Q1 Etude de suites récurrentes linéaires.

a) L'équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire d'ordre 2 est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = 4(-\sin^2\theta) = -4\sin^2\theta$

4 1er cas.. $\theta \in]0,\pi[$. $\Delta < 0$. L'équation admet deux solutions complexes et conjuguées :
$z_1 = \dfrac{2\cos\theta + i\,2\sin\theta}{2} = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.

Alors le cours indique que : $((\cos k\theta)_{k\geqslant 0}, (\sin k\theta)_{k\geqslant 0})$ est une base de $E(\theta)$.

3 2e cas.. $\theta = 0$. $\Delta = 0$. L'équation admet une solution double : $-\dfrac{(-2\cos\theta)}{2\times 1} = \cos\theta = 1$.

Alors $((1)_{k\geqslant 0}, (k)_{k\geqslant 0})$ est une base de $E(0)$.

3 3e cas.. $\theta = \pi$. $\Delta = 0$. L'équation admet une solution double : $\cos\theta = -1$.

Alors $(((-1)^k)_{k\geqslant 0}, (k(-1)^k)_{k\geqslant 0})$ est une base de $E(\pi)$.

Remarque.. Notons que dans tous les cas $E(\theta)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
Notons aussi qu'une suite de $E(\theta)$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes ; $\varphi : \begin{array}{l} E(\theta) \to \mathbb{R}^2 \\ (u_k)_{k\geqslant 0} \to (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme de $E(\theta)$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\theta \in]0,\pi[$. Soit $(s_k(\theta))_{k\geqslant 0}$ un élément de $E(\theta)$. $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k(\theta) = \lambda\cos k\theta + \mu\sin k\theta$.

$s_0(\theta) = 0$ et $s_1(\theta) = \sin\theta \iff \begin{cases} \lambda\times 1 + \mu\times 0 = 0 \\ \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = \sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ (\mu-1)\sin\theta = 0 \end{cases} \underset{\sin\theta\neq 0}{\iff} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$.

Ainsi il existe une une suite $(s_k(\theta))_{k\geqslant 0}$ et une seule de $E(\theta)$ telle que : $s_0(\theta) = 0$ et $s_1(\theta) = \sin\theta$

1 $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k(\theta) = \sin(k\theta)$.

b) Par définition : • $F(\theta) \subset E(\theta)$.

• La suite nulle appartient à $F(\theta)$ donc $F(\theta)$ n'est pas vide.

• Soit λ un réel et soient $(u_k)_{k\geqslant 0}$ et $(v_k)_{k\geqslant 0}$ deux éléments de $F(\theta)$.

$\lambda(u_k)_{k\geq 0}+(v_k)_{k\geq 0}=(\lambda u_k+v_k)_{k\geq 0}$ est un élément de $E(\theta)$ car $E(\theta)$ est un espace vectoriel.

De plus $\lambda u_0+v_0=\lambda\times 0+0=0$ et $\lambda u_{n+1}+v_{n+1}=\lambda\times 0+0=0$; ainsi $\lambda(u_k)_{k\geq 0}+(v_k)_{k\geq 0}\in F(\theta)$.

2 $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$.

$\theta=0$. Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in E(0)$. $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=\lambda 1^k+\mu k 1^k=\lambda+k\mu$.

$(u_k)_{k\geq 0}\in F(0)\Leftrightarrow u_0=u_{n+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda+(n+1)\mu=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\mu=0.$

Ainsi $F(0)=\{0_{E(0)}\}$

$\theta=\pi$. Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in E(\pi)$. $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=\lambda(-1)^k+\mu k(-1)^k$

$(u_k)_{k\geq 0}\in F(\pi)\Leftrightarrow u_0=u_{n+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ (-1)^{n+1}[\lambda+\mu(n+1)]=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\mu=0.$

Ainsi $F(\pi)=\{0_{E(\pi)}\}$.

1 Finalement : $F(0)=\{0_{E(0)}\}$ et $F(\pi)=\{0_{E(\pi)}\}$.

c) Ici $\theta\in]0,\pi[-\left\{\frac{p\pi}{n+1}\ ;\ p\in[\![1,n]\!]\right\}$.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément de $F(\theta)$. $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=\lambda\cos k\theta+\mu\sin k\theta$.

$u_0=u_{n+1}=0$ donc $\lambda=0$ et $\mu\sin(n+1)\theta=0$.

Or $\sin(n+1)\theta=0\Leftrightarrow(n+1)\theta\equiv 0\,[\pi]\Leftrightarrow\exists p\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{p\pi}{n+1}\overset{\theta\in]0,\pi[}{\Leftrightarrow}\exists p\in[\![1,n]\!],\ \theta=\frac{p\pi}{n+1}$.

Comme $\theta\in]0,\pi[-\left\{\frac{p\pi}{n+1};\ p\in[\![1,n]\!]\right\}$, $\sin(n+1)\theta\neq 0$; ainsi $\lambda=\mu=0$. $(u_k)_{k\geq 0}$ est alors la suite nulle.

1 Si $\theta\in]0,\pi[-\left\{\frac{p\pi}{n+1}\ ;\ p\in[\![1,n]\!]\right\}$ alors $F(\theta)=\{0_{E(\theta)}\}$.

d) On suppose que : $\exists p\in[\![1,n]\!]$, $\theta=\frac{p\pi}{n+1}$. $(S_k(\theta))$ est un élément de $E(\theta)$; de

3! plus $S_0(\theta)=\sin(0\times\theta)=0$ et $S_{n+1}(\theta)=\sin((n+1)\theta)=\sin(p\pi)=0$. $(S_k(\theta))_{k\geq 0}\in F(\theta)$.

$S_1(\theta)=\sin\theta\neq 0$ car $\theta\in]0,\pi[$; donc $(S_k(\theta))_{k\geq 0}$ n'est pas la suite nulle.

Ainsi $\dim F(\theta)\geq 1$ et $\dim F(\theta)\leq 2$ car : $F(\theta)\subset E(\theta)$ et $\dim E(\theta)=2$.

Ainsi $\dim F(\theta)\in\{1,2\}$. La suite $(\cos k\theta)_{k\geq 0}$ appartient à $E(\theta)$ mais n'appartient pas à $F(\theta)$ car $\cos(0\times\theta)=1\neq 0$; donc $F(\theta)\subsetneq E(\theta)$; $\dim F(\theta)=1$.

1 $\dim F(\theta)=1$ et $(S_k(\theta))_{k\geq 0}$ est une base de $F(\theta)$.

Résumons : Si $\theta \in [0,\pi] - \left\{\frac{p\pi}{n+1} \,;\, p \in [\![1,n]\!]\right\}$, $F(\theta) = \{0_{E(\theta)}\}$.

Si $\theta \in \left\{\frac{p\pi}{n+1} \,;\, p \in [\![1,n]\!]\right\}$, $F(\theta) = \mathrm{Vect}\left((S_k(\theta))_{k\geq 0}\right)$.

Q2 "Noyau" de $A(\theta)$.

1 - Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (?!) un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$A(\theta)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

$$A(\theta)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\cos\theta)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + (2\cos\theta)x_2 - x_3 = 0 \\ \quad\cdots \\ -x_{k-1} + (2\cos\theta)x_k - x_{k+1} = 0 \\ \quad\cdots \\ -x_{n-2} + (2\cos\theta)x_{n-1} - x_n = 0 \\ -x_{n-1} + (2\cos\theta)x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (C) \begin{cases} x_2 - 2\cos\theta\, x_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k+1} - 2\cos\theta\, x_k + x_{k-1} = 0 \\ -2\cos\theta\, x_n + x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

2 - **C.S.** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ de $F(\theta)$ telle que $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2, \dots, u_n = x_n$. Montrons que $A(\theta)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$, $u_0 = u_{n+1} = 0$. Vérifions alors (C)

$$\begin{cases} x_2 - 2\cos\theta\, x_1 = u_2 - 2\cos\theta\, u_1 \overset{u_0=0}{=} u_2 - 2\cos\theta\, u_1 + u_0 = 0. \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k+1} - 2\cos\theta\, x_k + x_{k-1} = u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0 \\ -2\cos\theta\, x_n + x_{n-1} = -2\cos\theta\, u_n + u_{n-1} \underset{u_{n+1}=0}{=} u_{n+1} - 2\cos\theta\, u_n + u_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Ainsi $A(\theta)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)}$.

3 **C.N** Supposons que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que $A(\theta)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors (C) est vérifié(e).

Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ l'élément de $E(\theta)$ qui vérifie $u_0 = 0$ et $u_1 = x_1$ (l'existence et l'unicité d'une telle suite est assurée par l'isomorphisme $\varphi : \begin{array}{l} E(\theta) \to \mathbb{R}^2 \\ (u_k)_{k\geq 0} \mapsto (u_0,u_1) \end{array}$).

Montrons que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k = x_k$ et que $(u_k) \in F(\theta)$.

▲ $u_0=0$ ▲ Montrons par une récurrence d'ordre 2 que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=x_k$.

→ $u_1=x_1$ par définition.

$u_2 = 2\cos\theta\, u_1 - u_0 = 2\cos\theta\, x_1 \overset{(C)}{=} x_2$

→ supposons que $u_{k-1}=x_{k-1}$ et $u_k=x_k$ pour $k\in[\![2,n-1]\!]$.

Alors $u_{k+1} = 2\cos\theta\, u_k - u_{k-1} = 2\cos\theta\, x_k - x_{k-1} \underset{(C)}{=} x_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

▲ Montrons pour finir que $u_{n+1}=0$. $u_{n+1}=2\cos\theta\, u_n-u_{n-1}=2\cos\theta\, x_n-x_{n-1}\overset{(C)}{=}0$; ainsi $(u_k)_{k\geq 0}\in F(\theta)$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=x_k$.

Si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $A(\theta)X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ alors il existe une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ de $F(\theta)$ telle que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=x_k$.

b) Cherchons $\{X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\mid A(\theta)X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

1er Cas.. $\theta\in[0,\pi]-\{\frac{p\pi}{n+1}\,;\ p\in[\![1,n]\!]\}$. Alors $F(\theta)=\{0_{E(\theta)}\}$

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A(\theta)X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Il existe une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ de $F(\theta)$ telle que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=x_k$. Or $F(\theta)=\{0_{E(\theta)}\}$ donc $(u_k)_{k\geq 0}$ est la suite nulle ; $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=0$. $X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Réciproquement $A(\theta)0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$!

2 Si $\theta\in[0,\pi]-\{\frac{p\pi}{n+1}\,;\ p\in[\![1,n]\!]\}$, $\{X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\mid A(\theta)X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}=\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et $A(\theta)$ est inversible.

2e Cas.. $\exists p\in[\![1,n]\!]$, $\theta=\frac{p\pi}{n+1}$. Alors $F(\theta)=\mathrm{Vect}((s_k(\theta))_{k\geq 0})$.

Posons $H=\{X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\mid AX=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et $X_p=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \sin(2\theta)\\ \vdots\\ \sin(n\theta)\end{pmatrix}$. Montrons que $H=\mathrm{Vect}(X_p)$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in H$.

Il existe une suite $(u_k)_{k\geq 0}\in F(\theta)$ telle que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=x_k$.

$(u_k)_{k\geq 0}\in F(\theta)=\mathrm{Vect}(s_k(\theta))$. $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N},\ u_k=\lambda s_k(\theta)=\lambda\sin(k\theta)$

$\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\lambda\sin(k\theta)$; $X=\lambda X_p$; $X\in\mathrm{Vect}(X_p)$. Ainsi $H\subset\mathrm{Vect}(X_p)$.

Réciproquement soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(X_p)$. $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\lambda\sin(k\theta)$.

Considérons alors la suite $(u_k)_{k\geq 0}=\lambda(s_k(\theta))$.

$(u_k)_{k\geq 0}\in\mathrm{Vect}((s_k(\theta))_{k\geq 0})=F(\theta)$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=\lambda s_k(\theta)=\lambda\sin(k\theta)=x_k$; ainsi $A(\theta)X=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

3 Si $\exists\, p \in [\![1,n]\!]$, $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ alors 1°.. $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid A(\theta)X = 0\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}\right)$.

2°.. $A(\theta)$ n'est pas inversible.

Q3 Valeurs propres de la matrice A.

3 ! a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ A est une matrice symétrique et réelle donc les valeurs propres de A sont réelles (et A est diagonalisable avec le "nouveau" programme).

b) Soit $\lambda \in Sp(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

$(A - \lambda I_n)X = 0$ donc $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ \forall \ell \in [\![2,n-1]\!],\ -x_{\ell-1} + (2-\lambda)x_\ell - x_{\ell+1} = 0 \\ -x_{n-1} + (2-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$

Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que : $|x_i| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$. Notons que $x_i \neq 0$ ($X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$).

1er cas.. $i \in [\![2,n-1]\!]$. $(2-\lambda)x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$; $|2-\lambda||x_i| = |x_{i-1}+x_{i+1}| \le |x_{i-1}| + |x_{i+1}| \le 2|x_i|$

En divisant par $|x_i|$ qui est un réel non nul on obtient $|2-\lambda| \le 2$, $|\lambda - 2| \le 2$.

2ème cas.. $i = 1$. $|(2-\lambda)x_1| = |x_2| \le |x_1|$; $|2-\lambda||x_1| \le |x_1|$; $|2-\lambda| \le 1$ car $|x_1| \neq 0$.

Là encore : $|\lambda-2| \le 1$; donc $|\lambda - 2| \le 2$.

3ème cas.. $i = n$ $|(2-\lambda)x_n| = |x_{n-1}| \le |x_n|$; $|2-\lambda||x_n| \le |x_n|$; $|2-\lambda| \le 1$ car $|x_n| \neq 0$.

Ici encore on a : $|\lambda-2| \le 1$ et donc $|\lambda-2| \le 2$

Ainsi $\forall \lambda \in Sp(A)$, $|\lambda - 2| \le 2$.

Posons : $\forall \theta \in [0,\pi]$, $h(\theta) = 2\cos\theta$. h est clairement une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-2,2]$.

Ainsi $\forall y \in [-2,2]$, $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $y = 2\cos\theta$.

Soit $\lambda \in Sp(A)$. $|\lambda-2| \le 2$; $\lambda - 2 \in [-2,2]$; $2-\lambda \in [-2,2]$.

Ainsi $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $2-\lambda = 2\cos\theta$; $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $\lambda = 2(1-\cos\theta)$.

$\forall \lambda \in Sp(A)$, $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $\lambda = 2(1-\cos\theta)$.

c) Soit $\lambda \in Sp(A)$. $\exists \theta \in [0,\pi]$, $\lambda = 2(1-\cos\theta)$

Alors $A - \lambda I_n = A - 2(1-\cos\theta) I_n = A(\theta)$ n'est pas inversible donc

$\exists p \in [\![1,n]\!]$, $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Réciproquement soit $p \in [\![1,n]\!]$. Posons $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ et $\lambda = 2(1-\cos\theta)$.

$A - \lambda I_n = A(\theta)$ et $A(\theta)$ n'est pas inversible car $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ avec $p \in [\![1,n]\!]$ donc

λ est valeur propre de A.

Finalement $\underline{Sp(A) = \left\{ 2(1-\cos\theta) ;\ \theta \in \left\{ \dfrac{p\pi}{n+1} ;\ p \in [\![1,n]\!] \right\} \right\}}$.

Posons $\underline{\forall p \in [\![1,n]\!],\ \theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1} \text{ et } \lambda_p = 2(1-\cos\theta_p)}$.

Alors $Sp(A) = \{ \lambda_p ,\ p \in [\![1,n]\!] \}$

$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$ et $\cos$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Ainsi $1 > \cos\theta_1 > \cos\theta_2 > \cdots > \cos\theta_p > -1$; $0 < 1-\cos\theta_1 < 1-\cos\theta_2 < \cdots < 1-\cos\theta_n < 2$

Donc $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < 2$.

En posant $\forall p \in [\![1,n]\!], \theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$ et $\lambda_p = 2(1-\cos\theta_p)$ on a : $\begin{cases} Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \\ \text{et} \\ \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \end{cases}$

En particulier A admet n valeurs propres distinctes.

Q4 Vecteurs propres de la matrice A.

a) $p \in [\![1,n]\!]$. $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$. $\lambda_p = 2(1-\cos\theta_p)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(A,\lambda_p) \Leftrightarrow AX = \lambda_p X \Leftrightarrow (A - 2(1-\cos\theta_p) I_n) X = 0$

$$X \in SEP(A,\lambda_p) \Leftrightarrow A(\theta_p) X = 0 \underset{\text{Q2 b)}}{\Leftrightarrow} X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin(\theta_p) \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix} \right)$$

Posons $X_p = \begin{pmatrix} \sin(\theta_p) \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix}$. X_p est bien l'unique vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_p dont la première composante est $\sin \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Notons que $SEP(A,\lambda_p) = \mathrm{Vect}(X_p)$ avec $X_p = \begin{pmatrix} \sin(\theta_p) \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix}$.

b) $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $1 \leq p < q \leq n$.

${}^tX_p A X_q \in M_1(\mathbb{R})$ donc ${}^tX_p A X_q$ est symétrique non ?

3 Alors ${}^tX_pAX_q = {}^t({}^tX_pAX_q) = {}^tX_q\,{}^tA\,{}^t({}^tX_p) \underset{\text{A est symétrique}}{=} {}^tX_q A X_p$. ${}^tX_pAX_q = {}^tX_qAX_p$

$AX_q=\lambda_qX_q$ et $AX_p=\lambda_pX_p$.

Donc ${}^tX_pAX_q={}^tX_qAX_p$ donne : ${}^tX_p(\lambda_qX_q)={}^tX_q\lambda_pX_p$, $\lambda_q\, {}^tX_pX_q = \lambda_p\, {}^tX_qX_p$.

Si encore ${}^tX_pX_q\in M_1(\mathbb{R})$ donc ${}^tX_pX_q$ est symétrique ; ${}^tX_pX_q = {}^t({}^tX_pX_q)={}^tX_qX_p$.

3 Donc $\lambda_q\, {}^tX_pX_q = \lambda_p\, {}^tX_pX_q$; $(\lambda_q-\lambda_p)\,{}^tX_pX_q=0$; ${}^tX_pX_q=0$ car $\lambda_p\neq\lambda_q$.

2 c) Soit $\theta\in]0,\pi[$. $1+e^{2i\theta}+\dots+e^{2in\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{2i\theta})^k \underset{e^{2i\theta}\neq 1}{=} \frac{1-(e^{2i\theta})^{n+1}}{1-e^{2i\theta}}$. $\sum_{k=0}^n e^{2ik\theta} = \frac{1-e^{2i\theta(n+1)}}{1-e^{2i\theta}}$.

Soit $p\in⟦1,n⟧$. $\theta_p=\frac{p\pi}{n+1}$.

La somme des carrés des composantes de X_p est ${}^tX_pX_p$ et aussi $\sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p)$.

Alors ${}^tX_pX_p = \sum_{k=1}^n \frac{1-\cos(2k\theta_p)}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{1-\cos(2k\theta_p)}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\cos(2k\theta_p)$.

${}^tX_pX_p = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ik\theta_p}\right) \underset{\theta_p\in]0,\pi[\,!}{=} \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1-(e^{2i\theta_p})^{n+1}}{1-e^{2i\theta_p}}\right]$

Or $(e^{2i\theta_p})^{n+1} = e^{2i\frac{p\pi}{n+1}\times(n+1)} = 1$; $\frac{1-(e^{2i\theta_p})^{n+1}}{1-e^{2i\theta_p}}=0$

1,5 Ainsi la somme des carrés des composantes de X_p est : ${}^tX_pX_p=\frac{n+1}{2}$.

d) $P=(p_{kl})$ avec $p_{kl}=\sin(k\theta_l)$ pour tout $(k,l)\in⟦1,n⟧^2$.

$\forall (k,l)\in⟦1,n⟧^2$, $p_{kl}=\sin(k\theta_l)=\sin\left(k\times\frac{l\pi}{n+1}\right)=\sin\left(l\,\frac{k\pi}{n+1}\right)=\sin(l\theta_k)=p_{lk}$.

1 Ainsi P est symétrique.

$P^2 = {}^tP\,P = (\alpha_{k\ell})$. $\alpha_{k\ell}$ s'obtient en faisant le produit de la $k^{ième}$ ligne de ${}^tP$ avec la $\ell^{ième}$ colonne de P. donc $\alpha_{k\ell} = {}^tX_k X_\ell$.

Ainsi $P^2 = {}^tP\,P = ({}^tX_k X_\ell)$. Or ${}^tX_k X_\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } k = \ell \end{cases}$

5 Ainsi $\underline{P^2 = \frac{n+1}{2} I_n}$. $\left(\frac{2}{n+1} P\right) P = I_n$.

2 $\underline{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{2}{n+1} P}$.

Rappelons que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, X_p est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_p. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant deux à deux distincts, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est alors une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n.

Alors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Comme P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base

2 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ on a : $\quad P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Q5 a) 0 n'est pas valeur propre de A ($0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 2 \dots$) donc A est

1 inversible. $\underline{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AZ = B \text{ admet une solution et une seule} : X}$.

b) Posons $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. $AW = V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donne : $\begin{cases} 2w_1 - w_2 = 1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ -w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} = 1. \\ -w_{n-1} + 2w_n = 1 \end{cases}$

Comme W est l'unique élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $AW = V$, posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $w'_k = k(n+1-k)/2$ et vérifions que $A \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix} = V$ nous aurons alors prouvé le résultat.

$2w'_1 - w'_2 = 2 \times \frac{n}{2} - 2(n+1-2)/2 = 1$.

$\forall k \in [\![2, n]\!]$, $-w'_{k-1} + 2w'_k - w'_{k+1} = -\frac{(k-1)(n+1-k+1)}{2} + 2\,\frac{k(n+1-k)}{2} - \frac{(k+1)(n+1-k-1)}{2} =$

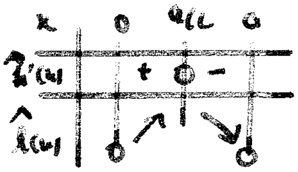
$\frac{n+1}{2}\left[-(k-1) + 2k - (k+1)\right] + \frac{1}{2}\left[-(k-1)(-k+1) + 2k(-k) + (k+1)^2\right] = 0 + \frac{1}{2}\left[+k^2 - 2k + 1 - 2k^2 + k^2 + 2k + 1\right] = 1$.

Enfin : $-w_{n-1}+2w_n = -\frac{(n-1)(n+1-(n-1))}{2} + 2\,\frac{n\,(n+1-n)}{2} = \frac{1}{2}\left(-2(n-1)+2n\right) = 1$. Posons $W' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix}$.

$AW' = V$ et alors : $W' = W$.

3 Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!],\ w_k = \dfrac{k(n+1-k)}{2}$. Voir mieux à la fin de 1... si j'ai de la place.

Posons $\forall x \in [0,a],\ \hat{f}(x) = x(a-x)$. $\hat{f}$ est dérivable sur $[0,a]$ et $\forall x \in [0,a],\ \hat{f}'(x) = a-2x$.

1 

$\max\limits_{x\in[0,a]} \hat{f}(x) = \max\limits_{x\in[0,a]} |\hat{f}(x)| = \hat{f}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$. $\max\limits_{x\in[0,a]} x(a-x) = \max\limits_{x\in[0,a]} |x(a-x)| = \frac{a^2}{4}$

$a = n+1$

$N(W) = \max(|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|)$

3 $\forall k \in [\![1,n]\!],\ |w_k| = \left|\dfrac{k(n+1-k)}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(n+1)^2}{4}\right] = \dfrac{(n+1)^2}{8}$; $N(W) \leq \dfrac{(n+1)^2}{8}$.

c) Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Alors comme $AX = B$ en considérant la $i^{\text{ème}}$ ligne de ces matrices on obtient :

$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = b_i$; $b_i \geq 0$ donc $2x_i \geq x_{i-1} + x_{i+1} > 2x_i$; $x_i > x_i$!!

4 Donc nécessairement si $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors $i = 1$ ou n.

$\begin{cases} x_{i-1} \geq x_i \\ \text{et} \\ x_{i+1} > x_i \end{cases}$ ↑ i est le plus grand...

Supposons que $i = 1$. $2x_1 - x_2 = b_1$; $x_1 = \underbrace{b_1}_{\geq 0} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0 \text{ et même } > 0\,!} \geq 0$

Alors $\min(x_1, \dots, x_n) = x_1 \geq 0$

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k \geq 0$

Supposons que $i = n$. $-x_{n-1} + 2x_n = b_n$; $x_n = \underbrace{b_n}_{\geq 0} + \underbrace{(x_{n-1} - x_n)}_{\geq 0} \geq 0$.

Alors $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$; $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k \geq 0$.

3 Dans les deux cas : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k \geq 0$.

d) Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. $\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k = N(B) - b_k$ et $z_k = N(B) + b_k$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ |b_k| \leq N(B)$; $\forall k \in [\![1,n]\!],\ -N(B) \leq b_k \leq N(B)$

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ 0 \leq N(B) - b_k$ et $0 \leq N(B) + b_k$; $\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k \geq 0$ et $z_k \geq 0$.

2 Les composantes de $Y = N(B)V - B$ et $Z = N(B)V + B$ sont positives.

D'après c) l'unique solution T_1 (resp. T_2) de l'équation $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AV = Y$ (resp. $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AV = Z$) a des composantes positives.

$AT_1 = Y = N(B)V - B = N(B)AW - AX = A(N(B)W - X)$; $N(B)W - X = T_1$.

$AT_2 = Z = N(B)V + B = N(B)AW + AX = A(N(B)W + X)$; $N(B)W + X = T_2$.

Les composantes de $N(B)W - X$ et $N(B)W + X$ sont positives.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $N(B)w_k - x_k \geq 0$ et $N(B)w_k + x_k \geq 0$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $-N(B)w_k \leq x_k \leq N(B)w_k$.

$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\underline{\underline{|x_k| \leq N(B)w_k}} = N(B)|w_k| \leq N(B)N(W) \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8}$.

$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ Ainsi $\max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8}$. $\underline{\underline{N(X) \leq N(B)\frac{(n+1)^2}{8}}}$.

Pour finir la page retrouvons $w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$ sans utiliser la réponse !

$2w_1 - w_2 = 1$; $\forall k \in [\![2,n-1]\!]$, $-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} = 1$ et $-w_{n-1} + 2w_n = 1$.

pour $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $y_k = w_k - w_{k-1}$

$\forall k \in [\![2,n-1]\!]$, $y_{k+1} - y_k = w_{k+1} - w_k - w_k + w_{k-1} = -1$. $(y_k)_{k \in [\![2,n]\!]}$ est arithmétique de raison -1.

$\forall k \in [\![2,n]\!]$, $y_k = -(k-2) + y_2$; $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $w_k - w_{k-1} = -(k-2) + w_2 - w_1$.

$$\sum_{k=2}^{n}(w_k - w_{k-1}) = -\sum_{k=2}^{n}(k-2) + (n-1)[\underbrace{2w_1 - 1}_{w_2} - w_1] = -\sum_{k=0}^{n-2} k - (n-1) + (n-1)w_1 .$$

$$w_n - w_1 = -\sum_{k=0}^{n-1} k + (n)w_1 - w_1 \; ; \; w_n = -\frac{n(n-1)}{2} + nw_1$$

Or $1 = w_n + w_n - w_{n-1} = w_n + y_n = w_n - (n-2) + y_2 = w_n - (n-2) + w_2 - w_1$

$w_n = 1 + (n-2) - (w_2 - w_1) = 1 + (n-2) + 1 - w_1 = n - w_1$.

Alors $-\frac{n(n-1)}{2} + nw_1 = n - w_1$; $(n+1)w_1 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$; $w_1 = \frac{n}{2}$.

Soit $k \in [\![2,n]\!]$. $w_k = w_k - w_1 + w_1 = \sum_{i=2}^{k}(w_i - w_{i-1}) + w_1 = \sum_{i=2}^{k} y_i + \frac{n}{2}$.

$$w_k = \sum_{i=2}^{k}(-(i-2) + y_2) + \frac{n}{2} = -\sum_{i=0}^{k-2} i + (k-1)y_2 + \frac{n}{2} = -\sum_{i=0}^{k-2} i + (k-1)(w_1 - 1) + \frac{n}{2} .$$

$$w_k = -\sum_{i=0}^{k-1} i + k \times \frac{n}{2} = -\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k \times n}{2} = \frac{k}{2}(n - (k-1)) = \frac{k(n+1-k)}{2} .$$

$w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$. Ceci vaut encore pour $k = 1$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $w_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$

Q1 a) Posons $\forall x\in[0,1]: u(x)=\int_1^x (t-1)g(t)\,dt$ et $v(x)=\int_0^x t g(t)\,dt$.

u (resp. v) est la primitive sur $[0,1]$ de la fonction $x\mapsto (x-1)g(x)$ (resp. $x\mapsto xg(x)$), qui est continue sur $[0,1]$, qui prend la valeur 0 en 1 (resp. 0). Ainsi u et v sont dérivables sur $[0,1]$; $x\mapsto -xu(x)$ et $x\mapsto (x-1)v(x)$ également. Or :

$\forall x\in[0,1]$, $L(x)=-x\,u(x)+(x-1)v(x)$.

Ainsi L est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1]$, $L'(x)=-u(x)-xu'(x)+v(x)+(x-1)v'(x)$.

$\forall x\in[0,1]$, $L'(x)=-u(x)-x(x-1)g(x)+v(x)+(x-1)xg(x)=-u(x)+v(x)$. $L'=v-u$.

L' est dérivable sur $[0,1]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1]$, $L''(x)=v'(x)-u'(x)=xg(x)-(x-1)g(x)=g(x)$.

4 $\forall x\in[0,1]$, $L''(x)=g(x)$. Notons que L est de classe C^2 sur $[0,1]$.

b) Analyse/Unicité. Supposons que f soit solution.

$f''=g=L''$. $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $f'=L'+\alpha$; $\exists\beta\in\mathbb{R}$, $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=L(x)+\alpha x+\beta$.

$a=f(0)=L(0)+\alpha\times 0+\beta=0+0+\beta$; $b=f(1)=0+\alpha+\beta$. $\beta=a$ et $\alpha=b-a$.

$\forall x\in[0,1]$, $f(x)=L(x)+(b-a)x+a$. D'où l'unicité.

Synthèse/Existence. Posons $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=L(x)+(b-a)x+a$.

$f(0)=L(0)+(b-a)\times 0+a=a$ et $f(1)=L(1)+b-a+a=b$.

$x\mapsto L(x)$ et $x\mapsto (b-a)x+a$ sont de classe C^2 sur $[0,1]$ donc f est de classe C^2 sur $[0,1]$.

$\forall x\in[0,1]$, $f''(x)=L''(x)+0=L''(x)=g$.

f est solution. D'où l'existence.

5 Il existe une fonction f de classe C^2 sur $[0,1]$ et une seule telle que :
$f(0)=a$, $f(1)=b$ et $\forall x\in[0,1]$, $f''(x)=g(x)$. $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=L(x)+(b-a)x+a$.

Q2 a) f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et $f''=g$. g étant de classe C^2 sur $[0,1]$,

1 f'' aussi. Ainsi f est de classe C^4 sur $[0,1]$.

b) f est de classe C^4 sur $[0,1]$ donc :

$\forall (a,b)\in[0,1]^2$, $\left|f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)\right|\leq\frac{|b-a|^4}{4!}\max_{t\in[a,b]}|f^{(4)}(t)|$

Notons que : $\forall [a,b]\in[0,1]^2$, $\max_{t\in[a,b]}|f^{(4)}(t)|\leq\max_{t\in[0,1]}|f^{(4)}(t)|=\max_{t\in[0,1]}|g''(t)|=M_2$

Soit $x\in[0,1]$ et soit $h\in\mathbb{R}_+$ tel que : $0\leq x-h<x+h\leq 1$.

En faisant $b=x+h$ et $a=x$ puis $b=x-h$ et $a=x$ on obtient :

$\underbrace{\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)\right|}_{A(x)}\leq\frac{h^4}{4!}M_2$ et

$\underbrace{\left|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)\right|}_{B(x)}\leq\frac{h^4}{4!}M_2$.

$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)-h^2f''(x)|=|A(x)+B(x)|\leq|A(x)|+|B(x)|\leq\frac{2h^4}{4!}M_2=\frac{M_2h^4}{12}$.

$x-h<x+h$ donc $2h>0$ donc $h^2>0$.

Ainsi $\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-f''(x)\right|\leq\frac{M_2h^2}{12}$ lorsque $x\in[0,1]$, $h\in\mathbb{R}^+$ et $0\leq x-h<x+h\leq 1$.

Q3 Discrétisation de l'équation $f''=g$ avec $f(0)=a$ et $f(1)=b$.

a) $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=g(x_k)$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}=-h^2g(x_k)$.

Donc
- $-y_2+2y_1=y_0-h^2g(x_1)=a-h^2g(h)$.
- $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}=-h^2g(x_k)=-h^2g(kh)$.
- $-y_{n-1}+2y_n=y_{n+1}-h^2g(x_n)=b-h^2g(nh)$.

Posons $B=\begin{pmatrix}a-h^2g(h)\\-h^2g(2h)\\-h^2g(3h)\\\vdots\\-h^2g((n-1)h)\\b-h^2g(nh)\end{pmatrix}$. Alors $AY=B$. Notons aussi que : $B=\begin{pmatrix}a-h^2g(x_1)\\-h^2g(x_2)\\|\\-h^2g(x_{n-1})\\b-h^2g(x_n)\end{pmatrix}$

b) Posons $G=\begin{pmatrix}g_1\\|\\g_n\end{pmatrix}=A(F-Y)=AF-AY=AF-B$

$a=f(0)=f(x_0)$ $\quad g(h)=g(x_1)=f''(x_1)$.

$g_1=2f(x_1)-f(x_2)-a+h^2g(h)=-h^2\left[\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2}-f''(x_1)\right]$

$|g_1| = h^2 \left| \frac{\ldots}{h^2} - g(x_1)\right| = h^2\left|\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2} - f''(x_1)\right| \le \frac{M_2 h^4}{12}$.

$\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $g_k = -f(x_{k+1}) + 2f(x_k) - f(x_{k-1}) + h^2 g(x_k)$.

$\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $|g_k| = h^2 \left| \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})}{h^2} - g(x_k) \right| \le h^2 \times \frac{M_2 h^2}{12} = \frac{M_2 h^4}{12}$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \\ x_{k-1} = x_k - h \end{cases}$$

$g_n = -f(x_{n-1}) + 2f(x_n) - b + h^2 g(nh) = -f(x_{n-1}) + 2f(x_n) - f(x_{n+1}) + h^2 f''(x_n)$

$|g_n| = h^2 \left| \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}{h^2} - f''(x_n) \right| \le h^2 \frac{M_2 h^2}{12} = \frac{M_2 h^4}{12}$.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ x_{n-1} = x_n - h \end{cases}$$

Finalement : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|g_k| \le \frac{M_2 h^4}{12}$; $\max_{1 \le k \le n} |g_k| \le \frac{M_2 h^4}{12}$

1 Ainsi $N(A(F-Y)) \le \frac{M_2 h^4}{12}$.

c) Dans I Q5 nous avons vu que « $AX = B \Rightarrow N(X) \le N(B) \times \frac{(n+1)^2}{8}$ »

Ainsi $N(F-Y) \le N(A(F-Y)) \times \frac{(n+1)^2}{8} \le \frac{M_2 h^4}{12} \times \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{M_2 (1/(n+1))^4}{12} \times \frac{(n+1)^2}{8}$

2 Donc $N(F-Y) \le \frac{M_2}{96(n+1)^2}$ ... Rustique mais efficace

2 Q4 **Application..** a) Si $g'' = 0$: $M_2 = 0$. $0 \le N(F-Y) \le 0$. $N(F-Y) = 0$

$\max_{1 \le k \le n} |f(x_k) - y_k| = 0$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = f(x_k)$.

b) On suppose que : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = 1$. $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \overset{a=b=0}{=} L(x) = x \int_x^1 (t-1)\,dt + (x-1) \int_0^x t\,dt$

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_x^1 + (x-1) \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = -\frac{x(x-1)^2}{2} + (x-1)\frac{x^2}{2} = \frac{x(x-1)}{2} \left[+x - (x-1) \right] = \frac{1}{2} x(x-1)$.

1 $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$.

$AF = AY = \begin{pmatrix} -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 \end{pmatrix}$; $A\left(-\frac{1}{h^2} F\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $-\frac{1}{h^2} F$ est le W de I 5 b). Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\omega_k = -\frac{1}{h^2} f(x_k) = -(n+1)^2 \frac{1}{2} x_k (x_k - 1)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\omega_k = -(n+1)^2 \frac{1}{2}\, k \frac{1}{n+1}\left(k \times \frac{1}{n+1} - 1\right) = -(n+1)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(n+1)^2} k(k-(n+1))$

4 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\omega_k = -\frac{1}{2} k(k-(n+1)) = \frac{k(n+1-k)}{2}$; on retrouve alors le résultat de I 5 b).

c) $1, 2, \dots, n$ sont les valeurs de $x \mapsto x$ en $1, 2, \dots, n$ … on peut sans doute poser :

$a = 0$, $b = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = x$. g est de classe C^2 sur $[0,1]$.

Il existe une application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et une seule, de classe C^4 sur $[0,1]$ et telle que : $f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Pour $\hat{B} = \begin{pmatrix} a - h^2 g(x_1) \\ -h^2 g(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 g(x_{n-1}) \\ b - h^2 g(x_n) \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Considérons l'élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AY = \hat{B}$.

$g'' = 0$ donc $F = Y$. Ainsi $AF = \hat{B} = \begin{pmatrix} -h^2 x_1 \\ \vdots \\ -h^2 x_n \end{pmatrix} = -h^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$; $A\left(-\frac{1}{h^3} F\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi $-\frac{1}{h^3} F$ est l'unique solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{h^3} F$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = -\frac{1}{h^3} f(x_k) = -\frac{1}{h^3} f(kh) = -(n+1)^3 f\left(\frac{k}{n+1}\right)$.

Reste à calculer f. Soit $x \in [0,1]$.

$f(x) = x\int_x^1 (t-1)t\,dt + (x-1)\int_0^x t^2\,dt = x\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_x^1 + (x-1)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = x\left(-\frac{1}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + (x-1)\frac{x^3}{3}$

$f(x) = \frac{x}{6}\left[-1 - 2x^3 + 3x^2 + 2(x-1)x^2\right] = \frac{x}{6}\left[-1 - 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 - 2x^2\right] = \frac{x}{6}(x^2 - 1)$.

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{x(x^2-1)}{6}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = -(n+1)^3 f\left(\frac{k}{n+1}\right) = -(n+1)^3 \frac{1}{6} \frac{k}{n+1}\left[\frac{k^2}{(n+1)^2} - 1\right] = -\frac{1}{6} k\left(k^2 - (n+1)^2\right)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = -\frac{1}{6} k(k+n+1)(k-(n+1))$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = \frac{1}{6} k(n+1+k)(n+1-k)$.