dfrac{M_2 t^2}{2}$.

Donc $|(f(x+t) - f(x) - tf'(x)) - (f(x-t) - f(x) + tf'(x))| \leq |f(x+t) - f(x) - tf'(x)| + |f(x-t) - f(x) + tf'(x)| \leq M_2 t^2$

ou $|f(x+t) - f(x-t) - 2tf'(x)| \leq M_2 t^2$

$||2tf'(x)| - |f(x+t) - f(x-t)|| \underset{A_1}{\leq} |f(x+t) - f(x-t) - 2tf'(x)| \leq M_2 t^2$

Donc $|2tf'(x)| \leq M_2 t^2 + |f(x+t) - f(x-t)| \leq M_2 t^2 + |f(x+t)| + |f(x-t)| \leq M_2 t^2 + 2M_0$

Si $t > 0$ : $|f'(x)| \leq \dfrac{M_2 t^2 + 2M_0}{2t} = \dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t}$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq \dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t}$.

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \inf\limits_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t}\right)$ (cette borne inférieure existe car $t \mapsto \dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t}$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$ par $|f'(x)|$)

Il reste plus qu'à trouver cette borne inférieure.

Supposons $M_2 \neq 0$ et $M_0 \neq 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t} = \dfrac{2(M_0/2)}{t} + \dfrac{M_2 t}{2}$

En changeant $M_0$ en $M_0/2$ on retrouve $u$ ! Par conséquent : $\min\limits_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(\dfrac{M_2 t}{2} + \dfrac{M_0}{t}\right) = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{2} M_2} = \sqrt{2M_0 M_2}$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$

Si $M_2=0$ alors $M_1=0$ (voir Q1..b) et la majoration vaut encore.
Si $M_0=0$ alors $f\equiv 0$ ; $M_0=M_1=M_2=0$ ...

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$

Par conséquent $\underline{\underline{M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}}}$

---

**PARTIE II** $\quad n\geqslant 2$ . $f\in E_n$ .

## Q1 Inversibilité de la matrice $H_{n-1}$

a) $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$. Supposons $H_{n-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\end{bmatrix}=0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

$$\begin{cases}\dfrac{h_1}{1!}x_1+\dfrac{h_1^2}{2!}x_2+\cdots+\dfrac{h_1^{n-1}}{(n-1)!}x_{n-1}=0\\[2mm]\dfrac{h_2}{1!}x_1+\dfrac{h_2^2}{2!}x_2+\cdots+\dfrac{h_2^{n-1}}{(n-1)!}x_{n-1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{h_{n-1}}{1!}x_1+\dfrac{h_{n-1}^2}{2!}x_2+\cdots+\dfrac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!}x_{n-1}=0\end{cases}$$

On a donc $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h_i^k}{k!}x_k=0$

Considérons la fonction-polynôme $P: t\mapsto \dfrac{x_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-2}+\dfrac{x_{n-2}}{(n-2)!}t^{n-3}+\cdots+\dfrac{x_2}{2!}t+x_1$

$\forall t\in\mathbb{R},\ P(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{k!}t^{k-1}$. On a donc $\deg P\leqslant n-2$

$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ P(h_i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{k!}h_i^{k-1}=\frac{1}{h_i}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h_i^k}{k!}x_k=0$

$h_1,h_2,\dots,h_{n-1}$ sont donc $n-1$ zéros distincts de $P$, comme $\deg P\leqslant n-2$, $P$ est nulle

Par conséquent ses coefficients sont nuls, donc : $\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \dfrac{x_k}{k!}=0$ ; soit encore :

$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ x_k=0$ . $x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0$ .

b) Finalement : $\forall\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{n-1}\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ H_{n-1}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{n-1}\end{bmatrix}=0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{n-1}\end{bmatrix}=0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$ . $H_{n-1}$ est inversible.

## Q2.. Les inclusions de $E_n$ dans $E_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$.

Hi! Hi! $k\in[\![1,n-1]\!]$ me semble plus raisonnable !

a) $x\in\mathbb{R}$ et $k\in[\![1,n]\!]$

$F_k(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_k^i}{i!}f^{(i)}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x+h_k-x)^i}{i!}f^{(i)}(x)$

$f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$

Appliquons R2 pour $h = f$, pour $n-1$, pour $a = x$ et $b = x+h_k$

Il vient : $\displaystyle \Big| f(x+h_k) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x+h_k-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) \Big| \leq \frac{|x+h_k-x|^{n-1+1}}{(n-1+1)!} M_n$

Donc $\displaystyle \Big| f(x+h_k) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_k^i}{i!} f^{(i)}(x) \Big| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$

Soit : $\underline{\underline{\displaystyle |f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)| \leq \frac{|h_k|^n}{n!} M_n}}$.

$|f(x+h_k) - f(x)| \leq |f(x+h_k)| + |f(x)| \leq 2M_0$

$$\frac{|h_k|^n}{n!} M_n \geq |f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)| \underset{R1}{\geq} |F_k(x)| - |f(x+h_k) - f(x)| \geq |F_k(x)| - 2M_0$$

Donc $\displaystyle |F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n$

$\underline{\underline{\displaystyle \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n}}$.

b) Fixons $k$ dans $[\![1, n]\!]$. Montrons que $f \in E_k$

Si $k = n$, c'est clair !

Supposons donc $1 \leq k \leq n-1$. Pour montrer cette appartenance il suffit de prouver que $|f^{(k)}|$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1} \begin{bmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$ ; donc $\begin{bmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$

Posons $H_{n-1}^{-1} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$.

On a alors $\displaystyle f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} F_j(x)$

D'où $\displaystyle |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| |F_j(x)| \underset{\S 2\ a)}{\leq} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| \Big( 2M_0 + \frac{|h_j|^n}{n!} M_n \Big)$

$\underline{\underline{\displaystyle \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_{kj}| \Big( 2M_0 + \frac{|h_j|^n}{n!} \Big)}}$

$|f^{(k)}|$ est donc majorée sur $\mathbb{R}$ ; ceci achève de prouver que $f \in E_k$

Finalement $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall f \in E_n$, $f \in E_k$ ; $\underline{\underline{\forall k \in [\![1, n]\!]\ E_n \subset E_k}}$

## PARTIE III

### Q1.. Majoration de $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M_0$ et de $M_3$.

$n=3$. $f\in E_3$. En particulier $f'\in E_2$ (... $f'$ et $(f')''$ sont bornées ...)

I Q2 appliquée à $f'$ donne : $M_2 \leq \sqrt{2M_1M_3}$.

I Q2 appliquée à $f$ donne : $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$

On a encore : $M_1 \leq \sqrt{2M_0\sqrt{2M_1M_3}} = 2^{3/4} M_0^{1/2} M_1^{1/4} M_3^{1/4}$

Supposons $M_1 \neq 0$. $M_1^{3/4} = \dfrac{M_1}{M_1^{1/4}} \leq 2^{3/4} M_0^{1/2} M_3^{1/4}$ ; $M_1 \leq 2 M_0^{2/3} M_3^{1/3}$

cette dernière inégalité vaut encore si $M_1=0$. ($M_1=0 \Rightarrow f'\equiv 0 \Rightarrow f'''\equiv 0 \Rightarrow M_3=0$)

Donc $\underline{\underline{M_1 \leq 2 M_0^{2/3} M_3^{1/3}}}$.

$M_2 \leq \sqrt{2\times 2M_0^{2/3}M_3^{1/3}M_3}$ car $M_2 \leq \sqrt{2M_1M_3}$.

Donc $\underline{\underline{M_2 \leq 2 M_0^{1/3} M_3^{2/3}}}$

### Q2.- Une seconde majoration de $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M_0$ et $M_3$.

a) Soit $(x,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

R2 avec $n=2$, $a=x$, $b=x+h$ donne : $\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right| \leq \frac{h^3}{6}M_3$

R2 avec $n=2$, $a=x$, $b=x-h$ donne : $\left|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right| \leq \frac{h^3}{6}M_3$

Donc $\left|\left(f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right)-\left(f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right)\right| \leq |\cdots|+|\cdots| \leq \frac{h^3}{6}M_3+\frac{h^3}{6}M_3=\frac{h^3}{3}M_3$

Soit : $|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| \leq \frac{h^3}{3}M_3$.   $|f(x+h)-f(x-h)| \leq |f(x+h)|+|f(x-h)| \leq 2M_0$

$\frac{h^3}{3}M_3 \geq |f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| \underset{R1}{\geq} 2h|f'(x)|-|f(x+h)-f(x-h)| \geq 2h|f'(x)|-2M_0$

Il vient alors : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2h}\left(\frac{h^3}{3}M_3+2M_0\right)$.

Finalement: $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{M_3h^2}{6}+\frac{M_0}{h}}}$ et ceci pour tout $h\in\mathbb{R}_+^*$.

$\left|\left(f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right) + \left(f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right)\right| \leq |\ \ |+|\ \ | \leq \frac{h^3}{6}M_3+\frac{h^3}{6}M_3=\frac{h^3M_3}{3}$

ou : $|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-h^2f''(x)| \leq \frac{h^3M_3}{3}$.   $|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leq |f(x+h)|+|f(x-h)|+2|f(x)| \leq 4M_0$

Donc $\frac{h^3M_3}{3} \geq |f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-h^2f''(x)| \underset{R1}{\geq} h^2|f''(x)|-|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \geq h^2|f''(x)|-4M_0$

Donc $\quad h^2|f''(x)| \le \frac{h^3 M_3}{3} + 4M_0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h\in\mathbb{R}_+^*,\ |f''(x)| \le \frac{M_3 h}{3} + \frac{4M_0}{h^2}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)| \le \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3h^2}{6}+\frac{M_0}{h}\right)$ et $|f''(x)| \le \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3h}{3}+\frac{4M_0}{h^2}\right)$

Donc $M_1 \le \alpha$ avec $\alpha = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3h^2}{6}+\frac{M_0}{h}\right)$ et $M_2 \le \beta$ avec $\beta = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3h}{3}+\frac{4M_0}{h^2}\right)$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $v(t) = \frac{M_3t^2}{6}+\frac{M_0}{t}$ et $w(t) = \frac{M_3t}{3}+\frac{4M_0}{t^2}$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $v'(t) = \frac{M_3t}{3}-\frac{M_0}{t^2}$ et $w'(t) = \frac{M_3}{3}-\frac{8M_0}{t^3}$

1er cas.. $M_3\neq 0$ et $M_0\neq 0$.

| $t$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $v(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $t$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\frac{24M_0}{M_3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w'(t)$ | | | $0$ | | |
| $w(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Par conséquent : $\alpha = v\left(\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}\right) = \frac{M_3}{6}\left(\frac{3M_0}{M_3}\right)^{2/3} + M_0\left(\frac{M_3}{3M_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{1/3}}+\frac{1}{3^{1/3}}\right)M_0^{2/3}M_3^{1/3} = \frac{3^{2/3}}{2}M_0^{2/3}M_3^{1/3}$

et $\beta = w\left(\sqrt[3]{\frac{24M_0}{M_3}}\right) = w\left(2\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}\right) = \frac{M_3}{3}\times 2\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}} + 4M_0\left(2\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3^{2/3}}+\frac{1}{3^{2/3}}\right)M_0^{1/3}M_3^{2/3} = 3^{1/3}M_0^{1/3}M_3^{2/3}$

En conséquence : $M_1 \le \frac{3^{2/3}}{2}M_0^{2/3}M_3^{1/3}$ et $M_2 \le 3^{1/3}M_0^{1/3}M_3^{2/3}$

2ème cas.. $M_3 = 0$. $\alpha = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3h^2}{6}+\frac{M_0}{h}\right) = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}\frac{M_0}{h} = 0$ ; $0 \le M_1 \le \alpha = 0$

$M_1 = M_3 = 0$ ; en particulier : $M_1 \le \frac{3^{2/3}}{2}M_0^{2/3}M_3^{1/3}$

$\beta = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{M_3t}{3}+\frac{4M_0}{t^2}\right) = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{4M_0}{t^2}\right) = 0$ ; $0 \le M_2 \le \beta = 0$

$M_2 = M_3 = 0$ ; en particulier : $M_2 \le 3^{1/3}M_0^{1/3}M_3^{2/3}$

3ème cas.. $M_0 = 0$. $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$ ; $f', f'', f'''$ aussi ; donc $M_0 = M_1 = M_2 = M_3 = 0$.

Les deux inégalités sont alors encore vraies.

Finalement : $M_1 \le \frac{1}{2}3^{2/3}M_0^{2/3}M_3^{1/3}$ et $M_2 \le 3^{1/3}M_0^{1/3}M_3^{2/3}$.

## Q3.- Majoration de $M_{n-1}$ en fonction de $M_0$ et de $M_n$.

$n \geq 2$ et $f \in E_n$

a) $f^{(n-2)}$ appartient à $E_2$ ; on peut donc appliquer I Q2 qui donne :

$M_{n-1} \leq \sqrt{2 M_{n-2} M_n}$ ( $\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f^{(n-2)})'(x)| = M_{n-1}$ , $\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f^{(n-2)})''(x)| = M_n$ )

b) Admirable question !

1°. Elle est inutile car on pouvait faire la récurrence directement sur l'inégalité proposée en c)

2°.. Elle est catastrophique dans sa formulation. Au début de Q3 n est fixé ; ici n indexe une suite. De plus quel est l'indice du premier terme ? A priori 2 ! Mais alors comment valider $a_n^n \leq 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}$ pour $n = 2$.

De plus pourquoi ne pas écrire $a_n^n = 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}$ !

Posons $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a_n = \sqrt[n]{2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}}$

Une récurrence simple montre que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est définie et à termes (strictement) positifs.

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow a_n^n = 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1} \Rightarrow a_n^n \leq 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}$ !

Il ne reste plus, pour répondre à la question, qu'à prouver que :

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall f \in E_n$, $M_{n-1} \leq a_n M_0^{1/n} M_n^{1-1/n}$. Faisons une récurrence

→ Soit $f \in E_2$. $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$ $\quad a_2 = \sqrt[2]{2^{2-1} a_{2-1}^{2-1}} = \sqrt{2 a_1} = \sqrt{2}$

Donc $M_1 \leq \sqrt{2}\, M_0^{1/2} M_2^{1-1/2} = a_2 M_0^{1/2} M_2^{1-1/2}$

La propriété vaut pour $n=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in [\![2,+\infty[\![$. Montrons-la pour $n+1$.

Soit $f \in E_{n+1}$ ; en particulier $f \in E_n$. L'hypothèse de récurrence donne alors

$M_{n-1} \leq a_n M_0^{1/n} M_n^{1-1/n}$. Nous devons montrer que : $M_n \leq a_{n+1} M_0^{1/(n+1)} M_{n+1}^{1-1/(n+1)}$

Nous avons montré, dans Q3 a), que pour $f \in E_n$ : $M_{n-1} \leq \sqrt{2 M_{n-2} M_n}$

Par conséquent, ici : $M_n \leq \sqrt{2 M_{n-1} M_{n+1}}$

Donc : $M_n \leq (2 a_n M_0^{1/n} M_n^{1-1/n} M_{n+1})^{1/2}$ ; $M_n^2 \leq 2 a_n M_0^{1/n} M_n^{1-1/n} M_{n+1}$

Si $\Pi_n = 0$ il semble clair que : $\Pi_n \le a_{n+1}\Pi_0^{1/n}\Pi_{n+1}^{1-1/n}$

Supposons donc $\Pi_n \neq 0$

Alors $\Pi_n^{2-1+1/n} \le 2a_n \Pi_0^{1/n}\Pi_{n+1}$ (en divisant par $\Pi_n^{1-1/n}$)

Soit : $\Pi_n^{1+1/n} \le 2a_n\Pi_0^{1/n}\Pi_{n+1}$

ce qui donne : $\Pi_n \le \left(2a_n\Pi_0^{1/n}\Pi_{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[n+1]{(2a_n)^n}\ \Pi_0^{\frac{1}{n+1}}\ \Pi_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}$

$$\Pi_n \le \sqrt[n+1]{2^n a_n^n}\ \Pi_0^{\frac{1}{n+1}}\ \Pi_{n+1}^{1-\frac{1}{n+1}} = a_{n+1}\,\Pi_0^{\frac{1}{n+1}}\,\Pi_{n+1}^{1-\frac{1}{n+1}}.$$

Ce qui achève la récurrence.

Nous avons donc montré l'existence d'une suite $(a_n)_{n\ge 1}$ telle que :

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\forall f\in E_n$, $\Pi_{n-1} \le a_n\Pi_0^{1/n}\Pi_n^{1-1/n}$ et $a_n^n \le 2^{n-1}a_{n-1}^{n-1}$.

$a_1 = 1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $a_n = \sqrt[n]{2^{n-1}a_{n-1}^{n-1}}$

c) Montrons par récurrence que : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$

C'est clair pour $n=2$ car $a_2 = \sqrt{2}$

Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et $n\ge 2$, montrons la pour $n+1$.

$$a_{n+1} = \left(2^n a_n^n\right)^{1/n+1} \underset{H.R.}{=} \left(2^n\times\left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(2^{n\left(1+\frac{n-1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(2^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n+1-1}{2}}$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$ et $f\in E_n$ :

$$\Pi_{n-1} \le a_n\Pi_0^{1/n}\Pi_n^{1-1/n} = 2^{\frac{n-1}{2}}\,\Pi_0^{\frac{1}{n}}\,\Pi_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $\forall f\in E_n$, $\Pi_{n-1} \le 2^{\frac{n-1}{2}}\,\Pi_0^{\frac{1}{n}}\,\Pi_n^{\frac{n-1}{n}}$

## Q4. Majoration de $\Pi_k$ en fonction de $\Pi_0$ et de $\Pi_n$ ($0\le k\le n$)

$n\ge 2$ et $f\in E_n$.

Montrons que : $\forall k\in [\![0,n]\!]$, $\Pi_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}\,\Pi_0^{\frac{n-k}{n}}\,\Pi_n^{\frac{k}{n}}$

C'est évident pour $k=0$.

Reste donc à montrer que : $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $\Pi_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}\,\Pi_0^{\frac{n-k}{n}}\,\Pi_n^{\frac{k}{n}}$ ou que : Permet d'écrire une récurrence descendante !!

$\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $\Pi_{n-k} \le 2^{\frac{(n-k)k}{2}}\,\Pi_0^{\frac{k}{n}}\,\Pi_n^{\frac{n-k}{n}}$

Montrons ce dernier résultat par récurrence.

- C'est vrai pour $k=0$ $(M_n \leq M_n)$
- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$n-k \geq 2$ donc $M_{(n-k)-1} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n-k}} M_{n-k}^{\frac{n-k-1}{n-k}}$

L'hypothèse de récurrence donne : $M_{n-k} \leq 2^{\frac{(n-k)k}{2}} M_0^{k/n} M_n^{\frac{n-k}{n}}$

Par conséquent $M_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n-k}} \left(2^{\frac{n-k}{2}k} M_0^{k/n} M_n^{\frac{n-k}{n}}\right)^{\frac{n-k-1}{n-k}}$

$$M_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{n-k-1}{2}+\frac{k(n-k-1)}{2}} M_0^{\frac{1}{n-k}+\frac{k(n-k-1)}{n(n-k)}} M_n^{\frac{n-k-1}{n}}$$

$$M_{n-(k+1)} \leq 2^{\frac{(n-(k+1))(k+1)}{2}} M_0^{\frac{(n-k)(k+1)}{n(n-k)}} M_n^{\frac{n-k-1}{n}} = 2^{\frac{(n-(k+1))(k+1)}{2}} M_0^{\frac{k+1}{n}} M_n^{\frac{n-(k+1)}{n}}$$

ceci achève la récurrence

En conséquence : $\underline{\underline{\forall k \in [\![0,n]\!],\ M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{\frac{n-k}{k}} M_n^{\frac{k}{n}}}}$

---

PARTIE IV

a) 1ère étape.. prouvons que $\omega_p$ est périodique de période 4 sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \omega_p(x+4) = \omega_p(2+x+2) = -\omega_p(x+2) = -\omega_p(2+x) = \omega_p(x)$

2ème étape.. montrons que f est continue <u>en tout point</u> de $[0,1]$.

$\omega_p$ est continue sur $[0, 1-\frac{1}{2p}]$ $(\forall x \in [0, 1-\frac{1}{2p}], \omega_p(x) = 2)$ et sur $[1-\frac{1}{2p}, 1]$ (car $\forall x \in [1-\frac{1}{2p}, 1], \omega_p(x) = 2\sin(p\pi(1-x))$)

$\omega_p$ est donc continue en tout point de $]0, 1-\frac{1}{2p}[ \cup ]1-\frac{1}{2p}, 1[$, continue à droite en 0 et en $1-\frac{1}{2p}$, à gauche en 1 et en $1-\frac{1}{2p}$.

Ne reste donc plus, pour avoir la continuité en tout point de $[0,1]$ de montrer la continuité <u>à gauche en 0</u> et <u>à droite en 1</u>.

$\lim_{x\to 0^-} \omega_p(x) = \lim_{x\to 0^+} \omega_p(-x) \underset{\omega_p(-x)=\omega_p(x)}{=} \lim_{x\to 0^+} \omega_p(x) = \omega_p(0)$ ; $\omega_p$ est donc continue à gauche en 0.

$\lim_{x\to 1^+} \omega_p(x) = \lim_{x\to -1^-} \omega_p(-x) = \lim_{x\to -1^-} \omega_p(x) = \lim_{x\to -1^-} (-\omega_p(x+2)) = -\lim_{x\to 1^-} \omega_p(x) = -\omega_p(1) = 0 = \omega_p(1)$ !

$\omega_p$ est continue à droite en 1

3ème étape - montrons que $\omega_p$ est continue en tout point de $[-1,1]$.

C'est vrai pour un point de $[0,1]$. Soit $a \in [-1,0]$, $-a \in [0,1]$.

$\lim\limits_{x\to a} w_p(x) = \lim\limits_{x\to -a} w_p(-x) = \lim\limits_{x\to -a} w_p(x) = w_p(-a) = w_p(a)$ ; $w_p$ est donc continue en a.

4ème étape.. Montrons que $w_p$ est continue en tout point de $[-2,2]$

C'est clair pour les points de $[-1,1]$

Soit $a \in [-2,-1]$ ; $a+2 \in [0,1]$

$\lim\limits_{x\to a} w_p(x) = \lim\limits_{x\to a+2} w_p(x-2) = \lim\limits_{x\to a+2} -w_p((x-2)+2) = -\lim\limits_{x\to a+2} w_p(x) = -w_p(a+2) = w_p(a)$ ; $w_p$ est continue en a.

Même chose ou presque pour $a \in [1,2]$.

5ème étape.. Montrons que $w_p$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$

$w_p$ est périodique de période 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\exists n \in \mathbb{Z}$, $-2 \le a+4n \le 2$ $\quad (n = E(-\frac{a+2}{4})+1)$

$\lim\limits_{x\to a} w_p(x) \overset{y=x+4n}{=} \lim\limits_{y\to a+4n} w_p(y-4n) = \lim\limits_{y\to a+4n} w_p(y) = w_p(a+4n) = w_p(a)$ ; $w_p$ est continue en a.

Finalement $w_p$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Representation graphique

b) Donner "l'" expression ?

$\forall x \in [0,1]$, $v_p(x) = \int_0^x w_p(t)\,dt$ (fin!).

Donc $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{2p}]$, $v_p(x) = \int_0^x 2\,dt = 2x$

$\forall x \in [1-\frac{1}{2p}, 1]$, $v_p(x) = v_p(1-\frac{1}{2p}) + \int_{1-\frac{1}{2p}}^{x} 2\sin(p\pi(1-t))\,dt = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}\left[\cos(p\pi(1-t))\right]_{1-\frac{1}{2p}}^{x}$

$\forall x \in [1-\frac{1}{p}, 1]$, $V_p(x) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}\cos(p\pi(1-x))$

Conclusion.. $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{2p}],\ v_p(x) = 2x$ et $\forall x \in [1-\frac{1}{2p}, 1],\ v_p(x) = 2 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}\cos(p\pi(1-x))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $v_p(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} w_p(t)\,dt \underset{u=-t}{=} \int_0^x w_p(-u)(-du) \underset{w_p(-u)=w_p(u)}{=} -\int_0^x w_p(u)\,du = -v_p(x)$.

$$v_p(2+x) = \int_0^{2+x} w_p(t)\,dt \underset{t=u+2}{=} \int_{-2}^{x} w_p(u+2)\,du \underset{w_p(u+2)=-w_p(u)}{=} -\int_{-2}^{x} w_p(u)\,du = \int_0^{-2} w_p(u)\,du - \int_0^x w_p(u)\,du$$

$v_p(2+x) = v_p(-2) - v_p(x)$. Ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x=0$.

Par conséquent $v_p(2+0) = v_p(-2) - v_p(0) = v_p(-2)$

Donc $v_p(2) = v_p(-2)$. Nous avons vu plus haut que $v_p(-x) = -v_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;

donc $v_p(2) = v_p(-2)$ et $v_p(2) = -v_p(-2)$ ; $v_p(2) = v_p(-2) = 0$.

Finalement: $\forall x \in \mathbb{R},\ v_p(-x) = -v_p(x)$ et $v_p(2+x) = -v_p(x)$

Donnons une seconde version pour la seconde égalité.

$\varphi : x \mapsto v_p(2+x) + v_p(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = w_p(2+x) + w_p(x) = 0$

$\varphi$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(-1) = v_p(1) + v_p(-1) \overset{v_p(-1)=-v_p(1)}{=} 0$.

<u>Remarque</u>.. $\forall x \in \mathbb{R},\ v_p(x+4) = -v_p(x+2) = v_p(x)$ ; $v_p$ est périodique de période 4.

Représentation graphique

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ u_p(x) = \int_1^x v_p(t)\,dt$.

Soit $x \in [1-\frac{1}{2p}, 1]$, $u_p(x) = \int_1^x \left(2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}\cos(p\pi(1-t))\right)dt = (2-\frac{1}{p})(x-1) + \frac{2}{p\pi}\left(-\frac{1}{p\pi}\right)\left[\sin(p\pi(1-t))\right]_1^x$

$u_p(x) = (2-\frac{1}{p})(x-1) - \frac{2}{(p\pi)^2}\sin(p\pi(1-x))$ ; notons que : $u_p(1-\frac{1}{2p}) = (2-\frac{1}{p})(-\frac{1}{2p}) - \frac{2}{(p\pi)^2} = -\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}-\frac{2}{(p\pi)^2}$.

Soit $x \in [0, 1-\frac{1}{2p}]$ ; $u_p(x) = \int_1^x v_p(t)\,dt = \int_1^{1-\frac{1}{2p}} v_p(t)\,dt + \int_{1-\frac{1}{2p}}^x 2t\,dt = u_p(1-\frac{1}{2p}) + x^2 - (1-\frac{1}{2p})^2$

$$u_p(x) = -\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}-\frac{2}{(p\pi)^2}+x^2-1-\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{p} = x^2-1+\frac{1}{4p^2}-\frac{2}{(p\pi)^2}.$$

Finalement : $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{2p}]$, $u_p(x) = x^2-1+\frac{1}{4p^2}-\frac{2}{(p\pi)^2}$ et $\forall x \in [1-\frac{1}{2p}, 1]$, $u_p(x) = (2-\frac{1}{p})(x-1) - \frac{2}{(p\pi)^2}\sin(p\pi(1-x))$

Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto u_p(x) - u_p(-x)$

$\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = u_p'(x) + u_p'(-x) = v_p(x) + v_p(-x) = 0$.

$\varphi$ est constante sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) = 0$ ; $\varphi$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ u_p(-x) = u_p(x).}}$

Considérons la fonction $\ell : x \mapsto u_p(x+2) + u_p(x)$

$\ell$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = v_p(x+2) + v_p(x) = 0$. $\ell$ est constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) = \ell(-1) = u_p(1) + u_p(-1) = 2u_p(1) = 0$. $\ell$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ u_p(x+2) = -u_p(x)}}$

oui !

**d)** $M_0(p) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_p(x)| = \sup\limits_{x\in[-3,1]} |u_p(x)| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |u_p(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u_p(x)|$

u est périodique de période 4 $\quad \forall x\in\mathbb{R},\ u_p(x+2)=u_p(x) \quad \forall x\in\mathbb{R},\ u_p(-x)=u_p(x)$

De même $M_1(p) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u'_p(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |v_p(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |v_p(x)|$ et

$$M_2(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u''_p(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |w_p(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |w_p(x)| .$$

Rappelons que : $\forall x\in\left[0, 1-\frac{1}{2p}\right],\ w_p(x) = 2$ et $\forall x\in\left[1-\frac{1}{2p}, 1\right],\ w_p(x) = 2\sin(p\pi(1-x))$

$\forall x\in\left[1-\frac{1}{2p}, 1\right],\ |w_p(x)| = |2\sin(p\pi(1-x))| \leq 2$

Donc $\forall x\in[0,1],\ |w_p(x)| \leq 2 = |w_p(0)|$.

Par conséquent : $\underline{\underline{M_2(p) = 2}}$. $\quad \underline{\underline{\lim\limits_{p\to+\infty} M_2(p) = 2}}$.

$\forall x\in\left[0, 1-\frac{1}{2p}\right],\ v_p(x) = 2x$ et $\forall x\in\left[1-\frac{1}{2p}, 1\right],\ v_p(x) = 2-\frac{1}{p} + \frac{2}{p\pi}\cos(p\pi(1-x))$

$\forall x\in\left[0, 1-\frac{1}{2p}\right],\ 0 \leq v_p(x) \leq 2-\frac{1}{p}$ ; mieux $\max\limits_{x\in\left[0,1-\frac{1}{2p}\right]} |v_p(x)| = v_p\left(1-\frac{1}{2p}\right) = 2-\frac{1}{p}$

$\forall x\in\left[1-\frac{1}{2p}, 1\right],\quad 0 \leq p\pi(1-x) \leq \frac{\pi}{2}$

$\forall x\in\left[1-\frac{1}{2p}, 1\right],\quad 2-\frac{1}{p} \leq v_p(x) \leq 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi} = v_p(1)$.

$\max\limits_{x\in\left[1-\frac{1}{2p},1\right]} |v_p(x)| = v_p(1) = 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}$

Finalement : $M_1(p) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |v_p(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |v_p(x)| = \max\left(2-\frac{1}{p}, 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}\right) = 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}$.

$\underline{\underline{M_1(p) = 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}}}$ ; $\quad \underline{\underline{\lim\limits_{p\to+\infty} M_1(p) = 2}}$.

<u>Remarque</u>.. Plus simplement ! $\forall x\in[0,1],\ w_p(x)\geq 0$. $v_p$ est donc croissante sur $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1],\quad 0 = v_p(0) \leq v_p(x) \leq v_p(1) = 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}$. Clairement $M_1(p) = 2-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\pi}$.

Nous venons de voir que : $\forall x\in[0,1],\ v_p(x)\geq v_p(0)=0$. $v_p$ est positive sur $[0,1]$ donc $u_p$ est croissante sur $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1],\ u_p(0) \leq u_p(x) \leq u_p(1) = 0$ ; $\quad \max\limits_{x\in[0,1]} |u_p(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} (-u_p(x)) = -u_p(0)$

Donc $\underline{\underline{M_0(p)}} = -u_p(0) = -\left(0^2-1+\frac{1}{4p^2}-\frac{2}{(p\pi)^2}\right) = \underline{\underline{1-\frac{1}{4p^2}+\frac{2}{(p\pi)^2}}}$. $\quad \lim\limits_{p\to+\infty} M_0(p) = 1$.

I 2° donne : $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$ pour tout $f \in E_2$.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $M_1 \leq \lambda \sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $f \in E_2$.

Alors $\forall p \in [\![2,+\infty[\![$ $M_1(p) \leq \lambda \sqrt{M_0(p) M_2(p)}$ car $\forall p \in [\![2,+\infty[\![$, $u_p \in E_2$.

A la limite : $2 \leq \lambda \sqrt{2 \times 2}$ ; $2 \leq \lambda \sqrt{2}$ ; $\lambda \geq \sqrt{2}$

La majoration de $M_1$ par $\sqrt{2 M_0 M_2}$ est donc optimale.

c) Des raisonnements analogues aux précédents prouvent que :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $U_p(-x) = -U_p(x)$ et $U_p(x+2) = -U_p(x)$.

Donc $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |U_p(x)| = \max\limits_{x \in [0,1]} |U_p(x)|$.

$\forall x \in [0,1]$, $U_p'(x) = u_p(x) \leq 0$. $U_p$ est décroissante sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $U_p(1) \leq U_p(x) \leq U_p(0) = 0$

Par conséquent : $\max\limits_{x \in [0,1]} |U_p(x)| = -U_p(1)$

$$U_p(1) = \int_0^1 u_p(t)\,dt = \int_0^{1-\frac{1}{2p}} \left(t^2 - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}\right) dt + \int_{1-\frac{1}{2p}}^1 \left[\left(2-\frac{1}{p}\right)(t-1) - \frac{2}{(p\pi)^2} \sin(p\pi(1-t))\right] dt$$

$$U_p(1) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2p}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{2p}\right)\left(-1+\frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}\right) + \left[\left(2-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{(t-1)^2}{2}\right) - \frac{2}{(p\pi)^2}\frac{1}{(-(p\pi))}\left(-\cos(p\pi(1-t))\right)\right]_{1-\frac{1}{2p}}^1$$

$$U_p(1) = \left(1-\frac{1}{2p}\right)\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12p^2} - \frac{1}{3p} - 1 + \frac{1}{4p^2} - \frac{2}{(p\pi)^2}\right] - \left(2-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4p^2}\right) + \frac{2}{(p\pi)^3}$$

$$U_p(1) = \left(1-\frac{1}{2p}\right)\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3p^2} - \frac{1}{3p} - \frac{2}{(p\pi)^2}\right) - \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{8p^3} + \frac{2}{(p\pi)^3} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{24p^3} - \frac{2}{(p\pi)^2} + \frac{1}{p(p\pi)^2} + \frac{2}{(p\pi)^3}$$

$U_p(1) = -\frac{2}{3} + o(1)$ ! Notons donc que : $\lim\limits_{p \to +\infty} -U_p(1) = \frac{2}{3}$. $\lim\limits_{p \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)| = \frac{2}{3}$.

Posons $\hat{M}_0(p) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p(x)|$, $\hat{M}_1(p) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p'(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)| = M_0(p)$, $\hat{M}_2(p) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p''(x)| = M_1(p)$ et
$\hat{M}_3(p) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |U_p'''(x)| = M_2(p)$. $\lim \hat{M}_0(p) = \frac{2}{3}$ ; $\lim\limits_{p \to +\infty} \hat{M}_1(p) = 1$ ; $\lim\limits_{p \to +\infty} \hat{M}_2(p) = \lim\limits_{p \to +\infty} \hat{M}_3(p) = 2$.

III 2° donne : $\forall f \in E_3$, $M_1 \leq \boxed{\frac{1}{2} 3^{2/3}} M_0^{2/3} M_3^{1/3}$ et $M_2 \leq \boxed{3^{1/3}} M_0^{1/3} M_3^{2/3}$

Supposons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall f \in E_3$, $M_1 \leq \alpha M_0^{2/3} M_3^{1/3}$ et $M_2 \leq \beta M_0^{1/3} M_3^{2/3}$

Alors $\forall p \in [\![2,+\infty[\![$, $\hat{M}_1(p) \leq \alpha \hat{M}_0^{2/3}(p) \hat{M}_3^{1/3}(p)$ et $\hat{M}_2(p) \leq \beta \hat{M}_0^{1/3}(p) \hat{M}_3^{2/3}(p)$ ; à la limite :
$1 \leq \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} 2^{1/3}$ et $2 \leq \beta (2/3)^{1/3} 2^{2/3}$ ; $\alpha \geq \frac{1}{2} 3^{2/3}$ et $\beta \geq 3^{1/3}$ ce qui prouve l'optimalité des majorations de III 2°.