PARTIE I

Q1 Etude de la fonction F sur [0,1].

a) Soit t un élément de $[0,1]$. $\forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_j t^j \leq p_j$

La convergence de la série de terme général p_j et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $p_j t^j$ converge.

<u>La série définissant $F(t)$ est convergente pour tout t appartenant à $[0,1]$.</u>

b) • Montrons la croissance de F en utilisant la définition.

Soit $(t,t') \in [0,1]^2$ tel que : $t \leq t'$.

$\forall j \in \mathbb{N},\ p_j t^j \leq p_j t'^j$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t'^j$. En faisant tendre n vers l'infini il vient : $F(t) \leq F(t')$.

$\forall t \in [0,1]^2,\ t \leq t' \Rightarrow F(t) \leq F(t')$. <u>$F$ est croissante sur $[0,1]$.</u>

• Soit $t_0 \in]0,1]$

F est croissante sur $[0,t_0]$ et majorée par $F(t_0)$; le théorème de la limite monotone montre alors que F admet une limite finie à gauche en t_0.

Soit $t_0 \in [0,1[$

F est croissante sur $]t_0,1]$ et minorée par $F(t_0)$; ce même théorème montre alors que F admet une limite finie à droite en t_0.

<u>Donc F admet une limite finie à droite en tout point de $[0,1[$ et à gauche en tout point de $]0,1]$.</u>

c) $t_0 \in [0,1[$. Soit $t \in]t_0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$F(t)-F(t_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j - \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t_0^j = \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j).$$

$\forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq t^j - t_0^j \leq 1$ (ok ?)

$\forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_j (t^j - t_0^j) \leq p_j$. $\forall q \in [\![n+1,+\infty[\![,\ 0 \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j$

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient : $0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$ (les deux sommes existant)

Finalement $0 \leq F(t)-F(t_0) = \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j (t^j - t_0^j) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]t_0, 1], 0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

$\lim_{\substack{t \mapsto t_0 \\ t > t_0}} \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) = 0$ et F admet une limite finie à droite en t_0. Nous pouvons donc faire tendre t vers t_0 par valeurs supérieures dans le résultat précédent et nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq \lim_{\substack{t \mapsto t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

Or $\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = 0$. $\lim_{\substack{t \mapsto t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0)$ est une constante encadrée par deux suites qui convergent vers 0 ; cette constante est donc nulle. Par conséquent $\lim_{\substack{t \mapsto t_0 \\ t > t_0}} F(t) = F(t_0)$

F est donc continue à droite en t_0 pour tout t_0 appartenant à $[0,1[$

d) F est continue à droite en 0, à gauche en 1, et à droite et à gauche pour tout élément t_0 de $]0,1[$. F est donc continue sur $[0,1]$.

Q2 Etude locale de la fonction F en 0.

a) Soit $t \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall q \in [\![n+1, +\infty [\![, \quad 0 \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j t^j \leq \sum_{j=n+1}^{q} p_j t^{n+1} = t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{q} p_j.$

$j \geq n+1$ et $t \in [0,1]$ donnent $t^j \leq t^{n+1}$

En faisant tendre q vers l'infini il vient : $0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$ (les deux sommes existent).

$\forall t \in [0,1], \; 0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$

b) Fixons n dans $\mathbb{N}$.

$\forall t \in]0,1], \quad \varepsilon_n(t) = \frac{1}{t^n} \left(F(t) - \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \right) = \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j$

donc $\forall t \in]0,1], \; 0 \leq \varepsilon_n(t) \leq \frac{1}{t^n} \times t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j = t \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$

Par encadrement il vient : $\lim_{t \mapsto 0^+} \varepsilon_n(t) = 0.$

Q3 Etude locale de la fonction F en 1.

a) Soit $t \in [0,1[$. $F(t)-F(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(t^j-1) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(t^j-1) = \sum_{j=1}$

Donc $\forall t \in [0,1[$, $\dfrac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$

b) On suppose que la série de terme général jp_j converge.

Posons $\forall t \in [0,1[$, $\varphi(t) = \dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$. Montrons que φ est croissante sur $[0,1[$.

Soit $(t,t') \in [0,1[^2$ tel que $t \leq t'$

$\varphi(t')-\varphi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j \left[1+t'+\dots+t'^{j-1} - 1 - t - \dots - t^{j-1}\right]$

$\varphi(t')-\varphi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j \left[(t'-t)+(t'^2-t^2)+\dots+(t'^{j-1}-t^{j-1})\right]$

$\forall j \in \mathbb{N}^*$, $(t'-t)+(t'^2-t^2)+\dots+(t'^{j-1}-t^{j-1}) \geq 0$ et $p_j \geq 0$

Donc $\varphi(t')-\varphi(t) \geq 0$; $\varphi(t') \geq \varphi(t)$.

Par conséquent : $\varphi : t \mapsto \dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$ est croissante sur $[0,1[$. Montrons qu'elle est majorée.

$\forall t \in [0,1[$, $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$

$\forall t \in [0,1[$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \leq p_j(1+1+\dots+1) = jp_j$

Donc $\forall t \in [0,1[$, $\varphi(t) = \sum_{j=1} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \leq \sum_{j=1} jp_j$ car les deux séries sont convergentes.

φ est donc majorée par $\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$ sur $[0,1[$.

Etant croissante sur $[0,1[$ elle admet en 1 une limite finie elle même majorée par $\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$. Ce qui signifie que F est dérivable en 1 et que $F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$

F est dérivable en 1 et $F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$ lorsque la série de terme général jp_j converge

c) On suppose ici F dérivable en 1.

Soit $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$$

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \quad \text{car} \quad \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) \geqslant 0.$$

$$\forall t \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F étant dérivable en 1 : $\lim_{t\to 1} \frac{F(t)-F(1)}{t-1} = F'(1)$. De plus $\lim_{t\to 1} \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\dots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} j p_j$

Par conséquent l'inégalité précédente donne : $F'(1) \geqslant \sum_{j=1}^{n} j p_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $\left(\sum_{j=1}^{n} j p_j\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante $\left(\sum_{j=1}^{n+1} j p_j - \sum_{j=1}^{n} j p_j = (n+1)p_{n+1} \geqslant 0\right)$ et majorée par $F'(1)$.

Elle est donc convergente et sa limite est majorée par $F'(1)$. Ceci signifie que :

la série de terme général $j p_j$ converge et $\sum_{j=1}^{+\infty} j p_j \leqslant F'(1)$ ... lorsque F est dérivable en 1

d) b) et c) montrent clairement que F est dérivable en 1 si et seulement si la série de terme général $j p_j$ converge.

Supposons F dérivable en 1. La série de terme général $j p_j$ est alors convergente.

b) donne : $F'(1) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j$ et c) donne $\sum_{j=1}^{+\infty} j p_j \leqslant F'(1)$.

Par conséquent : $\sum_{j=1}^{+\infty} j p_j = F'(1)$.

e) Application ... $E(X)$ existe

$\Updownarrow$

la série de terme général $j p_j$ est absolument convergente

$j p_j \geqslant 0 \quad \to \quad \Updownarrow$

la série de terme général $j p_j$ est convergente

$\Updownarrow$

F est dérivable en 1

Donc X admet une espérance si et seulement si F est dérivable en 1. Et alors $E(X) = F'(1)$.

Q4.- Produit de deux fonctions génératrices.-

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j=0}^{n} r_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} p_k q_{j-k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{j=k}^{n} q_{j-k}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell\Big)$$

commutation des 2 Σ

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \leq \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell$ (car q_ℓ est positif pour tout $\ell \in \mathbb{N}$).

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell \leq p_k \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell$ (car p_k est positif pour tout $k \in \mathbb{N}$)

donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r_j = \sum_{k=0}^{n}\Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n-k} q_\ell\Big) \leq \sum_{k=0}^{n}\Big(p_k \sum_{\ell=0}^{n} q_\ell\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} q_\ell\Big)$

Finalement : $\displaystyle\underline{\underline{\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot \sum_{j=0}^{n} q_j}}$

$\forall j \in \mathbb{N}$, $p_j \geq 0$ et $q_j \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} p_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} q_j$ (les deux séries sont convergentes)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\underline{\underline{\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} q_j}}$.

Par conséquent $\underline{\underline{\text{la série de terme général } r_j \text{ converge}}}$ car elle est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} p_j \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} q_j$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$. Posons : $\forall j \in \mathbb{N}$, $r'_j = t^j r_j$, $p'_j = t^j p_j$ et $q'_j = t^j q_j$

1°.- $\forall j \in \mathbb{N}$, $p'_j \geq 0$ et $q'_j \geq 0$

2°.- les séries de termes généraux $p'_j = t^j p_j$ et $q'_j = t^j q_j$ convergent.

3°.- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p'_k q'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k q_{n-k} t^{n-k} = \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\Big) t^n = r_n t^n = r'_n$.

a) nous autorise alors à dire que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} r'_j \leq \sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j$; c'est à dire :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j .$$

Montrons $\sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j$; c'est à dire que

$$\sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j \leq \sum_{j=0}^{2n} r'_j$$

$$\sum_{j=0}^{2n} r'_j = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{j} p'_k q'_{j-k} = \sum_{k=0}^{2n}\Big(p'_k \sum_{j=k}^{2n} q'_{j-k}\Big) = \sum_{k=0}^{2n}\Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{2n-k} q'_\ell\Big)$$

Par positivité des éléments des suites (p'_j) et (q'_j) il vient :

$$\sum_{j=0}^{2n} r'_j \geq \sum_{k=0}^{\boxed{n}} \Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{2n-k} q'_\ell\Big) \geq \sum_{k=0}^{n}\Big(p'_k \sum_{\ell=0}^{n} q'_\ell\Big) = \sum_{k=0}^{n} p'_k \sum_{\ell=0}^{n} q'_\ell$$

$k \leq n \Rightarrow 2n-k \geq n$

Donc $\sum_{j=0}^{n} p'_j \sum_{j=0}^{n} q'_j \leq \sum_{j=0}^{2n} r'_j$. Finalement :

$$\underline{\underline{\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in [0,1].$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j \quad \text{(toutes les séries convergent).}$$

Donc $H(t) \leq F(t)G(t) \leq H(t)$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall t \in [0,1], \quad F(t)G(t) = H(t)}}$.

PARTIE II 1. Etude du cas particulier $K=1$

Q1. Etude de la probabilité de ruine du joueur.

a) p_1 Notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ jet donne pile (resp. face).

$p_1 = p(F_1) = 1-p.$

$p_2 = 0$ ou le premier tirage donne pile et le joueur est ruiné à l'issue du 1er jet
ou le premier tirage donne face et le joueur a 2F après le 1er jet et il ne peut pas être ruiné à l'issue du 2ème jet.

$p_3 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = p(F_1)\,p(P_2/F_1)\,p(P_3 \mid F_1 \cap P_2) = p(1-p)^2$

$\underline{\underline{p_1 = 1-p\ ,\ \ p_2 = 0\ ,\ \ p_3 = p(1-p)^2.}}$

b) Notons C_1, C_2 et C_3 les trois conditions proposées par l'énoncé.
Notons que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ème}}$ jet si et seulement s'il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que C_1, C_2 et C_3 soient vérifiées.

→ Supposons qu'il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que C_1, C_2 et C_3 soient vérifiées.
C_3 indique clairement que le joueur est ruiné à l'issue du $(n+1)^{\text{ème}}$ jet.

→ Réciproquement supposons que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ème}}$ jet.
$n \geqslant 2$; $n+1 \geqslant 3$. Nécessairement le premier jet donne un face ; le joueur a 2F à l'issue du premier jet. C_1 est vérifiée.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{k \in [\![1, n]\!] \mid$ le joueur possède 1F à l'issue du $k^{\text{ème}}$ jet$\}$.
$\mathcal{S}$ est non vide car $n \in \mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ possède un plus petit élément k_0.
k_0 n'est pas 1 car C_1 est vérifiée ; par conséquent $k_0 \in [\![2, n]\!]$.
Posons $j = k_0 - 1$ et montrons que C_2 et C_3 sont vérifiées.
Le capital du joueur revient à 1F pour la première fois à l'issue du $k_0^{\text{ème}}$ jet c'est à dire à l'issue des $k_0 - 1 = j$ jets suivant le premier jet ; C_2 est vérifiée.
Les $(n+1) - k = n-j$ jets suivant le $k^{\text{ème}}$ jet vont voir le capital du joueur ramené à 0 ceci pour la première fois ; C_3 est vérifiée.
Il existe donc $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_1\ C_2,\ C_3$ soient vérifiées.
Ceci achève de prouver l'équivalence demandée.

Les trois "événements précédents" me laissent perplexe ! Interprétons...

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Notons C_j l'événement : les j jets suivant le premier ont ramené le capital du joueur à 1^F et ceci pour la première fois. Notons encore R_1^{n+1} l'événement le joueur est ruiné à l'issue du $(n+1)^{ième}$ jet

→ "Premier événement" . $\underline{p(F_1) = p}$

→ "Second événement" . $p(C_j) = p(C_j \cap F_1) = p(C_j / F_1)\, p(F_1)$.

$p(C_j/F_1)$ n'est autre que la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 2^F à un capital de 1^F en exactement j jets ; c'est encore la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 1^F à un capital de 0^F en exactement j jets ; c'est donc $P_j(1)$.

Par conséquent $\underline{\underline{p(C_j) = p\, P_j(1)}}$.

→ "Troisième événement" . $p(C_j \cap R_1^{n+1}) = p(R_1^{n+1}/C_j)\, p(C_j) = p(R_1^{n+1}/C_j)\, p\, P_j(1)$.

$p(R_1^{n+1}/C_j)$ est la probabilité pour que le joueur passe d'un capital de 1^F à un capital de 0^F en exactement $n-j$ jet ; c'est donc $P_{n-j}(1)$.

Par conséquent : $\underline{\underline{p(C_j \cap R_1^{n+1}) = p\, P_j(1)\, P_{n-j}(1)}}$.

L'équivalence démontrée au début de cette question nous indique que R_1^{n+1} est la réunion disjointe des événements $C_1 \cap R_{n+1}^{n+1}, C_2 \cap R_1^{n+1}, \dots, C_{n-1} \cap R_1^{n+1}$.

Donc $P_{n+1}(1) = p(R_1^{n+1}) = \sum_{j=1}^{n-1} p(C_j \cap R_1^{n+1}) = \sum_{j=1}^{n-1} p\, P_j(1)\, P_{n-j}(1)$.

Donc pour $n \geq 2$: $P_{n+1}(1) = p \sum_{j=1}^{n-1} P_j(1)\, P_{n-j}(1)$.

Or $P_0(1) = P_{n-n}(1) = 0$ par convention. Par conséquent

Pour $n \geq 2$ $\quad p \sum_{j=0}^{n} P_j(1)\, P_{n-j}(1) = P_{n+1}(1)$.

Pour $n = 0$ $\quad p \sum_{j=0}^{n} P_j(1) P_{n-j}(1) = p\,(P_0(1))^2 = 0$ et pour $n = 1$, $p \sum_{j=0}^{n} P_j(1) P_{n-j}(1) = p\, P_0(1) P_1(1) + p\, P_1(1) P_0(1) = 0$.

Finalement :
$$\underline{\underline{p \sum_{j=0}^{n} P_j(1)\, P_{n-j}(1) = \begin{cases} P_{n+1}(1) \text{ si } n \geq 2 \quad (*) \\ 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}}}$$

$(*)$ et même pour $\underline{n \geq 1}$

c) Soit $t \in [0,1]$.

$$(F_1(t))^2 = F_1(t) \times F_1(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(1) t^j \times \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(1) t^j \underset{\text{I Q4}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} p_k(1) p_{j-k}(1) \right) t^j$$

Par conséquent :

$$(F_1(t))^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} p_k(1) p_{j-k}(1) \right) t^j \underset{\substack{j \to n \\ k \to j}}{\overset{!}{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} p_j(1) p_{n-j}(1) \right) t^n$$

$$p(F_1(t))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p \sum_{j=0}^{n} p_j(1) p_{n-j}(1) \right) t^n \underset{b)}{=} \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1) t^n$$

Donc $p t (F_1(t))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1) t^{n+1} = \sum_{n=3}^{+\infty} p_n(1) t^n = F_1(t) - p_0(1) - p_1(1) t - p_2(1) t^2$

or $p_0(1) = 0$, $p_1(1) = 1-p$ et $p_2(1) = 0$. Finalement :

$p t (F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p) t$. $\underline{\underline{\forall t \in [0,1],\ p t (F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p) t}}$

Remarque .. $F_1(t)$ est donc solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ qui pour $t \neq 0$ admet pour discriminant : $1 - 4p(1-p)t^2$... ce qui éclaire un peu la question suivante

d) Posons $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t) = 1 - 4p(1-p)t^2$. φ est dérivable sur $]0,1[$ et

$\forall t \in]0,1[$, $\varphi'(t) = -8tp(1-p) < 0$

φ est strictement décroissante sur $]0,1[$ ... et continue. φ définit une bijection de $]0,1[$ sur $]\lim_{t \to 1^-} \varphi(t), \lim_{t \to 0^+} \varphi(t)[=]1-4p(1-p), 1[=](2p-1)^2, 1[$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall t \in]0,1[,\ \varphi(t) = 1 - 4p(1-p)t^2 > (2p-1)^2.}}$

Remarque .. $1 - 4p(1-p)t^2 - (2p-1)^2 = -4p(1-p)t^2 + (4p(1-p)) = 4p(1-p)(1-t^2) > 0$ pour $t \in]0,1[$!!

Alors l'étude de fonction ...

Soit $t \in]0,1[$. Le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ est $1 - 4p(1-p)t^2$, il est strictement supérieur à $(2p-1)^2$ donc strictement positif.

L'équation a donc deux solutions $x'(t)$ et $x''(t)$ $(x'(t) < x''(t))$.

Soit $t \in]0,1[$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ptx^2 - x + (1-p)t = pt\,(x - x'(t))(x - x''(t))$.

Donc $\quad pt1^2 - 1 + (1-p)t = pt\,(1 - x'(t))(1 - x''(t))$.

$pt(1-x'(t))(1-x''(t)) = pt - 1 + t - pt = t - 1 < 0$

Par conséquent $\quad (1-x'(t))(1-x''(t)) < 0$ donc $\quad 1 \in]x'(t), x''(t)[$.

Donc $\quad \underline{\underline{x''(t) > 1}}$.

F_1 est croissante sur $[0,1]$ (... partie I). $\forall t \in]0,1[, \quad F(t) \leq F(1)$.

$$F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(R_1^n) = p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} R_1^n\right) = p(R_1) \leq 1$$

↑ évènement : le joueur est ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet

les réunions et disjoints.

Donc $\forall t \in [0,1], \ F(t) \leq 1$. $\quad \underline{\underline{\forall t \in]0,1[, \ F(t) \leq 1}}$.

Soit $t \in]0,1[$

$F(t)$ est solution de $x \in \mathbb{R}$ et $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ et $F(t) \leq 1$ donc $F(t) = x'(t)$

$$\{x'(t), x''(t)\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}, \frac{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} \right\} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} < \frac{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$$

Donc $x'(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$

Vaut pour $t = 1$! $\qquad$ vaut pour $t = 0$ et 1.

Finalement $\quad \underline{\underline{\forall t \in]0,1[, \quad F_1(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}}}$ ou $F_1(t) = \dfrac{2(1-p)t}{1 + \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$

c) F_1 est continue sur $[0,1]$ (partie I)

$$F_1(1) = \lim_{t \to 1^-} F(t) = \lim_{t \to 1^-} \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} = \frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 - |2p-1|}{2p}$$

Or $\quad p(R_1) = F_1(1) \quad$ (voir plus haut).

$$\text{Donc} \quad p(R_1) = \begin{cases} \dfrac{1 - (2p-1)}{2p} = \dfrac{1-p}{p} & \text{si } p > 1/2 \\[2ex] \dfrac{1 + 2p - 1}{2p} = 1 & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$$

Si $\quad \underline{\underline{p \leq \frac{1}{2}, \ p(R_1) = 1 \ \text{ et si } p > \frac{1}{2}, \ p(R_1) = \frac{1-p}{p}}}$.

Q2 Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.

$p \leq 1/2$. $p(R_1) = 1$. On peut donc parler de la variable aléatoire X_1 ...

D'après la partie I, $E(X_1)$ existe si et seulement si F_1 est dérivable en 1.

$$\forall t \in]0,1[,\quad \frac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \frac{1}{t-1}\left[\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt} - 1\right] = \frac{1}{t-1}\,\frac{1}{2pt}\left((1-2pt)-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}\right)$$

$$\forall t \in]0,1[,\quad \frac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \frac{1}{2pt}\,\frac{1}{t-1}\,\frac{(1-2pt)^2-(1-4p(1-p)t^2)}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}} = \frac{1}{2pt}\,\frac{1}{t-1}\,\frac{4pt(t-1)}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$$

$$\forall t \in]0,1[,\quad \frac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \frac{2}{(1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$$

$$\lim_{t\to 1^-}\left((1-2pt)+\sqrt{1-4p(1-p)t^2}\right) = 1-2p+|2p-1| \overset{p\leq 1/2}{=} 1-2p+1-2p = 2(1-2p)$$

Si $p < \frac{1}{2}$: $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = \frac{2}{2(1-2p)} = \frac{1}{1-2p}$; F_1 est dérivable en 1 et $F_1'(1) = \frac{1}{1-2p}$

Si $p = \frac{1}{2}$ $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{F_1(t)-F_1(1)}{t-1} = +\infty$ et F_1 n'est pas dérivable en 1.

Si $p < \frac{1}{2}$: $E(X_1) = \frac{1}{1-2p}$; si $p = \frac{1}{2}$, X_1 n'a pas d'espérance.

Remarque.. On pouvait aussi faire cette étude à partir de $\forall t \in]0,1]$, $F_1(t) = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}$

... ou en cherchant $\lim_{t\to 1^-} F_1'(t)$.

Q3.. Expression des probabilités $p_n(1)$.

a) $(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1(1-2)(1-4)\cdots(1-2k+2)}{2^k k!} x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\, 1\times 3\times 5\times\cdots(2k-3)}{2^k k!} x^k + o(x^n) = 1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\, 2^{k-1}(k-1)!}x^k + o(x^n)$$

Finalement : $(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k + o(x^n) = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k + o(x^n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons que pour obtenir un $dl(2n+1)$ de F_1 en 0 il est nécessaire d'avoir un $dl(2n+2)$ de $t \mapsto 1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}$ en 0.

Partons alors d'un $dl(n+1)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ en 0.

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + o(x^{n+1}).$$

$$1-(1+x)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k + o(x^{n+1}).$$ Posons $\alpha = 4p(1-p)$.

$$1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2} = 1-\sqrt{1-\alpha t^2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} (-\alpha)^k t^{2k} + o(t^{2n+2})$$

$$F_1(t) = \frac{1-\sqrt{1-\alpha t^2}}{2pt} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2p} \frac{(-1)^k(-1)^k(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} \alpha^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}).$$

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{p\,2^{2k}k!(k-1)!} (4p(1-p))^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1})$$

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k t^{2k-1} + o(t^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} p^{k}(1-p)^{k+1} t^{2k+1} + o(t^{2n+1}).$$

La partie 1 donne aussi $F_1(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} P_k(1) t^k + o(t^{2n+1})$.

ou : $F_1(t) = \sum_{k=0}^{n} P_{2k}(1) t^{2k} + \sum_{k=0}^{n} P_{2k+1}(1) t^{2k+1} + o(t^{2n+1})$

L'unicité du $dl(2n+1)$ de F_1 en 0 donne :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{2k}(1) = 0$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_{2k+1}(1) = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} p^k(1-p)^{k+1}$ ... et pour tout $n \in \mathbb{N}$

ceci suffit pour dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P_{2n}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n (1-p)^{n+1}.$$

Remarque.. $n=0$ donne $P_0(1) = 0$ et $P_1(1) = 1-p$

$n=1$ donne $P_2(1) = 0$ et $P_3(1) = p(1-p)^2$

Ce qui confirme Q1 a) !

PARTIE II 2.. Etude du cas général.

1°.. Etude de la probabilité de la ruine du joueur.

a) Rappel.. Si $n \in \mathbb{N}$, R_K^n est l'événement le joueur est ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$P_n(1) = p(R_1^n) = p(R_1^n \cap F_1) + p(R_1^n \cap P_1)$

Comme $n \geqslant 2$: $p(R_1^n \cap P_1) = 0$.

$p(R_1^n \cap F_1) = p(R_1^n | F_1)\, p(F_1) = p(R_1^n | F_1) \times p$.

Or la probabilité de R_1^n sachant F_1 est la même que la probabilité pour que la ruine du joueur intervienne après $n-1$ jets lorsqu'au départ il a deux francs ; en effet si F_1 est réalisé il a 2F à l'issue du 1er jet... et il ne lui reste plus que $n-1$ jets pour se ruiner.

Donc $p(R_1^n \cap F_1) = p(R_1^n | F_1)\, p = p(R_2^{n-1})\, p = P_{n-1}(2)\, p$.

$\underline{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad P_n(1) = p\, P_{n-1}(2)}$. ou $\underline{\forall n \in [\![1, +\infty[\![, \quad P_n(2) = \frac{1}{p} P_{n+1}(1)}$

Soit $t \in [0,1]$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad t^n P_n(1) = pt\, t^{n-1} P_{n-1}(2)$; $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} t^n P_n(1) = pt \sum_{n=2}^{+\infty} t^{n-1} P_{n-1}(2)$

Donc $\displaystyle F_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} t^n P_n(1) + P_0(1) + t\, P_1(1) = pt \sum_{n=2}^{+\infty} t^{n-1} P_{n-1}(2) + t(1-p)$

$\displaystyle F_1(t) = pt \sum_{n=1 \text{ ou } 0}^{+\infty} t^n P_n(2) + t(1-p) = pt\, F_2(t) - t(1-p)$. $\underline{F_1(t) = pt\, F_2(t) + t(1-p)}$

Or $pt(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p)t = pt\, F_2(t) + t(1-p) - (1-pt) = pt\, F_2(t)$.

$\forall t \in]0,1]$, $t(F_1(t))^2 = t F_2(t)$; $\forall t \in]0,1]$, $(F_1(t))^2 = F_2(t)$.

F_1^2 et F_2 étant continue sur $[0,1]$ la dernière égalité vaut encore pour $t=0$.

Finalement : $\underline{\forall t \in [0,1], \quad F_2(t) = (F_1(t))^2}$

b) $K \geqslant 2$. Montrons que : $P_n(K) = \begin{cases} p\, P_{n-1}(K+1) + (1-p)\, P_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Si $n=0$ c'est clair. Si $n=1$: $P_n(K) = P_1(K) = 0$ car $K \geqslant 2$. Or dans ce cas :

$p\, P_{n-1}(K+1) + (1-p)\, P_{n-1}(K-1) = p\, P_0(K+1) + (1-p)\, P_0(K-1) = 0$. L'égalité vaut encore pour $n = 1$.

Supposons $n \geqslant 1$.

$p_n(K) = p(R_K^n) = p(R_K^n \cap F_1) + p(R_K^n \cap P_1) = p(R_K^n | F_1)p(F_1) + p(R_K^n | P_1)p(P_1)$.

$p_n(K) = p\ p(R_K^n / F_1) + (1-p)p(R_K^n / P_1)$.

Si le 1er jet donne face le joueur dispose de K+1 francs après ce premier jet. Par conséquent la probabilité pour qu'il soit ruiné à l'issue du $n^{ème}$ jet sachant que le 1er jet donne face est encore la probabilité pour qu'il soit ruiné après $n-1$ jets en ayant comme capital de départ K+1 francs ; $p(R_K^n | F_1) = p(R_{K+1}^{n-1}) = p_{n-1}(K+1)$

Un raisonnement analogue donne : $p(R_K^n | P_1) = p(R_{K-1}^{n-1}) = p_{n-1}(K-1)$

Finalement $\underline{p_n(K) = p\ p_{n-1}(K+1) + (1-p)p_{n-1}(K-1)}$.

Donc $p_n(K) = \begin{cases} p\,p_{n-1}(K+1) + (1-p)\,p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geqslant 1. \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

Soit $t \in [0,1]$.

$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(K)t^n = p\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(K+1)t^n + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(K-1)t^n$

$F_K(t) = p\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K+1)t^{n+1} + (1-p)\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K-1)t^{n+1} = p\,F_{K+1}(t)\,t + (1-p)F_{K-1}(t)\,t$

$\forall t \in [0,1], \quad F_K(t) = p\,t\,F_{K+1}(t) + (1-p)t\,F_{K-1}(t)$.

Soit $t \in]0,1]$. $(F_K(t))_{K \geqslant 1}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2

d'équation caractéristique : $p t x^2 - x + (1-p)t = 0$

cette équation admet deux solutions $x'(t)$ et $x''(t)$.

Par conséquence : $\exists (\lambda_t, \mu_t) \in \mathbb{R}^2,\ \forall K \in \mathbb{N}^*,\ F_K(t) = \lambda_t (x'(t))^K + \mu_t (x''(t))^{K-1})$

$\begin{cases} \lambda_t x'(t) + \mu_t x''(t) = F_1(t) \\ \lambda_t (x'(t))^2 + \mu_t (x''(t))^2 = (F_1(t))^2 \end{cases}$

$(F_1(t))^2 - x''(t)F_1(t) = \lambda_t[(x'(t))^2 - x'(t)x''(t)] = \lambda_t\, x'(t)(x'(t) - x''(t))$.

Rappelons que $F_1(t) = x'(t)$; que $x'(t) \neq x''(t)$ et que $x'(t) \neq 0$ $(t \neq 0)$.

$(x'(t))[x'(t) - x''(t)] = \lambda_t\, x'(t)(x'(t) - x''(t))$; $\lambda_t = 1$.

$x'(t) = F_1(t) = \lambda_t x'(t) + \mu_t x''(t) = x'(t) + \mu_t x''(t)$; $\mu_t x''(t) = 0$; $\mu_t = 0$ car $x''(t) \neq 0$.

Donc $F_K(t) = (x'(t))^K = (F_1(t))^K$ pour $t \in]0,1]$ et $K \in \mathbb{N}^*$.

Examinons le cas $t=0$. $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $F_K(0) = P_0(K) + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(K)\, 0^n = 0 = 0^K = (F_1(0))^K$

Finalement : $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $F_K(t) = (F_1(t))^K$.

$$\forall K \in \mathbb{N}^*,\quad F_K(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}{2pt}\right)^K & \text{si } t \in]0,1]. \end{cases}$$

c) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. $F_K(1) = \left(\dfrac{1-|2p-1|}{2p}\right)^K = \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^K & \text{si } p > 1/2 \\ 1^K & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$

$$\text{donc}\quad p(R_K) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^K & \text{si } p > 1/2 \\ 1 & \text{si } p \leq 1/2 \end{cases}$$

Q2 Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq \frac{1}{2}$.

1er cas.. $p < 1/2$. F_1 est dérivable en 1 et $F_1'(1) = \dfrac{1}{1-2p}$.

Donc F_1^K est dérivable en 1 et $(F_1^K)'(1) = K F_1'(1) F_1^{K-1}(1) = \dfrac{K}{1-2p}$.

Par conséquent : X_K possède une espérance qui vaut $\dfrac{K}{1-2p}$ si $p < \frac{1}{2}$

2ième cas.. $p = 1/2$. Rappelons que : $\lim_{t \to 1^-} \dfrac{F_1(t) - F_1(1)}{t-1} = +\infty$

$\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{F_K(t) - F_K(1)}{t-1} = \dfrac{(F_1(t))^K - 1}{t-1} = \dfrac{F_1(t)-1}{t-1}\left[(F_1(t))^{K-1} + (F_1(t))^{K-2} + \dots + 1\right]$

Donc $\lim_{t \to 1^-} \dfrac{F_K(t) - F_K(1)}{t-1} = +\infty$ $\quad \left(\lim_{t \to 1^-} \left[(F_1(t))^{K-1} + (F_1(t))^{K-2} + \dots + 1\right] = K \right)$

F_K n'est pas dérivable en 1.

Si $p = \frac{1}{2}$, X_K n'a pas d'espérance.

Q3. Expression des probabilités $P_n(K)$.

a) Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(1) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, p^n (1-p)^{n+1}$.

Nous avons vu que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $P_n(1) = p\, P_{n-1}(2)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) = \dfrac{1}{p} P_{n+1}(1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(2) = \dfrac{1}{p} P_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, p^{n-1} (1-p)^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(2) = \dfrac{1}{p} P_{2n+2}(1) = 0.$

Par conséquent : $P_0(2) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}(2) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, p^{n-1}(1-p)^{n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(2) = 0$

b) $\forall K \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(K) = p\, P_{n-1}(K+1) + (1-p)\, P_{n-1}(K-1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) = p\, P_{n-1}(3) + (1-p)\, P_{n-1}(1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n-1}(3) = \dfrac{1}{p}\left(P_n(2) - (1-p)\, P_{n-1}(1)\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(3) = \dfrac{1}{p}\left(P_{n+1}(2) - (1-p)\, P_n(1)\right)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(3) = \dfrac{1}{p}\left(P_{2n+1}(2) - (1-p)\, P_{2n}(1)\right) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(3) = \dfrac{1}{p}\left(P_{2n+2}(2) - (1-p)\, P_{2n+1}(1)\right) = \dfrac{1}{p}\Big[\dfrac{(2n+2)!}{\ldots}\, p^n (1-p)^{n+2} - (1-p)\, \dfrac{(2n)!}{\ldots}\, p^n (1-p)^{n+1} \Big]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(6) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ \frac{3(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)}\ p^{n-3} q^{n-3} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(6) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(7) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n+1}(7) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ \frac{7n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\ p^{n-3} q^{n+4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(8) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+3)(n+4)}\ p^{n-4} q^{n+4} \qquad !$$

Il reste donc plus qu'à montrer que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(2K) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ \frac{K(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+K)}\ p^{n-K} q^{n+K} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1}(2K) = 0$$

<u>et</u>

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n}(2K+1) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n+1}(2K+1) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ \frac{(2K+1)(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+K+1)}\ p^{N-K} q^{n+K+1}$$