PARTIE I

Q1 Etude des suites récurrentes linéaires.

a) Notons E l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. S est une partie de E.

- la suite nulle appartient à S donc S n'est pas vide.
- Soient α et β deux réels, $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux éléments de S

$\alpha(u_n)_{n\geq1}+\beta(v_n)_{n\geq1} = (\alpha u_n+\beta v_n)_{n\geq 1}$ et : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $9(\alpha u_{n+3}+\beta v_{n+3})-9(\alpha u_{n+2}+\beta v_{n+2})-$ $7(\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1})+7(\alpha u_n+\beta v_n) = \alpha\underbrace{(9u_{n+3}-9u_{n+2}-7u_{n+1}+7u_n)}_{=0 \text{ car } (u_n)_{n\geq1}\in S}+\beta\underbrace{(9v_{n+3}-9v_{n+2}-7v_{n+1}+7v_n)}_{=0 \text{ car } (v_n)_{n\geq1}\in S} = 0$

Donc $\alpha(u_n)_{n\geq1}+\beta(v_n)_{n\geq1}\in S$

Ceci achève de montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.

b) $9X^3-9X^2-7X+7 = 9X^2(X-1)-7(X-1) = 9(X-1)(X^2-\frac{7}{9}) = 9(X-1)(X-\frac{\sqrt7}{3})(X+\frac{\sqrt7}{3})$.

L'équation $x\in\mathbb{R}$ et $9x^3-9x^2-7x+7=0$ admet trois solutions : 1, $\sqrt7/3$ et $-\sqrt7/3$.

c) Soit $r\in\mathbb{R}^*$. $(r^n)_{n\geq1}\in S \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 = 9r^{n+3}-9r^{n+2}-7r^{n+1}+7r^n = r^n(9r^3-9r^2-7r+7)=0 \overset{r\neq0}{\Leftrightarrow} 9r^3-9r^2-7r+7=0$

donc $(r^n)_{n\geq1}\in S \Leftrightarrow r=1$ ou $r=\sqrt7/3$ ou $r=-\sqrt7/3$.

d) • Nous allons montrer l'existence et l'unicité de α,β et γ. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} u_1 = \alpha+\sqrt7/3\,\beta-\sqrt7/3\,\gamma \\ u_2 = \alpha+7/9\,\beta+7/9\,\gamma \\ u_3 = \alpha+7\sqrt7/27\,\beta-7\sqrt7/27\,\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u_3-7u_1 = 9\alpha+7\sqrt7/3\,\beta-7\sqrt7/3\,\gamma-7\alpha-7\sqrt7/3\,\beta+7\sqrt7/3\,\gamma = 2\alpha \\ \beta+\gamma = \frac{9}{7}(u_2-\alpha) \\ \beta-\gamma = \frac{27}{7\sqrt7}(u_3-\alpha) \end{cases} \quad // \ L_1\leftarrow 9L_3-7L_1$$

$$\text{"} \quad \text{"} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac12(9u_3-7u_1) \\ \beta = \frac12\left[\frac97\left(u_2-\frac12(9u_3-7u_1)\right)+\frac{27}{7\sqrt7}\left(u_3-\frac12(9u_3-7u_1)\right)\right] \\ \gamma = \frac12\left[\frac97\left(u_2-\frac12(9u_3-7u_1)\right)-\frac{27}{7\sqrt7}\left(u_3-\frac12(9u_3-7u_1)\right)\right] \end{cases}$$

$$\text{"} \quad \text{"} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac12(9u_3-7u_1) \\ \beta = \frac{9}{28}\left[2u_2-9u_3+7u_1+\frac{3}{\sqrt7}(-7u_3+7u_1)\right] = \frac{9}{28}\left[(7+3\sqrt7)u_1+2u_2-(3\sqrt7+9)u_3\right] \\ \gamma = \frac{9}{28}\left[2u_2-9u_3+7u_1-\frac{3}{\sqrt7}(-7u_3+7u_1)\right] = \frac{9}{28}\left[(7-3\sqrt7)u_1+2u_2+(3\sqrt7-9)u_3\right] \end{cases}$$

Le système initial admet donc une solution et une seule.

des trois réels α, β, γ vérifiant $\begin{cases} u_1 = \alpha + \sqrt{7}/3\,\beta - \sqrt{7}/3\,\gamma \\ u_2 = \alpha + 7/9\,\beta + 7/9\,\gamma \\ u_3 = \alpha + 7\sqrt{7}/27\,\beta - 7\sqrt{7}/27\,\gamma \end{cases}$ soit :

$\alpha = \frac{1}{2}(9u_3 - 7u_1)$, $\beta = \frac{9}{28}\left[(7+3\sqrt{7})u_1 + 2u_2 - (3\sqrt{7}+9)u_3\right]$ et $\gamma = \frac{9}{28}\left[(7-3\sqrt{7})u_1 + 2u_2 + (3\sqrt{7}-9)u_3\right]$.

- Posons $u = (u_n)_{n\geq 1}$, $v = (v_n)_{n\geq 1}$, $r = (1^n)_{n\geq 1}$, $s = \left(\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ et $t = \left(\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right)_{n\geq 1}$
u, r, s et t sont des éléments de S donc $v = u - \alpha r - \beta s - \gamma t$ appartient à S car S est un sous-espace. $\underline{(v_n)_{n\geq 1} \in S}$.

- Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 3 que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 0$.

$\to v_1 = v_2 = v_3 = 0$ car $\begin{cases} u_1 = \alpha + \sqrt{7}/3\,\beta - \sqrt{7}/3\,\gamma \\ u_2 = \alpha + 7/9\,\beta + 7/9\,\gamma \\ u_3 = \alpha + 7\sqrt{7}/27\,\beta - 7\sqrt{7}/27\,\gamma \end{cases}$

$\to$ Supposons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_{n+1} = v_{n+2}$.

$9v_{n+3} \underset{(v_n)\in S}{=} 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n = 0$! $v_{n+3} = 0$. ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 0$. Donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \alpha + \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n}$.

e) Posons $\mathcal{B} = (r, s, t)$ $\quad$ ($r = (1^n)_{n\geq 1}$, $s = ((\sqrt{7}/3)^n)_{n\geq 1}$ et $t = ((-\sqrt{7}/3)^n)_{n\geq 1}$)

$\to$ $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de S

$\to$ dans d) nous avons montré que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est élément de S il existe un triplet (α, β, γ) de réels tel que : $(u_n)_{n\geq 1} = \alpha r + \beta s + \gamma t$

En fait ce triplet est unique car si : $(u_n)_{n\geq 1} = \alpha r + \beta s + \gamma t$ alors on a,
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha + \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n$; en particulier $\begin{cases} u_1 = \alpha + \sqrt{7}/3\,\beta - \sqrt{7}/3\,\gamma \\ u_2 = \alpha + 7/9\,\beta + 7/9\,\gamma \\ u_3 = \alpha + 7\sqrt{7}/27\,\beta - 7\sqrt{7}/27\,\gamma \end{cases}$

donc nécessairement $\alpha = \frac{1}{2}(9u_3 - 7u_1)$, $\beta = \frac{9}{28}\left[(7+3\sqrt{7})u_1 + 2u_2 - (3\sqrt{7}+9)u_3\right]$ et $\gamma = \frac{9}{28}\left[(7-3\sqrt{7})u_1 + 2u_2 + (3\sqrt{7}-9)u_3\right]$.

Par conséquent : $\forall (u_n)_{n\geq 1} \in S$, $\exists!\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\geq 1} = \alpha r + \beta s + \gamma t$.

$\underline{\mathcal{B} = (r, s, t) = \left((1^n)_{n\geq 1}, ((\sqrt{7}/3)^n)_{n\geq 1}, ((-\sqrt{7}/3)^n)_{n\geq 1}\right) \text{ est une base de } S.}$

Remarque.. $\dim_{\mathbb{R}} S = 3$. Ceci pouvait aussi s'obtenir en notant que S est isomorphe à $\mathbb{R}^3$

(Par $\forall (u_n)_{n\geq 1} \in S$, $\varphi((u_n)_{n\geq 1}) = (u_1, u_2, u_3)$)

(Q2) a) • Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$: $\Pi^n = a_n \Pi + b_n \Pi^2 + c_n \Pi^3 = a'_n \Pi + b'_n \Pi^2 + c'_n \Pi^3$

Alors $(a_n - a'_n)\Pi + (b_n - b'_n)\Pi^2 + (c_n - c'_n)\Pi^3 = 0$; donc $a_n - a'_n = b_n - b'_n = c_n - c'_n = 0$

car Π, Π^2 et Π^3 sont linéairement indépendantes ; $a'_n = a_n$, $b'_n = b_n$, $c'_n = c_n$.

Ceci prouve l'unicité demandée.

• $\Pi = 1\Pi + 0\Pi^2 + 0\Pi^3$; $\underline{a_1 = 1 \ , b_1 = 0 \ , c_1 = 0}$;

$\Pi^2 = 0\Pi + 1\Pi^2 + 0\Pi^3$; $\underline{a_2 = 0 \ , b_2 = 1 \ , c_2 = 0}$;

$\Pi^3 = 0\Pi + 0\Pi^2 + 1\Pi^3$; $\underline{a_3 = 0 \ , b_3 = 0 \ , c_3 = 1}$;

$\Pi^4 = -\frac{7}{9}\Pi + \frac{7}{9}\Pi^2 + \Pi^3$; $\underline{a_4 = -\frac{7}{9} \ , b_4 = \frac{7}{9} \ , c_4 = 1}$

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, \Pi^n = a_n \Pi + b_n \Pi^2 + c_n \Pi^3$

• C'est clair pour $n = 1$ (2, 3 et 4)

• Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$\Pi^{n+1} = \Pi^n \Pi \underset{\mathrm{HR}}{=} (a_n \Pi + b_n \Pi^2 + c_n \Pi^3)\Pi = a_n \Pi^2 + b_n \Pi^3 + c_n \Pi^4 = a_n \Pi^2 + b_n \Pi^3 + c_n \left[-\frac{7}{9}\Pi + \frac{7}{9}\Pi^2 + \Pi^3\right]$

$\Pi^{n+1} = (-\frac{7}{9} c_n)\Pi + (a_n + \frac{7}{9} c_n)\Pi^2 + (b_n + c_n)\Pi^3$

Posons $a_{n+1} = -\frac{7}{9} c_n$, $b_{n+1} = a_n + \frac{7}{9} c_n$ et $c_{n+1} = b_n + c_n$.

$\Pi^{n+1} = a_{n+1}\Pi + b_{n+1}\Pi^2 + c_{n+1}\Pi^3$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, \Pi^n = a_n \Pi + b_n \Pi^2 + c_n \Pi^3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -\frac{7}{9} c_n + a_n + \frac{7}{9} c_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n$.

$(a_n + b_n + c_n)_{n \geq 1}$ est une suite constante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 0 + 0$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n + b_n + c_n = 1.}}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$0 = 0\Pi^{n-1} = (9\Pi^4 - 9\Pi^3 - 7\Pi^2 + 7\Pi)\Pi^{n-1} = 9\Pi^{n+3} - 9\Pi^{n+2} - 7\Pi^{n+1} + 7\Pi^n$

$0 = 9(a_{n+3}\Pi + b_{n+3}\Pi^2 + c_{n+3}\Pi^3) - 9(a_{n+2}\Pi + b_{n+2}\Pi^2 + c_{n+2}\Pi^3) - 7(a_{n+1}\Pi + b_{n+1}\Pi^2 + c_{n+1}\Pi^3) + 7(a_n \Pi + b_n \Pi^2 + c_n \Pi^3)$

$0 = (9a_{n+3} - 9a_{n+2} - 7a_{n+1} + 7a_n)\Pi + (9b_{n+3} - 9b_{n+2} - 7b_{n+1} + 7b_n)\Pi^2 + (9c_{n+3} - 9c_{n+2} - 7c_{n+1} + 7c_n)\Pi$

n, n^2 et n^3 étant linéairement indépendantes on obtient :

$9a_{n+3}-9a_{n+2}-7a_{n+1}+7a_n = 9b_{n+3}-9b_{n+2}-7b_{n+1}+7b_n = 9c_{n+3}-9c_{n+2}-7c_{n+1}+7c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent : $\underline{\underline{(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1} \text{ sont des éléments de } S.}}$

<u>d)</u> D'après Q1, $(b_n)_{n\geq 1} = \alpha r + \beta s + \gamma t$ avec :

$$\alpha = \frac{1}{2}(9b_3 - 7b_1) \underset{\substack{\uparrow \\ b_1=b_3=0}}{=} 0 \ , \ \beta = \frac{9}{28}\left[(7+3\sqrt{7})b_1 + 2b_2 - (3\sqrt{7}+9)b_3\right] \underset{\substack{\uparrow \\ b_2=1}}{=} \frac{9}{14} \ , \ \gamma = \frac{9}{28}\left[(7-3\sqrt{7})b_1 + 2b_2 + (3\sqrt{7}-9)b_3\right] = \frac{9}{14}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 0 \times 1^n + \frac{9}{14}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \frac{9}{14}\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n$.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].}}$$

De même $(a_n) = \alpha r + \beta s + \gamma t$ avec
$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(9a_3 - 7a_1) = -7/2 \\ \beta = \frac{9}{28}\left[(7+3\sqrt{7})a_1 + 2a_2 - (3\sqrt{7}+9)a_3\right] = \frac{9(7+3\sqrt{7})}{28} \\ \gamma = \frac{9}{28}\left[(7-3\sqrt{7})a_1 + 2a_2 + (3\sqrt{7}-9)a_3\right] = \frac{9(7-3\sqrt{7})}{28} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = -\frac{7}{2} + \frac{9(7+3\sqrt{7})}{28}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \frac{9(7-3\sqrt{7})}{28}\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.}}$$

De la même manière (ou en utilisant $c_n = 1 - a_n - b_n$) on obtient :

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ c_n = \frac{9}{2} - \frac{9(3\sqrt{7}+9)}{28}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \frac{9(3\sqrt{7}-9)}{28}\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n}}$$

Q3 <u>a)</u>
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} . \ A^2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} . \ A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 7/27 & 0 & 0 \\ 7/9 & 0 & 14/27 & 0 \\ 0 & 14/27 & 0 & 0 \\ 2/9 & 2/9 & 13/27 & 1 \end{bmatrix}$$

et
$$A^4 = \begin{bmatrix} 7/27 & 0 & 14/81 & 0 \\ 0 & 49/81 & 0 & 0 \\ 14/27 & 0 & 28/81 & 0 \\ 2/9 & 32/81 & 13/27 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9A^4 - 9A^3 = 9\begin{bmatrix} 7/27 & -7/27 & 14/81 & 0 \\ -7/9 & 49/81 & -14/27 & 0 \\ 14/27 & -14/27 & 28/81 & 0 \\ 0 & 14/81 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/9 & 0 \\ -1 & 7/9 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 4/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} = 7A^2 - 7A$$

Il vient donc : $\underline{\underline{9A^4-9A^3-7A^2+7A=0}}$

Montrons que A, A^2 et A^3 sont linéairement indépendants. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$xA+yA^2+zA^3=0.\quad x\begin{bmatrix}0&1/3&0&0\\1&0&2/3&0\\0&2/3&0&0\\0&0&1/3&1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1/3&0&2/9&0\\0&7/9&0&0\\2/3&0&4/9&0\\0&2/9&0&1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&7/27&0&0\\7/9&0&14/27&0\\0&14/27&0&0\\4/9&2/9&13/27&1\end{bmatrix}=0$$

En considérant la première colonne on obtient : $\begin{cases}1/3\,y=0\\ x+\frac{7}{9}z=0\\ 2/3\,y=0\\ 4/9\,z=0\end{cases}$ donc $x=y=z=0$.

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ xA+yA^2+zA^3=0\Rightarrow x=y=z=0$.

$\underline{\underline{A, A^2 \text{ et } A^3 \text{ sont linéairement indépendantes.}}}$ A satisfait donc aux conditions (2) et (3).

b) Les matrices A et B sont semblables car elles "représentent" le même endomorphisme.

Donc $\exists P\in GL_4(\mathbb{R})$, $B=P^{-1}AP$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=P^{-1}A^nP=P^{-1}(a_nA+b_nA^2+c_nA^3)P=a_nP^{-1}AP+b_nP^{-1}A^2P+c_nP^{-1}A^3P=a_nB+b_nB^2+c_nB^3$.

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ B^n=a_nB+b_nB^2+c_nB^3.}}$

PARTIE II $\boxed{A}$

Q1 Lois des variables aléatoires X_n.

a) $p(X_0=0)=1$, $p(X_0=1)=0$, $p(X_0=2)=0$, $p(X_0=3)=0$. $\underline{\underline{U_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}}$

A l'instant 1 le point se trouve nécessairement sur un sommet numéroté 1.

$p(X_1=0)=0$, $p(X_1=1)=1$, $p(X_1=2)=0$, $p(X_1=3)=0$. $U_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

Un sommet numéroté 1 a deux sommets adjacents numérotés 2 et un sommet adjacent numéroté 0, par conséquent le point se trouve à l'instant 2 en 0 avec une probabilité 1/3 ou sur un sommet numéroté 2 avec une probabilité 2/3.

$p(X_2=0)=\frac{1}{3}$, $p(X_2=1)=0$, $p(X_2=2)=\frac{2}{3}$, $p(X_2=3)=0$. $U_2=\begin{bmatrix}1/3\\0\\2/3\\0\end{bmatrix}$.

b) $(\{X_n=0\},\{X_n=1\},\{X_n=2\},\{X_n=3\})$ est un système complet d'événements.

Par conséquent, pour $i=0,1,2,3$: $p(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{3} p(X_{n+1}=i/X_n=k)\,p(X_n=k)\ldots$

à quelques abus près (… si $p(X_n=k)=0$?!). Calculons donc pour $(i,k)\in[\![0,3]\!]^2$, $p(X_{n+1}=i/X_n=k)$.

- Si à un instant n le point est en 0 à l'instant suivant il est sur un sommet numéroté 1.

Par conséquent : $p(X_{n+1}=0/X_n=0)=p(X_{n+1}=2/X_n=0)=p(X_{n+1}=3/X_n=0)=0$ et $p(X_{n+1}=1/X_n=0)=1$

- Si à un instant n le point est en sur un sommet numéroté 1 à l'instant suivant il est en 0 avec la probabilité 1/3 ou sur un sommet numéroté 2 avec la probabilité 2/3 car un sommet numéroté 1 a deux sommets adjacents numérotés 2 et le troisième est 0.

Par conséquent : $p(X_{n+1}=0/X_n=1)=\frac{1}{3}$, $p(X_{n+1}=1/X_n=1)=0$, $p(X_{n+1}=2/X_n=1)=\frac{2}{3}$, $p(X_{n+1}=3/X_n=1)=0$.

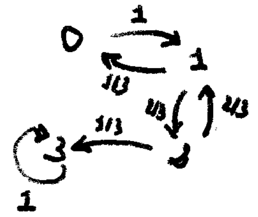
- Un sommet numéroté 2 a deux sommets adjacents numérotés 1 et le troisième numéroté 3.

Par conséquent : $p(X_{n+1}=0/X_n=2)=0$, $p(X_{n+1}=1/X_n=2)=\frac{2}{3}$, $p(X_{n+1}=2/X_n=2)=0$ $p(X_{n+1}=3/X_n=2)=\frac{1}{3}$

- Lorsque le point arrive au sommet n°3 il y reste.

Donc $p(X_{n+1}=0/X_n=3)=p(X_{n+1}=1/X_n=3)=p(X_{n+1}=2/X_n=3)=0$ et $p(X_{n+1}=3/X_n=3)=1$.

Conclusion.



$$p(X_{n+1}=0)=p(X_{n+1}=0/X_n=0)\,p(X_n=0)+p(X_{n+1}=0/X_n=1)\,p(X_n=1)+$$
$$p(X_{n+1}=0/X_n=2)\,p(X_n=2)+p(X_{n+1}=0/X_n=3)\,p(X_n=3)$$

$$\underline{\underline{p(X_{n+1}=0)=\frac{1}{3}p(X_n=1)}}.$$

$$p(X_{n+1}=1)=p(X_{n+1}=1/X_n=0)\,p(X_n=0)+p(X_{n+1}=1/X_n=1)\,p(X_n=1)+p(X_{n+1}=1/X_n=2)\,p(X_n=2)+p(X_{n+1}=1/X_n=3)\,p(X_n=3)$$

$$\underline{\underline{p(X_{n+1}=1)=p(X_n=0)+\frac{2}{3}p(X_n=2)}}.$$

De même : $\underline{\underline{p(X_{n+1}=2)=\frac{2}{3}p(X_n=1)}}$ et $\underline{\underline{p(X_{n+1}=3)=\frac{1}{3}p(X_n=2)+p(X_n=3)}}$

$$U_{n+1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}p(X_n=1)\\ p(X_n=0)+\frac{2}{3}p(X_n=2)\\ \frac{2}{3}p(X_n=1)\\ \frac{1}{3}p(X_n=2)+p(X_n=3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1/3&0&0\\1&0&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p(X_n=0)\\p(X_n=1)\\p(X_n=2)\\p(X_n=3)\end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=M\,U_n \quad \text{avec} \quad M=A=}}\begin{bmatrix}0&1/3&0&0\\1&0&2/3&0\\0&2/3&0&0\\0&0&1/3&1\end{bmatrix}.$

Remarque.. En toute rigueur on ne peut écrire $p(X_{n+1}=i / X_n=k)$ que si $p(X_n=k)\neq 0$
Ceci n'est bien évidemment pas vérifié pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,3]\!]$.

En toute rigueur il fallait procéder comme suit

1ère étape.. Ecrire $p(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{3} p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=k\})$

2ème étape.. Calculer $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=k\})$ en envisageant deux cas

ou $p(X_n=k)\neq 0$, on calcule alors la valeur α_{ik} de $p(X_{n+1}=i/X_n=k)$ et on écrit $p(X_{n+1}=i)=\alpha_{ik}\,p(X_n=k)$

ou $p(X_n=k)=0$; $\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=k\}\subset\{X_n=k\}$, par conséquent :

$0\leq p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=k\})\leq p(\{X_n=k\})=0$. Il vient alors $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=k\})=0$

Rien n'empêche alors d'écrire encore $p(X_{n+1}=i)=\alpha_{ik}\,p(X_n=k)$ (qui signifie $0=0$!!) où α_{ik} est le réel trouvé lorsque $p(X_n=k)\neq 0$!

Ceci justifie (?) les abus de la démonstration précédente.

c) Une récurrence simple montre que : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\Pi^n U_0}}$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=\Pi U_n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\Pi^n\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n est donc la 1ère colonne de la matrice Π^n. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\Pi^n=a_n\Pi+b_n\Pi^2+c_n\Pi^3$

les premières colonnes de Π, Π^2 et Π^3 étant : $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/3\\0\\2/3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7/9\\0\\2/9\end{bmatrix}$: $U_n=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}b_n\\a_n+\frac{7}{9}c_n\\\frac{2}{3}b_n\\\frac{2}{9}c_n\end{bmatrix}$

Finalement, si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$p(X_n=0)=\frac{1}{3}b_n=\frac{3}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right]$$

$$p(X_n=1)=a_n+\frac{7}{9}c_n=\frac{3\sqrt{7}}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n-\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right]$$

$$p(X_n=2)=\frac{3}{7}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right]=\frac{2}{3}b_n$$

$$p(X_n=3)=1-\frac{3\sqrt{7}+9}{14}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n+\frac{3\sqrt{7}-9}{14}\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n$$

Remarque.. On pouvait encore obtenir la loi de X_n en calculant Π^n par diagonalisation. Notons que Π admet quatre valeurs propres 0, 1, $\sqrt{7}/3$ et $-\sqrt{7}/3$ dont les sous-espaces propres associés sont $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\\sqrt{7}\\2\\-\sqrt{7}-3\end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{7}\\2\\\sqrt{7}-3\end{bmatrix}\right)$

n'est donc diagonalisable. La suite est donc mais pénible. On peut faire beaucoup plus simple en décomposant U_0 sur la base $(X,Y,Z,\widehat{T})$ où $X=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\\1\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix}1\\\sqrt7\\2\\-\sqrt7-3\end{bmatrix}$ et $\widehat{T}=\begin{bmatrix}1\\-\sqrt7\\2\\\sqrt7-3\end{bmatrix}$. $U_0 = xX+yY+zZ+t\widehat{T}$ avec $x=2/7$

$y=1$

$z=t=3/14$

On a alors $U_n = M^nU_0 = xM^nX + yM^nY + zM^nZ + tM^n\widehat{T} = x\times 0^nX + y\times 1^nY + z\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^nZ + t\left(-\frac{\sqrt7}{3}\right)^n\widehat{T}$

Donc $U_n = Y + \frac{3}{14}\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^nZ + \frac{3}{14}\left(-\frac{\sqrt7}{3}\right)^n\widehat{T}$

On pouvait encore poser $\alpha_n=p(X_n=0)$, $\beta_n=p(X_n=1)$, $\gamma_n=p(X_n=2)$ et $\delta_n=p(X_n=3)$ et écrire $\begin{cases}\alpha_{n+1}=\frac13\beta_n\\ \beta_{n+1}=\alpha_n+\frac23\gamma_n\\ \gamma_{n+1}=\frac23\beta_n\\ \delta_{n+1}=\frac13\gamma_n+\delta_n\end{cases}$. $\beta_{n+2}=\alpha_{n+1}+\frac23\gamma_{n+1}=\frac13\beta_n+\frac23\times\frac23\beta_n=\frac79\beta_n$.

$(\beta_{2n})_{n\geq0}$ (resp. $(\beta_{2n+1})_{n\geq0}$) est une suite géométrique de raison $7/9$ et de premier terme $\beta_0=0$ (resp. $\beta_1=1$).

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\beta_{2n}=0$ et $\beta_{2n+1}=\left(\frac79\right)^n=\frac{3}{\sqrt7}\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n+1}=\frac{3\sqrt7}{14}\left(2\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n+1}\right)=\frac{3\sqrt7}{14}\left[\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n+1}-\left(-\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n+1}\right]$

mieux $\forall n\in\mathbb{N}$, $\beta_n=\frac{3\sqrt7}{14}\left[\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^n-\left(-\frac{\sqrt7}{3}\right)^n\right]$!! On obtient sans difficulté α_n et γ_n (car $\alpha_n=1/3\,\beta_{n-1}$ et $\gamma_n=2/3\,\beta_{n-1}$) puis δ_n (avec $1=\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n$). En une page au plus on pouvait obtenir la loi de X_n et se dispenser de toute la partie I !

Q2 Loi de la variable T

a) A l'instant 0 le point est en 0, à l'instant 1 il est sur un sommet numéroté 1 et à l'instant 2 le point est sur un sommet numéroté 0 ou 2. Par conséquent : $p(T=0)=p(T=1)=p(T=2)=0$. Ne reste plus qu'à prouver que $p(T=2n)=0$ pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. $0\leq p(T=2n)\underset{\{T=2n\}\subset\{X_{2n-1}=2\}}{\leq} p(X_{2n-1}=2)=\frac37\left[\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n-1}+\left(-\frac{\sqrt7}{3}\right)^{2n-1}\right]=0$

Donc $p(T=2n)=0$

Ceci achève de prouver que T ne peut prendre avec une probabilité non nulle que des valeurs impaires supérieures ou égales à 3.

Remarque.. Nous avons montré que $p(T=2n)=0$, nous aurions pu montrer que $\{T=2n\}=\emptyset$ en montrant par récurrence que $\{X_{2n-1}=2\}=\emptyset$ ou qu'à l'instant $2n-1$ le point est sur un sommet 1 ou sur le sommet 3.

$p(T=3) = p(\{X_0=0\} \cap \{X_1=1\} \cap \{X_2=2\} \cap \{X_3=3\})$

$p(T=3) = p(\{X_2=2\} \cap \{X_3=3\}) = p(X_3=3 / X_2=2)\, p(X_2=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. $\underline{\underline{p(T=3) = \frac{2}{9}}}$.

↑ $\{X_0=0\}$ et $\{X_1=1\}$ sont des événements certains

Si $\{X_{2n}=2\}$ et $\{X_{2n+1}=3\}$ sont réalisés le point arrive (pour la première fois) sur le sommet 3 à l'instant $2n+1$ ce qui réalise $\{T=2n+1\}$. Donc $\{X_{2n}=2\} \cap \{X_{2n+1}=3\} \subset \{T=2n+1\}$

Si $\{T=2n+1\}$ se réalise 1°.. le point est à l'instant $2n+1$ sur le sommet 3 donc $\{X_{2n+1}=3\}$ est réalisé

2°.. ceci pour la première fois ; il ne pouvait donc être que sur un sommet numéroté 2 à l'instant précédent, $\{X_{2n}=2\}$ est réalisé.

Donc $\{T=2n+1\} \subset \{X_{2n}=2\} \cap \{X_{2n+1}=3\}$

Finalement $\underline{\underline{\{X_{2n}=2\} \cap \{X_{2n+1}=3\} = \{T=2n+1\}}}$.

$p(T=2n+1) = p(X_{2n+1}=3 / X_{2n}=2)\, p(X_{2n}=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} b_{2n} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{2n} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{2n}\right]$

$p(T=2n+1) = \frac{1}{7} \times 2 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n$. $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(T=2n+1) = \frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n}}$

b) Les événements $\{T=2n+1\}$ étant disjoints, la série de terme général $p(T=2n+1)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=2n+1) = p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{T=2n+1\}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=2n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} \times \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = 1$$

$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=2n+1) = 1}}$. L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{T=2n+1\}$ est quasi-certain. Il est donc quasi-certain que le point arrive sur le sommet 3 ... T est bien une var !

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)p(T=2n+1) = 2 \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} \times n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{4}{9} n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + p(T=2n+1)$

La série de terme général $(2n+1)p(T=2n+1)$ est absolument convergente car elle est à termes positifs et combinaison linéaire de séries convergentes ($\left|\frac{7}{9}\right| < 1$!).

Par conséquent $E(T)$ existe.

$$E(T) = \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} p(T=2n+1) = \frac{4}{9} \frac{1}{(1-7/9)^2} + 1 = \frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 1 = 9 + 1 = 10.$$

$\underline{\underline{E(T) = 10}}$

PARTIE II $\boxed{B}$

Q1 a) $(\{Y_n=k\})_{k\in[\![0,3]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$\forall i\in[\![0,3]\!],\ p(Y_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{3}p(Y_{n+1}=i/Y_n=k)\,p(Y_n=k)$. Calculons donc

$p(Y_{n+1}=i/Y_n=k)$ pour $(i,k)\in[\![0,3]\!]^2$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Lorsque le point revient en 0 il y reste donc : $p(Y_{n+1}=0/Y_n=0)=1$ ($n\geq 1$) et

$p(Y_{n+1}=i/Y_n=0)=0$ pour $i\in[\![1,3]\!]$.

Un sommet numéroté 1 a deux sommets adjacents numérotés 2 et le troisième est 0, par conséquent :

$p(Y_{n+1}=1/Y_n=1)=p(Y_{n+1}=3/Y_n=1)=0$, $p(Y_{n+1}=2/Y_n=1)=\frac{2}{3}$, $p(Y_{n+1}=0/Y_n=1)=\frac{1}{3}$.

Un sommet numéroté 2 a deux sommets adjacents numérotés 1 et le troisième numéroté 3, donc

$p(Y_{n+1}=0/Y_n=2)=p(Y_{n+1}=2/Y_n=2)=0$, $p(Y_{n+1}=3/Y_n=2)=\frac{1}{3}$, $p(Y_{n+1}=1/Y_n=2)=\frac{2}{3}$.

Le sommet numéroté 3 a ses trois sommets adjacents numérotés 2, par conséquent :

$p(Y_{n+1}=i/Y_n=3)=0$ si $i\in\{0,1,3\}$ et $p(Y_{n+1}=2/Y_n=3)=1$.

Finalement :

$p(Y_{n+1}=0)=p(Y_n=0)+\frac{1}{3}p(Y_n=1)$; $\qquad p(Y_{n+1}=2)=\frac{2}{3}p(Y_n=1)+p(Y_n=3)$;

$p(Y_{n+1}=1)=\frac{2}{3}p(Y_n=2)$; $\qquad p(Y_{n+1}=3)=\frac{1}{3}p(Y_n=2)$.

$$\begin{bmatrix}p(Y_{n+1}=0)\\p(Y_{n+1}=1)\\p(Y_{n+1}=2)\\p(Y_{n+1}=3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1/3&0&0\\0&0&2/3&0\\0&2/3&0&1\\0&0&1/3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p(Y_n=0)\\p(Y_n=1)\\p(Y_n=2)\\p(Y_n=3)\end{bmatrix}$$; $V_{n+1}=NV_n$ avec $N=B$!

(je préfère N que Π !)

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_{n+1}=NV_n$ avec $N=B=\begin{bmatrix}1&1/3&0&0\\0&0&2/3&0\\0&2/3&0&1\\0&0&1/3&0\end{bmatrix}$.

b) Une récurrence simple donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=N^{n-1}V_1$. $V_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

$V_n=(a_{n-1}B+b_{n-1}B^2+c_{n-1}B^3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$

V_n est donc, pour $n\in[\![2,+\infty[\![$, la deuxième colonne de $a_{n-1}B+b_{n-1}B^2+c_{n-1}B^3$.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ et $B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 13/27 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 14/27 & 0 \\ 0 & 14/27 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 7/27 & 0 \end{bmatrix}$

$$V_n = a_{n-1}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + b_{n-1}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/9 \\ 0 \\ 2/9 \end{bmatrix} + c_{n-1}\begin{bmatrix} 13/27 \\ 0 \\ 14/27 \\ 0 \end{bmatrix}$$ pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$

$$p(Y_n=0) = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{13}{27}c_{n-1}$$

$$p(Y_n=1) = \frac{4}{9}b_{n-1}$$

$$p(Y_n=2) = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{14}{27}c_{n-1}$$

$$p(Y_n=3) = \frac{2}{9}b_{n-1}$$

pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$

Remarque .. ceci ne vaut pas pour $n=1$ car $p(Y_1=0)=0$, $p(Y_1=1)=1$, $p(Y_1=2)=0$, $p(Y_1=3)=0$ alors que a_0, b_0 et c_0 ne sont pas définis !

D'où l'importance de valider les résultats obtenus et de ne pas faire une confiance aveugle au concepteur (qui ici envoie 7000 ou 8000 candidats vers une fausse espérance !)

Q2 Loi de la variable aléatoire R.

a) Comme dans II A Q2 on prouve que si $n \in \mathbb{N}^*$: $(Y_{2n-1}=1) \cap (Y_{2n}=0) = (R=2n)$

On peut aussi prouver sans difficulté que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(R=2n+1)=\emptyset$

$p(R=2n) = p(Y_{2n}=0 / Y_{2n-1}=1)\, p(Y_{2n-1}=1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $p(R=2) = p(Y_2=0 / Y_1=1)\, p(Y_1=1) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$ et

$p(R=2n) = \frac{1}{3} p(Y_{2n-1}=1) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} b_{2n-1-1} = \frac{4}{27} b_{2n-2}$ pour $n \in [\![2,+\infty[\![$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $p(R=2n) = \frac{4}{27} \times \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{2n-2} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{2n-2}\right] = \frac{2}{21} \times 2 \times \left(\frac{7}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{21}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$

$p(R=2)=\frac{1}{3}$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $p(R=2n)=\frac{4}{21}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$

b) $(\{R=2n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints ; la série de terme général $p(R=2n)$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p(R=2n) = p\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(R=2n)\right)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(R=2n) = \frac{1}{3}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{21}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}+\frac{4}{21}\times\frac{7}{9}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}+\frac{4}{27}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(R=2n) = \frac{1}{3}+\frac{4}{27}\times\frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1. \qquad \underline{\sum_{n=1}^{+\infty} p(R=2n)=1}.$$

Il est donc quasi-certain que le point revienne en 0 (R est bien une var...).

c) Pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$ $2n\,p(R=2n)\geq 0$ et $2n\,p(R=2n)=\frac{8}{21}\,n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$

La série $2n\,p(R=2n)$ est donc absolument convergente ; E(R) existe.

$$E(R)=2\times p(R=2)+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{8}{21}\,n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}+\frac{8}{21}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{7}{9}\right)^{2}}-1\right]=\frac{2}{3}+\frac{8}{21}\times\frac{77}{4}$$

$$E(R)=\frac{2}{3}+\frac{2\times 11}{3}=8$$

$\underline{E(R)=8}$.