PARTIE I — c'est du cours.

1°.. Convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ avec $p>0$.

a) Notons que $\varphi_p : t \mapsto e^{-t} t^{p-1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{t\to+\infty} (t^{p+1} e^{-t}) = 0$ (croissance comparée ... ou $t^{p+1}e^{-t} = e^{-t[1-(p+1)\frac{\ln t}{t}]}$)

Donc $\lim_{t\to+\infty} (t^2 \varphi_p(t)) = 0$. $\exists A \in [1,+\infty[$, $\forall t \in [A,+\infty[$, $t^2\varphi_p(t) \leq 1$

$\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leq \varphi_p(t) \leq \frac{1}{t^2}$; $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ étant convergente, $\int_A^{+\infty} \varphi_p(t)\,dt$ aussi (comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives).

Finalement $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{p-1}\,dt$ converge.

b) Soit $x \in]0,1]$. $\forall t \in]x,1]$, $0 \leq e^{-t} t^{p-1} \leq t^{p-1}$.

Donc $0 \leq \int_x^1 e^{-t} t^{p-1}\,dt = \int_x^1 \varphi_p(t)\,dt \leq \int_x^1 t^{p-1}\,dt = \frac{1}{p} - \frac{x^p}{p} \leq \frac{1}{p}$

$\forall x \in]0,1]$, $0 \leq \int_x^1 t^{p-1}e^{-t}\,dt \leq \frac{1}{p}$.

$x \mapsto \int_1^x \varphi_p(t)\,dt$ est la primitive de φ_p (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui prend la valeur 0 en 1, φ_p étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $]0,1]$.
Par conséquent $x \mapsto \int_x^1 \varphi_p(t)\,dt$ est une fonction décroissante et majorée sur $]0,1]$.
Elle admet donc une limite finie en 0. Ceci assure la convergence de $\int_0^1 \varphi_p(t)\,dt$.
Donc $\int_0^1 e^{-t} t^{p-1}\,dt$ converge.

c) Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^1 e^{-t}t^{p-1}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt$ convergent ; par conséquent $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt$ est convergente.

$\Gamma(p)$ existe pour tout p dans $\mathbb{R}_+^*$.

2°.. Expression de $\Gamma(p+1)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

$$\int_\varepsilon^A e^{-t} t^p\,dt = [-e^{-t}t^p]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A (-e^{-t})(p)(t^{p-1})\,dt = -e^{-A}A^p + e^{-\varepsilon}\varepsilon^p + p\int_\varepsilon^A e^{-t}t^{p-1}\,dt$$

$u'(t) = e^{-t}$

$v(t) = t^p$

$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt$ converge, $\lim_{A\to+\infty}(-e^{-A}A^p) = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(e^{-\varepsilon}\varepsilon^p) = 0$ ($p \in \mathbb{R}_+^*$) permettent d'écrire : $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^p\,dt = p\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}\,dt$. Soit : $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ pour tout $p \in \boxed{\mathbb{R}_+^*}$

A fortiori : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$

b) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1-e^{-A}) = 1$. $\Gamma(1)=1$

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\Gamma(p+1)}{p!} = \dfrac{p\,\Gamma(p)}{p!} = \dfrac{\Gamma(p)}{(p-1)!}$; $\left(\dfrac{\Gamma(p+1)}{p!}\right)_{p\geq 0}$ est une suite constante.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\Gamma(p+1)}{p!} = \dfrac{\Gamma(0+1)}{0!} = \Gamma(1) = 1$. $\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ \Gamma(p+1) = p!}$

ou $\underline{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(p) = (p-1)!}$

PARTIE II $\qquad x\in[0,1[$ et $p\in\mathbb{R}_+^*$.

Q1.. Convergence de la série définissant $g_p(x)$.

a) $\underline{\lim_{n\to+\infty} n^{p+1}x^n = 0}$ car $x\in[0,1[$ (clair pour $x=0$; pour $x>0$, $n^{p+1}x^n = e^{n\left[\ln x + (p+1)\frac{\ln n}{n}\right]}$ ...

b) $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0 \Rightarrow n^{p+1}x^n \leq 1$

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq n^{p-1}x^n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente il en est de même pour la série de terme général $n^{p-1}x^n$ (règle de comparaison des séries à termes positifs)

$\underline{g_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1}x^n \text{ existe pour tout } x\in[0,1[}$.

$\underline{g_p(0)=0}$ et $\underline{g_p(1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{1-p}}$ $\underline{\text{n'existe pas}}$ car $1-p\leq 1$.

tou <...

Q2.. Etude des cas particuliers $p=1$ et $p=2$.

a) Rappel.. Pour $x\in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Donc $g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} - x = \dfrac{x}{1-x}$. $g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \times \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$\underline{g_1(x) = \dfrac{x}{1-x}}$ et $\underline{g_2(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$ pour $x\in[0,1[$

b) g_1 et g_2 sont dérivables sur $[0,1[$; $\forall x\in[0,1[$, $g_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$ et $g_2'(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3} > 0$.

$\underline{g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont strictement croissantes sur } [0,1[}$.

$\lim_{x\to 1^-} g_1(x) = \lim_{x\to 1^-} g_2(x) = +\infty$. $g_1(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$ et $g_2(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-x)^2}$

Q3.. Etude des variations de g_p sur $[0,1[$.

a) Soit $(x,y) \in [0,1[^2$ tel que : $x \leq y$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leq y^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{p-1}x^n \leq n^{p-1}y^n$; $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1}x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1}y^n$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $0 \leq x \leq y < 1 \Rightarrow g_p(x) \leq g_p(y)$. g_p est croissante sur $[0,1[$.

g_p étant croissante sur $[0,1[$, g_p admet donc une limite en 1 (finie si g_p est majorée sur $[0,1[$, égale à $+\infty$ dans le cas contraire).

b) Soit $x \in]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{p-1}x^n \geq 0$ donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1}x^n \geq \sum_{n=1}^{N} n^{p-1}x^n = \sum_{n=1}^{N} n^p \frac{x^n}{n}$

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $g_p(x) \geq \sum_{n=1}^{N} n^p \frac{x^n}{n} \geq \sum_{n=1}^{N} 1 \times \frac{x^n}{n}$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $g_p(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$

Par conséquent : $L = \lim_{x\to 1} g_p(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $L \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$; comme $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$ il vient $L = +\infty$

Q4.. Etude du cas $0 < p \leq 1$.

a) $x \in]0,1[$ et $p \in]0,1]$. $\varphi_p : t \mapsto t^{p-1}x^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_p'(t) = (p-1)t^{p-2}x^t + t^{p-1}(\ln x)x^t = t^{p-2}x^t\,[\underbrace{p-1}_{\leq 0} + t\underbrace{\ln x}_{\leq 0}] \leq 0$

φ_p est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(φ_p est encore décroissante comme produit de deux fonctions décroissantes et positives).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [n,n+1]$, $\varphi_p(n) \geq \varphi_p(t) \geq \varphi_p(n+1)$

En intégrant il vient : $\varphi_p(n) \geq \int_n^{n+1} \varphi_p(t)\,dt \geq \varphi_p(n+1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t\,dt \leq n^{p-1}x^n$.

b) $x \in]0,1[$. $\sum_{n=1}^{N} (n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} n^{p-1}x^n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=2}^{N+1} n^{p-1}x^n \leq \int_1^{N+1} t^{p-1}x^t\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} n^{p-1}x^n$. $\sum_{n=1}^{N+1} n^{p-1}x^n - x \leq \int_1^{N+1} t^{p-1}x^t\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} n^{p-1}x^n$

a $\displaystyle\int_1^{N+1} t^{p-1}x^t\,dt = \int_1^{N+1} t^{p-1}e^{t\ln x}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ u=-t\ln x\\ du=-\ln x\,dt}}{=} \int_{-\ln x}^{-(N+1)\ln x}\left(-\frac{u}{\ln x}\right)^{p-1}e^{-u}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)du = \left(-\frac{1}{\ln x}\right)^p\int_{-\ln x}^{-(N+1)\ln x} u^{p-1}e^{-u}\,du$

$\displaystyle\lim_{N\mapsto\infty}(-(N+1)\ln x) \underset{\substack{\uparrow\\ x\in]0,1[}}{=} +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du = \Gamma(p)$ converge.

Donc $\displaystyle\lim_{N\mapsto+\infty}\int_1^{N+1} t^{p-1}x^t\,dt = \left(-\frac{1}{\ln x}\right)^p\int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du = \frac{1}{|\ln x|^p}\int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du$.

En passant à la limite dans l'encadrement de la fin de la page 3 il vient :

$\displaystyle g_p(x) - x \leqslant \int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du \times \frac{1}{|\ln x|^p} \leqslant g_p(x)$;

Soit encore: $\displaystyle\int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du \leqslant |\ln x|^p g_p(x) \leqslant \int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du + x|\ln x|^p$ pour $x\in]0,1[$.

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-}\ln x = 0^-$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} -\ln x = 0^+$; Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-}\left(\int_{-\ln x}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du\right) = \Gamma(p)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} x|\ln x|^p = 0$, le théorème d'encadrement donne : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-}(|\ln x|^p g_p(x)) = \Gamma(p)$.

ln est dérivable en 1 et $\ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$; donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = 1$; $\ln x = \ln x - \ln 1 \underset{1}{\sim} x-1$.

$\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-}(|\ln x|^p g_p(x)) = \Gamma(p) \neq 0$; $|\ln x|^p g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \Gamma(p)$; $g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\Gamma(p)}{|\ln x|^p} \underset{1^-}{\sim} \frac{\Gamma(p)}{|x-1|^p}$

Pour $x\in]0,1[$, $|x-1| = 1-x$

Par conséquent : $\displaystyle g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$ pour $p\in]0,1]$.

Q5.. Etude du cas général..

a) Soit $x\in[0,1[$. $\displaystyle (1-x)g_{p+1}(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^{n+1}$

$$(1-x)g_{p+1}(x) \underset{\substack{\uparrow\\ n\to n+1 \text{ dans la 1}^{\text{re}}\ \Sigma\ !}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^p x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^{n+1} = x + \sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^p - n^p]x^{n+1}$$

Si $x\in[0,1[$, $\displaystyle (1-x)g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^p - n^p]x^{n+1}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0,1]$. $\ell_p : x \mapsto x^p$ est dérivable sur $[n,n+1]$

$\forall x \in [n,n+1]$, $\ell'_p(x) = p x^{p-1}$; ℓ'_p est décroissante sur $[n,n+1]$

car $p-1 \leq 0$; par conséquent : $\forall x \in [n,n+1]$, $p(n+1)^{p-1} \leq \ell'_p(x) \leq p n^{p-1}$

L'inégalité des accroissements finis donne : $p(n+1)^{p-1}(n+1-n) \leq \ell_p(n+1) - \ell_p(n) \leq p n^{p-1}(n+1-n)$

donc $\underline{p(n+1)^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq p n^{p-1}}$ pour $\underline{0 \leq p \leq 1}$.

Pour $p > 1$, ℓ'_p est croissante sur $[n,n+1]$. On passe alors de la même manière de

$p n^{p-1} \leq \ell'_p(x) \leq p(n+1)^{p-1}$ pour tout $x \in [n,n+1]$ à : $\underline{p n^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq p(n+1)^{p-1}}$

c) $x \in [0,1[$ et $0 < p \leq 1$.

D'après a) : $(1-x) g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)^p - n^p] x^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(n+1)^{p-1} x^{n+1} \leq [(n+1)^p - n^p] x^{n+1} \leq p\, n^{p-1} x^{n+1} = p x \; n^{p-1} x^n$

$g_p(x)$ existe ; par conséquent les séries de termes généraux $(n+1)^{p-1} x^{n+1}$ et $n^{p-1} x^n$ sont

convergentes. Il est donc possible d'écrire : $\sum_{n=1}^{+\infty} p(n+1)^{p-1} x^{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)^p - n^p] x^{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p x\, n^{p-1} x^n$

ce qui signifie : $p \sum_{n=2}^{+\infty} n^{p-1} x^n \leq (1-x) g_{p+1}(x) - x \leq p x\, g_p(x)$, ou encore :

$$p g_p(x) - p x \leq (1-x) g_{p+1}(x) - x \leq p x\, g_p(x) \text{ ; pour finir ajoutons } x.$$

$$\underline{\underline{p g_p(x) + (1-p) x \leq (1-x) g_{p+1}(x) \leq p x\, g_p(x) + x}} \quad \underline{\text{pour } p \in]0,1]}$$

Pour $\underline{p \in]1,+\infty[}$ on obtient : $\underline{p x\, g_p(x) + x \leq (1-x) g_{p+1}(x) \leq p g_p(x) + (1-p) x}$

d) Pour montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}^*_+$, $g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \Gamma(p)/(1-x)^p$ il suffit de montrer par

récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall p \in]n,n+1]$, $g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \Gamma(p)/(1-x)^p$.

* Q4 montre que c'est vrai pour $n = 0$.
* Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $p \in]n+1, n+1+1]$. Posons $q = p-1$. L'hypothèse de récurrence indique que :

$g_q(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\Gamma(q)}{(1-x)^q}$ car $q \in]n,n+1]$

$\underline{1^{er} \text{ cas : } n \geq 1}$. Alors $\underline{q > 1}$. $q x\, g_q(x) + x \leq (1-x) g_{q+1}(x) \leq q g_q(x) + (1-q) x$

pour tout $x \in [0,1[$. Multiplions le tout par $(1-x)^q$ on obtient alors : $\forall x \in [0,1[,\ qx(1-x)^q g_q(x) + x(1-x)^q \leq (1-x)^{q+1} g_{q+1}(x) \leq q(1-x)^q g_q(x) + (1-q)(1-x)^q x$

or $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^q g_q(x) = \Gamma(q)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} [qx(1-x)^q g_q(x) + x(1-x)^q] = q\Gamma(q)$ et

$\lim\limits_{x\to 1^-} [q(1-x)^q g_q(x) + (1-x)^q x] = q\,\Gamma(q)$

Par encadrement : $\lim\limits_{x\to 1^-} [(1-x)^{q+1} g_{q+1}(x)] = q\Gamma(q) = \Gamma(q+1)$ (IQ2)

Donc $(1-x)^{q+1} g_{q+1}(x) \underset{1^-}{\sim} \Gamma(q+1)$; $(1-x)^p g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \Gamma(p)$; $g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$!

2ème cas.. $n=0$. Alors $q<1$. On procède de la même manière en partant de :

$$\forall x \in [0,1[,\ q g_q(x) + (1-q)x \leq (1-x) g_{q+1}(x) \leq qx\, g_q(x) + x \text{ . ok ?}$$

cela achève la récurrence.

Finalement : $\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ g_p(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$.

PARTIE III

Q1.. Calcul de $I(a,b)$ pour $a\geq 2$ et $b \geq 2$.

a) Soit H la primitive de h sur $[\alpha,\beta]$ qui s'annule en α.

H est de classe C^2 sur $[\alpha,\beta]$ car h est de classe C^1 sur cet intervalle.

$\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |H''(x)| = \max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |h'(x)| = M_1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne

alors : $|H(\beta) - H(\alpha) - (\beta-\alpha)H'(\alpha)| \leq \dfrac{M_1}{2}(\beta-\alpha)^2$. Ceci s'écrit encore :

$$\left|\int_\alpha^\beta h(x)\,dx - (\beta-\alpha)h(\alpha)\right| \leq \frac{M_1(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

b) $a-1\geq 1$ et $b-1 \geq 1$ donc $x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$

(si $\alpha \geq 1$: $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ ...)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. $[x_k, x_{k+1}] \subset [0,1]$. $h : x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[x_k,x_{k+1}]$ donc :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} h(x)\,dx - (x_{k+1}-x_k)h(x_k)\right| \leq \max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |h'(x)| \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} \leq \frac{M_1}{2}(x_{k+1}-x_k)^2 = \frac{M_1}{2n^2}. \text{ Donc :}$$

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x)\,dx - \frac{1}{n}h\!\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M_1}{2n^2}.$$

$$|I(a,b)-u_n| = \left|\int_0^1 h(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(x)dx - \frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x)dx - \frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$|I(a,b)-u_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Pi_1}{2n^2} = n\,\frac{\Pi_1}{2n^2} = \frac{\Pi_1}{2n}.$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |I(a,b)-u_n| \leq \dfrac{\Pi_1}{2n}$.

<u>Remarque</u> .. ceci n'est autre que la majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles pour une fonction de classe C^1.

<u>c)</u> C'est le produit de Cauchy... résultat classique ! . Notons qu'il vaut encore lorsque <u>l'une</u> des séries est absolument convergente <u>et l'autre</u> est convergente.

$g_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{a-1}x^n$; $g_b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{b-1}x^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^{a-1}x^n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^{b-1}x^n \geq 0$.

Donc $g_a(x)g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n$ où pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^{a-1}x^k(n-k)^{b-1}x^{n-k}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = x^n n^{a-1}n^{b-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{b-1} = x^n n^{a+b-1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{b-1} = u_n n^{a+b-1}x^n$

$\hookrightarrow k=1$ ou $k=0$!

Finalement : $\forall x \in [0,1[,\ g_a(x)g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1}x^n$.

<u>Exercice</u> : Prouver ce que l'on a admis.

<u>d)</u> Soit $x \in [0,1[$.

$$|g_a(x)g_b(x) - I(a,b)g_{a+b}(x)| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} I(a,b)n^{a+b-1}x^n\right|$$

$\hookrightarrow n=2$ ou $n=1$ car $u_1 = 0$

$$|g_a(x)g_b(x) - I(a,b)g_{a+b}(x)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - I(a,b))n^{a+b-1}x^n\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |(u_n - I(a,b))n^{a+b-1}x^n| = |u_n - I(a,b)|n^{a+b-1}x^n \leq \dfrac{\Pi_1}{2n}n^{a+b-1}x^n = \dfrac{\Pi_1}{2}n^{a+b-2}x^n$.

La série de terme général $\frac{\Pi_1}{2}n^{a+b-2}x^n$ converge donc la série de terme général $(u_n - I(a,b))n^{a+b-1}x^n$ est absolument convergente (règle de comparaison ...)

ceci permet d'écrire : $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - I(a,b))n^{a+b-1}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n - I(a,b)|n^{a+b-1}x^n$.

Il vient alors :

$$|g_a(x)g_b(x) - I(a,b)g_{a+b}(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n - I(a,b)|n^{a+b-1}x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Pi_1}{2}n^{a+b-2}x^n = \frac{\Pi_1}{2}g_{a+b-1}(x)$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

e) Soit $x \in [0,1[$.

$$\left| g_a(x)g_b(x)(1-x)^{a+b} - I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b}(x) \right| \leq \frac{M}{2}(1-x)^{a+b}g_{a+b-1}(x).$$

$$(1-x)^{a+b}g_{a+b-1}(x) \underset{1^-}{\sim} (1-x)^{a+b}\frac{\Gamma(a+b-1)}{(1-x)^{a+b-1}} = \Gamma(a+b-1)(1-x)$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{a+b}g_{a+b-1}(x) = 0$; par conséquent $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[g_a(x)g_b(x)(1-x)^{a+b} - I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b}(x)\right] =$

$$g_a(x)g_b(x)(1-x)^{a+b} \underset{1^-}{\sim} \frac{\Gamma(a)}{(1-x)^a}\times\frac{\Gamma(b)}{(1-x)^b}(1-x)^{a+b} = \Gamma(a)\Gamma(b) \; ; \; \lim_{x\to 1^-}\left[g_a(x)g_b(x)(1-x)^{a+b}\right] = \Gamma(a)\Gamma$$

$$I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b}(x) \underset{1^-}{\sim} I(a,b)(1-x)^{a+b}\frac{\Gamma(a+b)}{(1-x)^{a+b}} = I(a,b)\Gamma(a+b),$$ donc :

$$\lim_{x\to 1^-}\left[I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b}(x)\right] = I(a,b)\Gamma(a+b).$$

Par conséquent :

$$0 = \lim_{x\to 1^-}\left[g_a(x)g_b(x)(1-x)^{a+b} - I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b}(x)\right] = \Gamma(a)\Gamma(b) - I(a,b)\Gamma(a+b).$$

Donc $I(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$; $\underline{\underline{I(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}}$.

<u>Q2 .. Calcul de $I(a,b)$ dans le cas général ..</u>

<u>a)</u> $$I(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \underset{u=1-x}{=} \int_1^0 (1-u)^{a-1}u^{b-1}(-du) = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{a-1}du = I(b,a).$$

$\underline{\underline{I(a,b) = I(b,a)}}$.

<u>b)</u> $$I(a+1,b) + I(a,b+1) = \int_0^1\left[x^a(1-x)^{b-1} + x^{a-1}(1-x)^b\right]dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}[x+1-x]dx = I(a,b).$$

$\underline{\underline{I(a+1,b) + I(a,b+1) = I(a,b)}}$.

Soit $(\varepsilon, A) \in]0,1[^2$. $$\int_\varepsilon^A \underset{u}{x^a}\underset{v'}{(1-x)^{b-1}}dx = \left[x^a\frac{(1-x)^b}{-b}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A a x^{a-1}\frac{(1-x)^b}{-b}dx$$

$$\int_\varepsilon^A x^a(1-x)^{b-1}dx = -\frac{1}{b}A^a(1-A)^b + \frac{1}{b}\varepsilon^a(1-\varepsilon)^b + \frac{a}{b}\int_\varepsilon^A x^{a-1}(1-x)^b dx.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{b}\varepsilon^a(1-\varepsilon)^b = \lim_{A\to 1^-} -\frac{1}{b}A^a(1-A)^b = 0 \quad (a>0 \text{ et } b>0).$$

On obtient donc en faisant tendre ε vers 0 et A vers 1 : $I(a+1,b) = \frac{a}{b}I(a,b+1)$. ou :

$\underline{\underline{I(a,b+1) = \frac{b}{a}I(a+1,b)}}$

Donc : $I(a,b) = I(a+1,b) + I(a,b+1) = \left(1+\frac{b}{a}\right)I(a+1,b)$; $\underline{\underline{I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}I(a,b)}}$.

c) $I(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ pour $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$.

Pour $a>0$ et $b>0$: $I(a,b) = \dfrac{a+b}{a} I(a+1,b)$.

Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

$$I(a,b) = \frac{a+b}{a} I(a+1,b) = \frac{a+b}{a} I(b,a+1) = \frac{a+b}{a} \times \frac{b+a+1}{b} \times I(b+1,a+1)$$

$$I(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{ab} I(b+1,a+1) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{ab} I(a+1,b+1).$$

De même $I(a+1,b+1) = \dfrac{(a+b+2)(a+b+3)}{(a+1)(b+1)} I(a+2,b+2)$

$I(a,b) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)(a+b+3)}{a(a+1)\ b(b+1)} I(a+2,b+2)$. Comme $a+2>2$ et $b+2>2$,

on a : $I(a+2,b+2) = \dfrac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+4)}$; donc $I(a,b) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)(a+b+3)\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{a(a+1)\ b(b+1)\ \Gamma(a+b+4)}$

$\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Par itération : $\Gamma(a+2) = (a+1)a\Gamma(a)$, $\Gamma(b+2) = (b+1)b\Gamma(b)$ et

$\Gamma(a+b+4) = (a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)\ \Gamma(a+b)$

Il vient $I(a,b) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)(a+b+3)}{\Gamma(a+b+4)} \times \dfrac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} \times \dfrac{\Gamma(b+2)}{b(b+1)} = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$!

Finalement : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $I(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

<u>Remarque</u>.. Si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $I(a+1,b+1) = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} = \dfrac{a!\ b!}{(a+b+1)!}$; soit :

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \frac{a!\ b!}{(a+b+1)!}$$ ... déjà connu.