PARTIE II : étude d'une intégrale

Q1 a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties $I(p,q) = \int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q\,dt$

$$I(p,q) = \int_0^1 \underset{u'}{t^{2p}}\,\underset{v}{(1-t^2)^q}\,dt = \left[\frac{1}{2p+1}t^{2p+1}(1-t^2)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2p+1}t^{2p+1}q(-2t)(1-t^2)^{q-1}\,dt$$

$$I(p,q) = \frac{2q}{2p+1}\int_0^1 t^{2p+2}(1-t^2)^{q-1}\,dt = \frac{2q}{2p+1}\,I(p+1,q-1).$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{2q}{2p+1}\,I(p+1,q-1).$$

b) * Recherche de la formule..

$$I(p,q) = \frac{2q}{2p+1}I(p+1,q-1) = \frac{2q}{2p+1}\times\frac{2(q-1)}{2p+3}\times I(p+2,q-2) = \frac{2q}{2p+1}\times\frac{2(q-1)}{2p+3}\times\cdots\times\frac{2\times 1}{2(p+q)-1}\,I(p+q,0)$$

$$I(p,q) = \frac{2^q\,q!}{\prod_{k=p}^{p+q-1}(2k+1)}\,I(p+q,0). \quad I(p+q,0) = \int_0^1 t^{2(p+q)}\,dt = \frac{1}{2p+2q+1}$$

$$I(p,q) = \frac{2^q\,q!}{\prod_{k=p}^{p+q}(2k+1)} \quad \cdot \prod_{k=p}^{p+q}(2k+1) = (2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2q+1) = \frac{(2p+2q+1)!}{(2p)!\,(2p+2)(2p+4)\cdots(2p+2q)}$$

$$= \frac{(2p+2q+1)!}{(2p)!\,2^q\,(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} = \frac{(2p+2q+1)!\,p!}{(2p)!\,2^q\,(p+q)!}$$

donc $$I(p,q) = \frac{2^q\,q!\,(2p)!\,2^q\,(p+q)!}{(2p+2q+1)!\,p!}$$

Soit : $$I(p,q) = \frac{2^{2q}\,q!\,(p+q)!\,(2p)!}{(2p+2q+1)!\,p!}$$

* Démonstration de la formule.

Montrons par récurrence sur q que pour tout $q \in \mathbb{N}$, la propriété $\forall p \in \mathbb{N}, I(p,q) = \frac{2^{2q}q!(p+q)!(2p)!}{(2p+2q+1)!\,p!}$ est vraie.

- Pour $q=0$. $I(p,0) = \int_0^1 t^{2p}\,dt = \frac{1}{2p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{2^{2\times 0}\,0!\,(p+0)!\,(2p)!}{(2p+2\times 0+1)!\,p!} = \frac{2p!}{(2p+1)!} = \frac{1}{2p+1} \quad \text{et ceci pour tout } p \in \mathbb{N}$$

La propriété est donc vraie pour $q=0$.

Supposons la propriété vraie pour $q \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $q+1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que : $I(p,q+1) = \dfrac{2^{2q+2}\,(q+1)!\,(p+q+1)!\,(2p)!}{(2p+2q+3)!\ p!}$.

D'après la question a) : $I(p,q+1) = \dfrac{2(q+1)}{2p+1}\, I(p+1,q)$

D'après l'hypothèse de récurrence : $I(p+1,q) = \dfrac{2^{2q}\ q!\ (p+1+q)!\ (2p+2)!}{(2p+2+2q+1)!\ (p+1)!}$

Donc $I(p,q+1) = \dfrac{2^{2q+1}(q+1)!\,(p+q+1)!\,(2p+2)!}{(2p+1)\,(2p+2q+3)!\ (p+1)!}$ or $\dfrac{(2p+2)!}{(2p+1)(p+1)!} = \dfrac{2(p+1)\,(2p)!}{(p+1)!} = \dfrac{2\,(2p)!}{p!}$

Donc $I(p,q+1) = \dfrac{2^{2q+2}\,(q+1)!\,(p+q+1)!\,(2p)!}{(2p+2q+3)!\ p!}$; ceci achève la récurrence.

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q) = \frac{2^{2q}\,q!\,(p+q)!\,(2p)!}{(2p+2q+1)!\ p!} = \frac{2^{2q}}{2p+2q+1} \times \frac{C_{2p}^{p}}{C_{2p+2q}^{p+q}\ C_{p+q}^{p}}$$

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N},\ J(p) = I(p,p) = \dfrac{2^{2p}\left((2p)!\right)^2}{(4p+1)!}$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ J(p) = \frac{\left[2^p \times (2p)!\right]^2}{(4p+1)!} = \frac{2^{2p}}{4p+1} \times \frac{1}{C_{4p}^{2p}}$$

c) Posons $\forall t \in [0,1],\ u(t) = t^2(1-t^2)$. u est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1],\ u'(t) = 2t - 4t^3 = 4t\left(\frac{1}{2} - t^2\right)$

t	0		$1/\sqrt{2}$		1
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
$u(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc $\max\limits_{t \in [0,1]} u(t) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$$\max_{t \in [0,1]} t^2(1-t^2) = \frac{1}{4}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1],\ 0 \le t^{2p}(1-t^2)^p = \left[t^2(1-t^2)\right]^p \le \left(\frac{1}{4}\right)^p$

Intégrons : $0 \le I(p,p) = J(p) \le \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4^p}\,dt = \frac{1}{4^p}$.

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \le J(p) \le \dfrac{1}{4^p}$.

Q2 a) Rappel.. Extrait du programme " On définira les fonctions circulaires réciproques mais aucune étude systématique de ces fonctions n'est au programme "

On n'est donc pas obligé de savoir que Arctan est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \underset{\substack{t = \tan\theta \\ dt = (1+\tan^2\theta)d\theta}}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2\theta)\, d\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\pi}{4}. \qquad \underline{\underline{f(1) = \frac{\pi}{4}.}}$$

b) Soit $a \in]1,+\infty[$.

$$f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \int_0^{\frac{a-1}{a+1}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/a}^{1} \frac{\frac{a^2+1}{(x+a)^2}}{1+\left(\frac{ax-1}{x+a}\right)^2}\, dx = \int_{1/a}^{1} \frac{a^2+1}{x^2+a^2+2ax+a^2x^2+1-2ax}\, dx = \int_{1/a}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$t = \frac{ax-1}{x+a}\ ;\ dt = \frac{(a^2+1)dx}{(x+a)^2}\ ;\ x = \frac{at+1}{a-t}$$

__Remarque__.. $t \mapsto \frac{at+1}{a-t}$ est une bijection de classe C^1 de $[0, \frac{a-1}{a+1}]$ sur $[\frac{1}{a}, 1]$.

Donc $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \int_{1/a}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{1/a} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + f(a) = \frac{\pi}{4} + f(a)$.

Donc $\underline{\underline{\forall a \in]1,+\infty[,\ f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1) = \frac{\pi}{4}.}} \qquad (1)$

c) Soit $a \in [1,+\infty[$

$$f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1+t^2} \underset{u = ta}{=} \int_0^1 \frac{\frac{1}{a}du}{1+\frac{u^2}{a^2}} = a\int_0^1 \frac{du}{a^2+u^2}$$

$$\underline{\underline{\forall a \in [1,+\infty[,\ f(a) = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}}}$$

Remarque.. Il ne faut pas se cacher que : $\underline{\underline{\forall a \in [1,+\infty[,\ f(a) = \text{Arctan}\,\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, a.}}$

PARTIE II : étude d'une suite de polynomes

$\boxed{b = a^2 + 1}$

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n(-a^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda_n (-a^2)^n (1+a^2)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = -\frac{1}{(-1)^n a^{2n}(1+a^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n}(1+a^2)^n}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{\lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2n}(1+a^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(a^2b)^n}}}$

Q2 a) $P_0 = 1 + \lambda_0 X^0(1-X)^0 = 1 + \lambda_0 = 1 + \frac{(-1)}{1} = 0$

$\underline{\underline{P_0 = \varphi_0 = 0}}$

$$P_1 = 1 + \lambda_1 X(1-X) = 1 + \frac{1}{a^2(1+a^2)} X(1-X) = \frac{1}{a^2(1+a^2)}\left[a^2(1+a^2) + X - X^2\right] = \frac{1}{a^2(1+a^2)}(X+a^2)(-X+1+a^2)$$

donc $\underline{\underline{\varphi_1 = \frac{1}{a^2(1+a^2)}(-X+1+a^2) = \frac{1}{a^2b}(-X+b)}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1} - P_n = 1 + \lambda_{n+1} X^{n+1}(1-X)^{n+1} - 1 - \lambda_n X^n(1-X)^n = X^n(1-X)^n\left[\lambda_{n+1}X(1-X) - \lambda_n\right]$$

$$P_{n+1} - P_n = X^n(1-X)^n\left[\frac{(-1)^{n+2}}{(a^2b)^{n+1}} X(1-X) - \frac{(-1)^{n+1}}{(a^2b)^n}\right] = (-1)^n X^n(1-X)^n \frac{1}{(a^2b)^{n+1}}\underbrace{\left[X - X^2 + \overbrace{a^2(1+a^2)}^{a^2b}\right]}_{(X+a^2)(-X+1+a^2)}.$$

donc $P_{n+1} - P_n = \frac{(-1)^n}{(a^2b)^{n+1}} X^n(1-X)^n (X+a^2)(-X+1+a^2)$.

or $(X+a^2)(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \frac{(-1)^n}{(a^2b)^{n+1}} X^n(1-X)^n(-X+1+a^2)(X+a^2)$.

En divisant par $X+a^2$ il vient : $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{(-1)^n}{(a^2b)^{n+1}}(-X+1+a^2)X^n(1-X)^n$. finalement :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\underline{\varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{(-1)^n}{(a^2b)^{n+1}}(-X+b)(X(1-X))^n}} = \underline{\varphi_1\left[\frac{X(X-1)}{a^2b}\right]^n}$ (2) ... $= \varphi_1\left[-\frac{X(1-X)}{a^2b}\right]^n$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1 \frac{X(X-1)}{a^2b} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1\left[1 + \frac{X(X-1)}{a^2b}\right] = \frac{1}{a^2b}(-X+b)\frac{1}{a^2b}(X^2 - X + a^2b)$$

$\underline{\underline{\varphi_2 = \frac{1}{(a^2b)^2}(-X+b)(X^2-X+a^2b)}}$

PARTIE III Détermination de valeurs approchées de π

Q1 Une première approximation de π $\qquad b = a^2+1$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n(a) = a\int_0^1 \varphi_n(t^2)\,dt.$$

a) $u_1(a) = a\int_0^1 \frac{1}{a^2b}(-t^2+b)\,dt = \frac{1}{ab}\left[-\frac{t^3}{3}+bt\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\left(-\frac{1}{3}+b\right) = \frac{3b-1}{3ab}.$

$$u_1(a) = \frac{3b-1}{3ab} = \frac{3a^2+2}{3a(a^2+1)}$$

$$u_2(a) = a\int_0^1 \varphi_2(t^2)\,dt = a\int_0^1 \frac{1}{(a^2b)^2}(-t^2+b)(t^4-t^2+a^2b)\,dt$$

$$u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2}\int_0^1 \left[-t^6+(1+b)t^4 - b\overbrace{(1+a^2)}^{b}t^2 + a^2b^2\right]dt$$

$$u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2}\left[-\frac{t^7}{7}+(1+b)\frac{t^5}{5} - b^2\frac{t^3}{3} + a^2b^2t\right]_0^1$$

$$u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1+b}{5}-\frac{b^2}{3}+a^2b^2\right]$$

$$u_2(a) = \frac{a}{(a^2b)^2}\left[\frac{3a^2-1}{3}b^2 + \frac{b}{5} + \frac{2}{35}\right] = \frac{a}{(a^2b)^2}\left[b^3 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{b}{5} + \frac{2}{35}\right]$$

ou encore : $$u_2(a) = \frac{a}{(a^2(a^2+1))^2}\left[a^6 + \frac{5}{3}a^4 + \frac{8}{15}a^2 - \frac{8}{105}\right]$$

b) $u_2(a) = a\int_0^1 \varphi_2(t^2)\,dt = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{t^2+a^2}\,dt = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{a^2+t^2}\,dt$ car $P_2 = (X+a^2)\varphi_2$.

$$f(a)-u_2(a) = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2} - a\int_0^1 \varphi_2(t^2)\,dt = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2} - a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{a^2+t^2}\,dt = a\int_0^1 \frac{1-P_2(t^2)}{a^2+t^2}\,dt$$

$$f(a)-u_2(a) = a\int_0^1 \frac{-\lambda_2\left(t^2(1-t^2)\right)^2}{a^2+t^2}\,dt = +\frac{a}{(a^2b)^2}\int_0^1 \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\,dt$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{(a^2b)^2}$$

$\forall t \in [0,1],\quad t^4(1-t^2)^2 \geq 0$ et $\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{a^2+t^2} \leq \frac{1}{a^2}$.

Donc $\forall t\in[0,1],\quad \frac{1}{a^2+1}t^4(1-t^2)^2 \leq \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2} \leq \frac{1}{a^2}t^4(1-t^2)^2$. Par intégration on obtient :

$\frac{1}{a^2+1} J(2) \leq \int_0^1 \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\,dt \leq \frac{1}{a^2} J(2)$; en multipliant par $\frac{a}{(a^2b)^2}$ il vient encore : $\frac{a}{b(a^2b)^2} J(2) \leq \frac{a}{(a^2b)^2}\int_0^1 \frac{t^4(1-t^2)^2}{a^2+t^2}\,dt \leq \frac{a}{a^2(a^2b)^2} J(2)$; qui donne :

$$\frac{J(2)}{a^3b^3} \leq f(a)-u_2(a) \leq \frac{J(2)}{a^5b^2}$$

Donc $\underline{\underline{u_2(a)+\frac{J(2)}{a^3b^3} \leq f(a) \leq u_2(a)+\frac{J(2)}{a^5b^2}}}$

c) * Posons $a=2$. $b=a^2+1=5$. $u_2(a)=\frac{a}{(a^2b)^2}\left[b^3-\frac{4}{3}b^2+\frac{b}{5}+\frac{2}{35}\right]=\frac{4868}{10500}=\frac{1217}{2625}$

$J(2)=\frac{[2^2(2\times2)!]^2}{(4\times2+1)!}=\frac{8}{315}$; $\frac{J(2)}{a^3b^3}=\frac{1}{39375}$; $\frac{J(2)}{a^5b^2}=\frac{1}{31500}$

$u_2(a)+\frac{J(2)}{a^3b^3}=\frac{1217}{2625}+\frac{1}{39375}=\frac{2608}{5625}\simeq 0{,}463\,644\,444$

$u_2(a)+\frac{J(2)}{a^5b^2}=\frac{1217}{2625}+\frac{1}{31500}=\frac{2921}{6300}\simeq 0{,}463\,650\,794$

Donc $\underline{\underline{0{,}463\,644 \leq f(2) \leq 0{,}463\,651}}$ Pour mémoire $f(2)=\text{Arctan}\,\frac{1}{2}\simeq 0{,}463\,647\,609$

* Posons $a=3$. $b=10$. $u_2(a)=\frac{a}{(a^2b)^2}\left[b^3-\frac{4}{3}b^2+\frac{b}{5}+\frac{2}{35}\right]=\frac{91216}{283500}=\frac{22804}{70875}$

$\frac{J(2)}{a^3b^3}=\frac{1}{1063125}$. $\frac{J(2)}{a^5b^2}=\frac{2}{1913625}$

$u_2(a)+\frac{J(2)}{a^3b^3}=\frac{22804}{70875}+\frac{1}{1063125}=\frac{342061}{1063125}\simeq 0{,}321\,750\,500$

$u_2(a)+\frac{J(2)}{a^5b^2}=\frac{22804}{70875}+\frac{2}{1913625}=\frac{123142}{382725}\simeq 0{,}321\,750\,604$

Donc $0{,}321\,750 \leq f(3) \leq 0{,}321\,751$ ($f(3)=\text{Arctan}\,\frac{1}{3}\simeq 0{,}321\,750\,554$)

(A priori les fractions proposées sont irréductibles !)

d) Nous avons vu que, pour $a \in]1, +\infty[$, $f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

Donc $f(2) + f\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = \frac{\pi}{4}$; soit $\pi = 4(f(2)+f(3))$.

Donc $4(0{,}463\,644 + 0{,}321\,750) \leq \pi = 4(f(2)+f(3)) \leq 4(0{,}463\,651 + 0{,}321\,751)$

Donc $\underline{\underline{3{,}141\,576 \leq \pi \leq 3{,}141\,608}}$ $(\pi \simeq 3{,}141\,592\,654)$

Prenons le milieu du segment $[3{,}141576 ; 3{,}141608]$, qui a pour longueur 32×10^{-6}

Ce milieu est $3{,}141\,592$

Donc $3{,}141592$ est une valeur approchée de π à $1{,}6 \times 10^{-5}$

Remarque.. On a encore : $\frac{834973}{1063125} \leq f(2)+f(3) \leq \frac{1202371}{1530900}$

Donc $\frac{3\,339\,892}{1\,063\,125} \leq \pi \leq \frac{1\,202\,371}{382\,725}$

$\frac{3339892}{1063125} \simeq 3{,}141\,579\,777$; $\frac{1\,202\,371}{382\,725} \simeq 3{,}14160\,5591$

le milieu est : $\frac{8\,588\,329}{2\,733\,750} \simeq 3{,}141\,592\,686$

La différence est : $\frac{247}{9.568.125} \simeq 0{,}000025815$ et la différence sur 2 : $0{,}000\,012907$

2.. Généralisation..

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $|u_n(a) - f(a)| = \left|a\int_0^1 \varphi_n(t^2)\,dt - a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}\right| = a\left|\int_0^1 \frac{P_n(t^2)-1}{a^2+t^2}\,dt\right|$

$$|u_n(a) - f(a)| \leq a\int_0^1 \frac{|P_n(t^2)-1|}{a^2+t^2}\,dt \underset{\uparrow}{=} a|\lambda_n|\int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{a^2+t^2}\,dt \underset{\uparrow}{\leq} a|\lambda_n|\int_0^1 \frac{t^{2n}(1-t^2)^n}{a^2}\,dt$$

$P_n(t^2) - 1 = \lambda_n t^{2n}(1-t^2)^n$; $a^2+t^2 \geq a^2$ et $t^{2n}(1-t^2)^n \geq 0$

Donc $|u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{a}|\lambda_n|\,J(n) = \frac{1}{a(a^2b)^n}\,J(n) \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{a(a^2b)^n}\,\frac{1}{4^n}$. Finalement :

$J(n) \leq 1/4^n$ (I φ 1 c))

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{(4a^2b)^n\,a}}} \quad (3)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}(a)-u_n(a) = a\left[\int_0^1 \varphi_{n+1}(t^2)-\varphi_n(t^2)\,dt\right] = a\left[\int_0^1 \left(-\frac{t^2(1-t^2)}{a^2b}\right)^n \varphi_1(t^2)\,dt\right] \qquad ((2))$$

$$u_{n+1}(a)-u_n(a) = \frac{a(-1)^n}{(a^2b)^n}\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^n\left(\frac{1}{a^2b}\right)(-t^2+b)\,dt$$

$$u_{n+1}(a)-u_n(a) = \frac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}\left[b\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^n\,dt - \int_0^1 t^{2n+2}(1-t^2)^n\,dt\right]$$

$u_{n+1}(a)-u_n(a) = \dfrac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}\left[b\,J(n) - I(n+1,n)\right]$. Exprimons $I(n+1,n)$ en fonction de $J(n)$.

$$I(n+1,n) = \frac{2^{2n}\, n!\,(2n+1)!\,(2n+2)!}{(4n+3)!\,(n+1)!} = \frac{2^{2n}((2n)!)^2}{(4n+1)!}\times\frac{n!\,(2n+1)(2n+2)(2n+1)}{(4n+3)(4n+2)\,(n+1)!} = J(n)\,\frac{2n+1}{4n+3}.$$

$$I(p,q) = \frac{2^{2q}\, q!\,(p+q)!\,(2p)!}{(2p+2q+1)!\; p!} \qquad\qquad J(n) = \frac{2^{2n}((2n)!)^2}{(4n+1)!}$$

Par conséquent : $u_{n+1}(a)-u_n(a) = \dfrac{(-1)^n a}{(a^2b)^{n+1}}\left[b-\dfrac{2n+1}{4n+3}\right]J(n)$.

Remarquons que : $b-\dfrac{2n+1}{4n+3} = \dfrac{n(4b-2)+3b-1}{4n+3} = \dfrac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3}$

Ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(a)-u_n(a) = \dfrac{(-1)^n a\,J(n)}{(a^2b)^{n+1}}\;\dfrac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = \frac{u_{n+2}(a)-u_{n+1}(a)}{u_{n+1}(a)-u_n(a)} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}a\,J(n+1)}{(a^2b)^{n+2}}}{\dfrac{(-1)^n a\,J(n)}{(a^2b)^{n+1}}}\times\frac{\dfrac{2(2b-1)(n+1)+3b-1}{4n+7}}{\dfrac{2(2b-1)(n)+3b-1}{4n+3}}$$

Notons que : $\dfrac{J(n+1)}{J(n)} = \dfrac{2^{2(n+1)}((2n+2)!)^2}{(4n+5)!}\cdot\dfrac{(4n+1)!}{2^{2n}((2n)!)^2} = \dfrac{2\times 2\left[(2n+2)(2n+1)\right]^2}{(4n+5)(4n+4)(4n+3)(4n+2)}$

$$\frac{J(n+1)}{J(n)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)}$$

Donc $\dfrac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = -\dfrac{1}{(a^2b)}\times\dfrac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+3)}\times\dfrac{2(2b-1)(n)+7b-3}{2(2b-1)(n)+3b-1}\times\dfrac{4n+3}{4n+7}$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = -\frac{1}{(a^2b)} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+7)} \times \frac{2(2b-1)n+7b-3}{2(2b-1)n+3b-1}$

Simple non !

Remarque.. Intéressons nous à l'existence du quotient $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ c'est à dire à la non nullité de $u_{n+1}(a)-u_n(a)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1}(a)-u_n(a)=0 \Leftrightarrow 2(2b-1)n+3b-1=0 \Leftrightarrow b \neq 1/2$ et $n=\frac{1-3b}{2(2b-1)}$.

Remarquons que : $b=a^2+1 \in [2,+\infty[$ et étudions la fonction

$\varphi : x \mapsto \frac{1-3x}{2(2x-1)}$ sur $[2,+\infty[$. $\forall x \in [2,+\infty[$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-1)^2}>0$. φ est strictement croissante sur cet intervalle, $\varphi(2)=-5/6$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-3/4$. φ ne peut donc pas prendre de valeur entière ; en fait $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ est défini pour tout $n\in\mathbb{N}$ et ce qui précède vaut pour $n=0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)} = -\frac{1}{(a^2b)} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+5)(4n+7)} \times \frac{2(2b-1)n+7b-3}{2(2b-1)n+3b-1}.$$

c) $\forall k\in\mathbb{N}$, $v_k(a)=u_{k+1}(a)-u_k(a)$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}(a)-u_k(a))=\sum_{k=0}^{n-1}v_k(a)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(a)-u_0(a)=\sum_{k=0}^{n-1}v_k(a)$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(a)=u_0(a)+\sum_{k=0}^{n-1}v_k(a)$

Notons que : $u_0(a)=a\int_0^1\varphi_0(t)\,dt=0$.

Donc $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(a)=\sum_{k=0}^{n-1}v_k(a)}}$. Notons encore que : $v_0(a)=u_1(a)-u_0(a)=u_1(a)$.

$$v_0(a)=\frac{3b-1}{3ab}.$$

Rappelons pour finir que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $v_{k+1}(a)=-\frac{1}{a^2b}\frac{2(k+1)(2k+1)}{(4k+5)(4k+7)}\times\frac{2(2b-1)k+7b-3}{2(2b-1)k+3b-1}v_k(a)$.

Cela suffit pour mettre en place le programme.

__En pédalo__ (CASIO 7000 G)

Programme principale dans le Prog 0

Sous-programme calculant $u_n(a)$ dans Prog 1

Prog 0 "N"? → N : "A"? → A : Prog 1 : 4U → C : (A+1) ÷ (A-1) → A : Prog 1 : 4U + C ◢

Prog 1 A^2+1 → B : 0 → K : (3B-1) ÷ (3AB) → V : V → U : Lbl 0 : -2V(K+1)(2K+1)(2(2B-1)K+7B-3) ÷ (4K+5) ÷ (4K+7) ÷ (2(2B-1)K+3B-1) ÷ A^2 ÷ B → V : U+V → U : Isz K : K < (N-1) ⇒ Goto 0

A l'exécution : N ?
5
A ?
2
3,141 592 654

__Précision__ Une valeur approchée de π est : $4\left(u_n(a) + u_n\left(\frac{a+1}{a-1}\right)\right)$

$|u_n(a) - f(a)| \leq \dfrac{1}{(4a^2b)^n a}$. Posons $a' = \dfrac{a+1}{a-1}$ et $b' = a'^2+1$.

$|u_n(a') - f(a')| \leq \dfrac{1}{(4a'^2b')^n a'}$. $|u_n(a)+u_n(a') - f(a) - f(a')| \leq |u_n(a) - f(a)| + |u_n(a') - f(a')|$.

Donc $\left|4(u_n(a)+u_n(a')) - \underbrace{4(f(a)+f(a'))}_{\pi}\right| \leq 4\left[\dfrac{1}{(4a^2b)^n a} + \dfrac{1}{(4a'^2b')^n a'}\right]$

$4(u_n(a)+u_n(a'))$ est une valeur approchée de π à $\pi_n(a) = 4\left[\dfrac{1}{(4a^2b)^n a} + \dfrac{1}{(4a'^2b')^n a'}\right]$ près.

Posons : $n=5$ et $a=2$. $b=5$, $a'=3$, $b'=10$.

$$\pi_5(2) = 4\left[\frac{1}{(80)^5 \times 2} + \frac{1}{(360)^5 \times 3}\right] \simeq 6,1 \times 10^{-10}$$ (valeur approchée par excès).

Donc __$4(u_5(2)+u_5(3))$ est une valeur approchée de π à $6,1 \times 10^{-10}$ près__

__En turbo Pascal.__

```
program ESSEC93;
uses crt;
var n:integer;a,r,e:real;

function erreur(rang:integer;val:real):real;
var b:real;
begin
b:=sqr(val)+1;
erreur:=1/val/exp(rang*ln(4*b*(b-1)))
end;

function suite(rang:integer;val:real):real;
var k:integer;b,v,c:real;
begin
b:=sqr(val)+1;v:=(3*b-1)/3/val/b;c:=v;rang:=rang-2;
for k:=0 to rang do
begin
v:=-v*2*(k+1)*(2*k+1)*(2*(2*b-1)*k+7*b-3);
v:=v/b/(b-1)/(4*k+5)/(2*(2*b-1)*k+3*b-1)/(4*k+7);
c:=c+v;
end;
suite:=c;
end;

function approxime(haine:integer;ha:real):real;
var piapp:real;
begin;
piapp:=suite(haine,ha);ha:=(ha+1)/(ha-1);piapp:=piapp+suite(haine,ha);
approxime:=piapp;
end;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de n ');readln(n);
write('Donnez la valeur de a ');readln(a);
r:=approxime(n,a);
e:=4*(erreur(n,a)+erreur(n,(a+1)/(a-1)));
writeln('La valeur approchée de pi obtenue est : ',4*r);
Writeln('L''erreur est inférieure à ',e);
writeln('La machine donne pour valeur approchée de pi : ',pi);
end.
```

Peut se faire en 1 ligne

```
Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2
La valeur approchée de pi obtenue est :  3.1415926537E+00
L'erreur est inférieure à  6.1057207149E-10
La machine donne pour valeur approchée de pi :  3.1415926536E+00
```

```
Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2.5
La valeur approchée de pi obtenue est :  3.1415926536E+00
L'erreur est inférieure à  3.9663419562E-11
La machine donne pour valeur approchée de pi :  3.1415926536E+00
```

```
Donnez la valeur de n 5
Donnez la valeur de a 2.414213562
La valeur approchée de pi obtenue est :  3.1415926536E+00
L'erreur est inférieure à  3.2408139345E-11
La machine donne pour valeur approchée de pi :  3.1415926536E+00
```

3.. Recherche d'un choix optimal de a.

a) le c) nous a montré que : $|w_n(a)-\pi| \le 4\left[\frac{1}{(4a^2b)^n a}+\frac{1}{(4a'^2b')^n a'}\right]$ avec

$a'=\frac{a+1}{a-1}$ et $b'=a'^2+1$. $c=\min\left(a,\frac{a+1}{a-1}\right)=\min(a,a')$.

$(4a^2b)^n a=(4a^2(a^2+1))^n a \ge (4c^2(c^2+1))^n c$; de même $(4a'^2b')^n a' \ge (4c^2(1+c^2))^n c$

donc $|w_n(a)-\pi| \le 4\times\left[\frac{1}{(4c^2(c^2+1))^n c}+\frac{1}{(4c^2(c^2+1))^n c}\right]=\frac{8}{c(4c^2(1+c^2))^n}$

b) Considérons : $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$
$a \mapsto \min\left(a,\frac{a+1}{a-1}\right)$.

Soit $a\in]1,+\infty[$. $a \le \frac{a+1}{a-1} \Leftrightarrow a^2-a \le a+1 \Leftrightarrow a^2-2a-1\le 0 \Leftrightarrow (a-1-\sqrt2)(a-1+\sqrt2)\le 0$

$a \le \frac{a+1}{a-1} \Leftrightarrow a\in[1-\sqrt2, 1+\sqrt2]$

Finalement : $\forall a\in]1,1+\sqrt2]$, $\varphi(a)=a$ et $\forall a\in]1+\sqrt2,+\infty[$, $\varphi(a)=\frac{a+1}{a-1}$.

a	1		$1+\sqrt2$	
$\varphi(a)$		a		$(a+1)/(a-1)$
	1	$\nearrow$		$\searrow 1$

φ est $\varphi(a)$ est maximal pour $a_0=1+\sqrt2$
$\varphi(1+\sqrt2)=1+\sqrt2$

$c=\min\left(a,\frac{a+1}{a-1}\right)$ est maximal pour $a=1+\sqrt2$; $a_0=1+\sqrt2\simeq 2,414$

c) $a=\frac52$. $c=\min\left(a,\frac{a+1}{a-1}\right)=\min\left(\frac52,\frac73\right)=\frac73$.

$4c^2(1+c^2)=4\times\frac{49}{9}\times\left(1+\frac{49}{9}\right)=\frac{11\,368}{81}$; $\frac{8}{c\,[4c^2(1+c^2)]^n}=\frac{24}{7\,(11368/81)^n}$

$|w_n(a)-\pi|$ est donc majoré par : $\frac{24}{7}\left(\frac{81}{11368}\right)^n$.

Notons que : $|w_n(a)-\pi|$ est encore majoré par : $4\left[\frac{1}{(4a^2b)^n a}+\frac{1}{(4a'^2b'^2)^n a'}\right] \underset{\substack{a=5/2\\a'=7/3}}{=} 4\left[\frac25\left(\frac{4}{725}\right)^n+\frac37\left(\frac{81}{11368}\right)^n\right]$

Pour $n=5$ le premier majorant est $\frac{24}{7}\left(\frac{81}{11368}\right)^5\simeq 6,3\times10^{-11}$;

le second majorant est $4\left[\frac25\left(\frac{4}{725}\right)^5+\frac37\left(\frac{81}{11368}\right)^5\right]\simeq 3,97\times10^{-11}$.

Donc ce car une valeur approchée de π est $3,1415926536$