PARTIE I

1°. Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

Notons φ l'application $(A,B) \to \langle A,B\rangle$ de $\mathbb{R}_{2p}[X] \times \mathbb{R}_{2p}[X]$ dans $\mathbb{R}$ et montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

→ Soient $(A,B,C) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^3$ et α un réel.

$\varphi(A,\alpha B+C) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)(\alpha B(i)+C(i)) = \alpha\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i) + \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)C(i) = \alpha\varphi(A,B)+\varphi(A,C).$

→ Soit $(A,B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$

$$\varphi(B,A) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} B(i)A(i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i) = \varphi(A,B).$$

→ Soit $A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$$\varphi(A,A) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)A(i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} (A(i))^2 \geqslant 0.$$

Supposons maintenant que : $\varphi(A,A)=0$. $\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} (A(i))^2 = 0$.

Donc $\forall i \in [\![-p,p]\!]$, $A(i)=0$. A admet donc au moins $2p+1$ zéros ; A étant un polynôme de degré au plus $2p$: A est le polynôme nul.

Donc $\varphi(A,A)\geqslant 0$ et : $\varphi(A,A)=0$ donne $A=0$.

Ceci achève de prouver que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

2°. Propriétés du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

a) $\|1\|^2 = \langle 1,1\rangle = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} 1 = \frac{1}{2p+1}\times(2p+1) = 1$ donc $\|1\| = 1$.

b) • $V(A) = \langle A-m(A), A-m(A)\rangle = \langle A,A\rangle - 2m(A)\langle A,1\rangle + (m(A))^2\langle 1,1\rangle$.

$V(A) = \|A\|^2 - 2m(A)\,m(A) + (m(A))^2\times 1$

Donc $V(A) = \|A\|^2 - (m(A))^2$.

• $\mathrm{Cov}(A,B) = \langle A-m(A), B-m(B)\rangle = \langle A,B\rangle - m(B)\langle A,1\rangle - m(A)\langle 1,B\rangle + m(A)m(B)\langle 1,1\rangle$

$\mathrm{Cov}(A,B) = \langle A,B\rangle - m(B)\,m(A) - m(A)\,m(B) + m(A)m(B)\times 1$

$\mathrm{Cov}(A,B) = \langle A,B\rangle - m(A)m(B)$.

- $(A,B) \in \mathbb{R}_{2p}^2[X]$, A est pair et B est impair. Posons $C = AB$. C est impair par conséquent $C(0)=0$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $C(-i) = -C(i)$.

$$\langle A,B\rangle = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} C(i) = \frac{1}{2p+1}\Big[\sum_{i=-p}^{-1} C(i) + C(0) + \sum_{i=1}^{p} C(i)\Big]$$

$$\langle A,B\rangle = \frac{1}{2p+1}\Big[\sum_{i=1}^{p} C(-i) + 0 + \sum_{i=1}^{p} C(i)\Big] = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=1}^{p}\left(C(-i)+C(i)\right) = 0. \quad \underline{\underline{\langle A,B\rangle = 0.}}$$

- Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

$$\langle XA,B\rangle = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(iA(i))B(i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}A(i)(iB(i)) = \langle A,XB\rangle. \quad \underline{\underline{\langle XA,B\rangle = \langle A,XB\rangle.}}$$

$\uparrow$
où je préfère !

__Remarque.__ – $m(A)$, $V(A)$, $\sigma(A)$, $\mathrm{Cov}(A,B)$ ... cela me dit quelque chose ! Et vous ?

Soit Y une var sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui suit une loi uniforme sur $[\![-p,p]\!]$ (comme d'habitude ce n'est pas le même p !). $Y(\Omega) = [\![-p,p]\!]$ et $\forall k \in [\![-p,p]\!]$, $P(Y=k) = \frac{1}{2p+1}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$Y_A = A\circ Y$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$. Le théorème du transfert montre que :

$$E(Y_A) = \sum_{i=-p}^{p} A(i)\,P(Y=i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i) = \langle A,1\rangle = m(A). \quad \underline{\underline{E(Y_A) = m(A).}}$$

Le théorème du transfert donne encore :

$$E(Y_A^2) = E\left((A\circ Y)^2\right) = \sum_{i=-p}^{p}(A(i))^2 P(Y=i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(A(i))^2 = \|A\|^2 \text{ et}$$

$$V(Y_A) = E\left((Y_A - E(Y_A))^2\right) = E\left((Y_A - m(A))^2\right) = \sum_{i=-p}^{p}\left(A(i)-m(A)\right)^2 P(Y=i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(A-m(A))^2(i) = \|A-m(A)\|^2$$

Donc $E(Y_A) = m(A)$, $E(Y_A^2) = \|A\|^2$ et $V(Y_A) = \|A-m(A)\|^2 = V(A)$.

Exercice de contrôle : montrer que $\mathrm{cov}(Y_A, Y_B) = \mathrm{Cov}(A,B)$!

Q3 __Détermination des normes des polynômes X et X^2.__

Soyons polis et oublions que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$!

a) $\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 = \sum_{i=-p}^{p}(i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=-p}^{p} i^3 + 3\sum_{i=-p}^{p} i^2 + 3\underbrace{\sum_{i=-p}^{p} i}_{=0\ \dots\ \text{imparité ! ou (3) avec } A=1 \text{ et } B=X} + (2p+1)$

donc $\sum_{i=-p}^{p} i^2 = \frac{1}{3}\left[\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 - \sum_{i=-p}^{p} i^3 - (2p+1)\right] = \frac{1}{3}\left[(p+1)^3 - (-p)^3 - (2p+1)\right]$

$\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 = \sum_{i=-p+1}^{p+1} i^3$

donc $\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} i^2 = \frac{1}{3(2p+1)}\left[(p+1)^3 + p^3 - (2p+1)\right] = \frac{1}{3(2p+1)}\left[(p+1+p)\left[(p+1)^2 - (p+1)p + p^2\right] - (2p+1)\right]$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

donc $\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} i^2 = \frac{1}{3}\left[(p+1)^2 - (p+1)p + p^2 - 1\right] = \frac{1}{3}(p+1)\left[p+1-p+p-1\right] = \frac{1}{3}p(p+1)$.

Par conséquent $\underline{\underline{\|X\|^2 = \frac{1}{3}p(p+1)}}$.

b) $\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^5 = \sum_{i=-p}^{p} i^5 + 5\sum_{i=-p}^{p} i^4 + 10\underbrace{\sum_{i=-p}^{p} i^3}_{=0\ \text{imparité}} + 10\sum_{i=-p}^{p} i^2 + 5\underbrace{\sum_{i=-p}^{p} i}_{=0\ \text{imparité}} + \underbrace{\sum_{i=-p}^{p} 1}_{=2p+1}$

$\|X^2\|^2 = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} i^4 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p+1}\left(\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^5 - \sum_{i=-p}^{p} i^5\right) - 10\|X\|^2 - 1\right)$ ok ?

$\|X^2\|^2 = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2p+1}\left((p+1)^5 - (-p)^5\right) - \frac{10}{3}p(p+1) - 1\right]$

$a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

$(p+1)^5 - (-p)^5 = (p+1)^5 + p^5 = (p+1+p)\left[(p+1)^4 - (p+1)^3 p + (p+1)^2p^2 - (p+1)p^3 + p^4\right]$

$(p+1)^5 - (-p)^5 = (2p+1)(\cancel{p^4} + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 - \cancel{p^4} - 3p^3 - 3p^2 - p + \cancel{p^4} + 2p^3 + p^2 - \cancel{p^4} - p^3 + p^4]$

$(p+1)^5 - (-p)^5 = (2p+1)(2p^3+4p^2+3p+1+p^4)$!

$\frac{(p+1)^5 - (-p)^5}{2p+1} - 1 = p^4+2p^3+4p^2+3p = p(p^3+2p^2+4p+3) = p(p+1)(p^2+p+3)$

donc $\|X^2\|^2 = \frac{1}{5}\left(p(p+1)(p^2+p+3) - \frac{10}{3}p(p+1)\right) = \frac{1}{15}p(p+1)(3p^2+3p+9-10)$

ce qui donne : $\underline{\underline{\|X^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}}}$.

<u>**Remarque**</u>.. Retenons de ce qui précède que $\alpha_q = \sum_{i=-p}^{p} i^q$ (resp. $\sum_{i=1}^{p} i^q$) s'obtient à partir de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ en utilisant la formule du binôme.

Q4.. Meilleure approximation d'un polynôme par une constante. (Jabalayo, non ?)

a) $m(A)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$ si :

1°.. $m(A) \in \mathbb{R}_0[X]$

2°.. $A - m(A)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_0[X]$

Le premier point est clair ; le second presque autant car :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_0[X]$, $\langle A - m(A), \lambda \rangle = \lambda \langle A, 1 \rangle - m(A)\lambda \langle 1,1 \rangle = \lambda m(A) - m(A)\lambda = 0$

$m(A)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X]$.

b) Il n'y a RIEN à faire ! c'est du cours. La projection orthogonale $m(A)$ de A sur $\mathbb{R}_0[X]$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_0[X]$ tel que : $\|A - m(A)\| = \inf_{b \in \mathbb{R}_0[X]} \|A - b\|$ et les carrés ne changent rien !!

Continuons à être courtois et démontrons.

Soit $b \in \mathbb{R}_0[X]$. $A - m(A)$ est orthogonal à $m(A) - b$ car $m(A) - b \in \mathbb{R}_0[X]$ par conséquent Pythagore donne : $\|A - m(A) + m(A) - b\|^2 = \|A - m(A)\|^2 + \|m(A) - b\|^2$

Donc $\|A - b\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2 \langle 1,1 \rangle = V(A) + (m(A) - b)^2$.

$\forall b \in \mathbb{R}_0[X]$, $\|A - b\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2$.

Par conséquent : $\forall b \in \mathbb{R}_0[X]$, $b \neq m(A) \Rightarrow \|A - b\|^2 > V(A) = \|A - m(A)\|^2$

Donc le minimum de $\|A - b\|^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R} = \mathbb{R}_0[X]$ est atteint si et seulement si $b = m(A)$ et il est égal à $V(A)$.

c) Soit $A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$\Rightarrow$ clair

$\Leftarrow$ OK ?

$V(A) = 0 \Leftrightarrow \|A - m(A)\|^2 = 0 \Leftrightarrow A = m(A) \Leftrightarrow A \in \mathbb{R}_0[X]$

Donc $\forall A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$, $V(A) \neq 0 \Leftrightarrow \deg A \geqslant 1$.

Soit $A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$ tel que $V(A) \neq 0$.

$A - m(A)$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_0[X]$ car $m(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathbb{R}_0[X]$; $\dfrac{A - m(A)}{\sigma(A)}$ est donc lui aussi orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_0[X]$ et donc en particulier à 1.

$\|1\| = 1$ et $\left\| \dfrac{A - m(A)}{\sigma(A)} \right\| = \dfrac{1}{|\sigma(A)|} \|A - m(A)\| = \dfrac{1}{\sigma(A)} \sqrt{V(A)} = 1.$

$\left(1, \dfrac{A-m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est une famille orthonormale (donc libre !) de $\mathrm{Vect}(1, A)$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 2 ($\deg A \geqslant 1$) ; $\left(1, \dfrac{A-m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est donc une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1,A)$... c'est la base orthonormale déduite de $(1,A)$ par "Schmidt".

Q5 Meilleure approximation d'un polynôme B par un polynôme de $\mathrm{Vect}(1,A)$. Inouï !

La solution en quelques lignes. La solution du problème est le couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\widehat{B}_0 = a_0 A + b_0$ soit la projection orthogonale de B sur $\mathrm{Vect}(1,A)$.

$\left(1, \dfrac{A-m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1,A)$ par conséquent :

$$\widehat{B}_0 = \langle B, 1\rangle \times 1 + \left\langle B, \frac{A-m(A)}{\sigma(A)} \right\rangle \frac{A-m(A)}{\sigma(A)} = m(B) + \frac{1}{(\sigma(A))^2}\left(\langle B, A\rangle - m(A)\langle B, 1\rangle\right)(A - m(A))$$

$$\widehat{B}_0 = \frac{1}{(\sigma(A))^2}\left(\langle A,B\rangle - m(A)m(B)\right)(A - m(A)) + m(B) = \frac{1}{V(A)} \mathrm{cov}(A,B)(A - m(A)) + m(B)$$

Alors $a_0 = \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}$ et $b_0 = m(B) - a_0 m(A)$ et c'est fini ! mais réinventons la roue !

Remarque ... On obtient encore le résultat en 2 lignes en considérant la série statistique double $(A(i), B(i))$ et en ajustant linéairement B par rapport à A ! resp.

a) $a \in \mathbb{R}$. En appliquant Q4 à $B - aA$ on peut dire que le réel b qui rend minimum $\|B - aA - b\|^2$ est $\underline{b} = m(B - aA) = \langle B - aA, 1\rangle = \langle B, 1\rangle - a\langle A, 1\rangle = m(B) - a\,m(A)$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$f(a) = \|B - aA - b\|^2 = \|(B - aA) - (m(B) - a\,m(A))\|^2 = \|(B - m(B)) - a(A - m(A))\|^2$

$f(a) = \|B - m(B)\|^2 - 2a\langle B - m(B), A - m(A)\rangle + a^2 \|A - m(A)\|^2$

$f(a) = V(B) - 2a\,\mathrm{cov}(A,B) + a^2 V(A).$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 2aV(A) - 2\mathrm{cov}(A,B) \underset{V(A) \neq 0 \text{ car } \deg A \geqslant 1.}{=} 2V(A)\left(a - \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}\right)$

Comme $V(A) > 0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}, +\infty\right[$.

$a_0 = \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}$ est l'unique réel qui rend f minimum.

$$f(a_0) = V(B) - 2\frac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}\mathrm{cov}(A,B) + \left(\frac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}\right)^2 V(A) = V(B) - \frac{(\mathrm{cov}(A,B))^2}{V(A)}.$$

$$\mu = f(a_0) = V(B) - \frac{(\mathrm{cov}(A,B))^2}{V(A)}.$$

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\|B-aA-b\|^2 \geqslant \|(B-m(B))-a(A-m(A))\|^2 = f(a) \geqslant f(a_0) = \mu$.

avec égalité ssi $b = m(B) - a\,m(A)$ avec égalité ssi $a = a_0$.

Par conséquent $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\|B-aA-b\|^2 \geqslant \mu$ avec égalité ssi $\begin{cases} a = a_0 \\ b = m(B) - a_0 m(A) \end{cases}$.

$\mu = V(B) - \dfrac{(\mathrm{cov}(A,B))^2}{V(A)}$ est le minimum de $\|B-aA-b\|^2$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et ce minimum est atteint si et seulement si $(a,b) = (a_0, m(B) - a_0 m(A))$ où $a_0 = \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}$.

c) $\forall a\in\mathbb{R}$, $f(a) = \|(B-m(B)) - a(A-m(A))\|^2 \geqslant 0$

donc $\forall a\in\mathbb{R}$, $f(a) = V(A)a^2 - 2\mathrm{cov}(A,B)\,a + V(B) \geqslant 0$

comme $V(A)$ n'est pas nul, f est une fonction polynômiale de degré 2 qui ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit $\Delta' = (\mathrm{cov}(A,B))^2 - V(A)V(B)$ est négatif ou nul puisque f a au plus un zéro dans $\mathbb{R}$ (deux zéros provoqueraient un changement de signe...)

Par conséquent : $(\mathrm{cov}(A,B))^2 - V(A)V(B) \leqslant 0$. $|\mathrm{cov}(A,B)| \leqslant \sigma(A)\sigma(B)$.

Remarques 1. cela s'obtient en une ligne avec Cauchy-Schwarz.

2. ceci vaut encore pour $A\in\mathbb{R}_0[X]$ car dans ce cas $\mathrm{cov}(A,B) = 0$ et $V(A) = 0$.

Supposons $\deg A \geqslant 1$ et $|\mathrm{cov}(A,B)| = \sigma(A)\sigma(B)$, alors $\Delta' = 0$. f admet une racine double.

$\exists a\in\mathbb{R}$, $\|B-m(B)-a(A-m(A))\|^2 = f(a) = 0$, $B - m(B) = a(A-m(A))$; donc

$B = aA + b$ avec $b = m(B) - a\,m(A)$. $B\in\mathrm{Vect}(1,A)$.

Supposons réciproquement $\deg A \geqslant 1$ et $B\in\mathrm{Vect}(1,A)$.

$\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $B = aA+b$. $\mathrm{Cov}(A,B) = \langle A, aA+b\rangle - m(A)\,m(aA+b)$

$\mathrm{cov}(A,B) = a\langle A,A\rangle + b\langle A,1\rangle - \langle A,1\rangle\langle aA+b,1\rangle = a\langle A,A\rangle + b\langle A,1\rangle - a\langle A,1\rangle^2 - b\langle A,1\rangle\langle 1,1\rangle$

$\mathrm{cov}(A,B) = a\left(\|A\|^2 - \langle A,1\rangle^2\right) = a\left(\|A\|^2 - (m(A))^2\right) = a V(A) = a(\sigma(A))^2$

$|\mathrm{cov}(A,B)| = |a|\,\sigma(A)^2$

de plus $V(B) = V(aA+b) = \|aA+b-m(aA+b)\|^2 = \|aA+b-a\,m(A)-b\|^2 = a^2\|A-m(A)\|^2 = a^2V(A)$

donc $\sigma(A)\sigma(B) = \sigma(A)|a|\sigma(A) = |a|(\sigma(A))^2 = |\mathrm{cov}(A,B)|$.

Pour finir, si $\deg A \geqslant 1$: $\underline{\underline{|\mathrm{cov}(A,B)| = \sigma(A)\sigma(B) \iff B \in \mathrm{Vect}(1,A)}}$.

<u>Remarques</u> - 1. Plus généralement : $|\mathrm{cov}(A,B)| = \sigma(A)\sigma(B) \iff \begin{cases} \deg A < 1 \\ \text{ou} \\ B \in \mathrm{Vect}(1,A) \end{cases}$!

2. On aurait pu utiliser la CNS d'égalité dans Cauchy-Schwarz pour obtenir ce dernier résultat.

3. bilan de cette première partie : on a passé pas mal de temps à réinventer la roue ($\to$ Q2 b) (1) et (2) ; Q3 a) ; Q4 b) ; Q5)

d) Application. Il suffit de poser $B = X^2$ et $A = X$ et d'appliquer ce qui précède.

Le minimum de $\|X^2 - aX - b\|^2$ est $J = V(B) - \dfrac{(\mathrm{cov}(A,B))^2}{V(A)}$ il est atteint pour

$a = a_0 = \dfrac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}$ et $b = b_0 = m(B) - a_0 m(A)$.

$m(A) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i) = 0$ car A est impair. $m(B) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} B(i) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(A(i))^2 = \|A\|^2 = \|X\|^2$.

$m(A) = 0$.

$\mathrm{cov}(A,B) = \langle A,B\rangle - m(A)m(B) = \langle A,B\rangle = 0$ A impair et B pair.

Par conséquent : $J = V(B) = \|B\|^2 - [m(B)]^2 = \|X^2\|^2 - (\|X\|^2)^2 = \|X^2\|^2 - \|X\|^4$.

$a_0 = 0$ et $b_0 = m(B) = \|X\|^2$

$\|X^2\|^2 - \|X\|^4 = \dfrac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15} - \left(\dfrac{1}{3}p(p+1)\right)^2 = \dfrac{p(p+1)}{45}\left[3(3p^2+3p-1) - 5p(p+1)\right]$

$\|X^2\|^2 - \|X\|^4 = \dfrac{p(p+1)}{45}(4p^2+4p-3)$

Le minimum de $\|X^2 - aX - b\|$ est $\dfrac{p(p+1)(4p^2+4p-3)}{45}$ il est atteint si $\begin{cases} a = 0 \\ \text{et} \\ b = \dfrac{p(p+1)}{3} \end{cases}$

PARTIE II Ici c'est plus intéressant et à retenir ... mais c'est toujours assez lourd.

(Q1) Calcul du minimum S_{2p}.

a) C'est Lagrange.

Soient $(P,Q)\in \mathbb{R}_{2p}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$F(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(-p),\dots,(\lambda P+Q)(0),\dots,(\lambda P+Q)(p)) = (\lambda P(-p)+Q(-p),\dots,\lambda P(0)+Q(0),\dots,\lambda P(p)+Q(p))$

$F(\lambda P+Q) = \lambda\,(P(-p),\dots,P(0),\dots,P(p)) + (Q(-p),\dots,Q(0),\dots,Q(p)) = \lambda F(P)+F(Q)$.

$\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_{2p}[X]^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $F(\lambda P+Q)=\lambda F(P)+F(Q)$. F est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p+1}$.

$\dim \mathbb{R}_{2p}[X] = 2p+1 = \dim \mathbb{R}^{2p+1}$. Par conséquent pour montrer que F est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p+1}$ il ne reste plus qu'à montrer l'injectivité (ou la surjectivité !) de F.

Soit $P\in \operatorname{Ker}F$. $P\in\mathbb{R}_{2p}[X]$ et $\forall i\in[\![-p,p]\!]$, $P(i)=0$.

P est donc un polynôme de degré au plus $2p$ ayant au moins $2p+1$ zéros, P est nul.

Par conséquent $\operatorname{Ker}F=\{0_{\mathbb{R}_{2p}[X]}\}$ et F est injective.

Ceci achève de prouver que <u>F est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p+1}$.</u>

Posons $H=(y_{-p},\dots,y_0,\dots,y_p)$. $H\in\mathbb{R}^{2p+1}$.

Soit $P\in\mathbb{R}_{2p}[X]$.

$\forall i\in[\![-p,p]\!]$, $P(i)=y_i \iff F(P)=H \iff P=F^{-1}(H)$

Par conséquent <u>il existe un unique élément Y de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ tel que : $\forall i\in[\![-p,p]\!]$, $Y(i)=y_i$.</u>

<u>$Y=F^{-1}((y_{-p},y_{-p+1},\dots,y_0,y_1,\dots,y_p))$.</u>

b) $\forall P\in\mathbb{R}_{2p}[X]$, $\Delta_{2p}(P)=\dfrac{1}{2p+1}\displaystyle\sum_{i=-p}^{p}(y_i-P(i))^2 \geqslant 0 = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(y_i-Y(i)) = \Delta_{2p}(Y)$

$\forall P\in\mathbb{R}_{2p}[X]$, $\Delta_{2p}(P)\geqslant 0=\Delta_{2p}(Y)$ (et $Y\in\mathbb{R}_{2p}[X]$) donc $S_{2p}=0$

<u>Remarque</u>.. Soit $P\in\mathbb{R}_{2p}[X]$. $\Delta_{2p}(P)=0 \iff \forall i\in[\![-p,p]\!]$, $P(i)=y_i \Rightarrow P=Y$.

Y est le seul élément de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ qui réalise le minimum de Δ_{2p}.

Q2 Existence et unicité de P_k et S_k.

a) $\forall P\in\mathbb{R}_k[X]$, $\Delta_k(P)=\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(y_i-P(i))^2=\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(Y(i)-P(i))^2=\|Y-P\|^2=\|P-Y\|^2$

$\forall P\in\mathbb{R}_k[X]$, $\Delta_k(P)=\|P-Y\|^2$.

b) le cours indique que le minimum de $\|P-Y\|$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_k[X]$ est $\|\hat{P}_k-Y\|$ où $\hat{P}_k$ est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$; mieux $\hat{P}_k$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_k[X]$ qui réalise ce minimum.

Par conséquent il existe un unique élément P_k de $\mathbb{R}_k[X]$ minimisant l'expression $\Delta_k(P)=\|P-Y\|^2$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_k[X]$ et P_k est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$.

← Il est assez cocasse (?) de constater que cette question demande l'utilisation d'un théorème du cours alors que l'on nous en a refusé l'utilisation directe dans IQ4 et Q5

c) • Reprenons IQ4 en posant $A=Y$.

Le minimum de $\|Y-b\|^2=\|A-b\|^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R}$ est atteint pour $b=m(A)=m(Y)$ et vaut $V(A)=V(Y)$.

Donc $P_0=m(Y)$ et $S_0=V(Y)$.

• Reprenons IQ5 en posant $B=Y$ et $A=X$. $\deg A\geq 1$!

Le minimum de $\|Y-aX-b\|^2=\|B-aA-b\|^2$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$ est $\mu=V(B)-\frac{(\mathrm{cov}(A,B))^2}{V(A)}=V(Y)-\frac{(\mathrm{cov}(X,Y))^2}{V(X)}$

et il est atteint pour $a=a_0=\frac{\mathrm{cov}(A,B)}{V(A)}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b=b_0=m(B)-a_0m(A)=m(Y)-a_0m(X)$.

Donc le minimum de $\|Y-P\|^2$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_1[X]$ est $\mu=V(Y)-\frac{(\mathrm{cov}(X,Y))^2}{V(X)}$

et il est atteint pour $P=a_0X+b_0$. Donc $S_1=\mu$ et $P_1=a_0X+b_0$

$m(X)=\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}i=0$; $V(X)=\|X\|^2-(m(X))^2=\|X\|^2=\frac{p(p+1)}{3}$

Par conséquent : $S_1=V(Y)-\frac{3}{p(p+1)}(\mathrm{cov}(X,Y))^2$ et $P_1=\frac{3}{p(p+1)}\mathrm{cov}(X,Y)\,X+m(Y)$.

(Q3) Détermination de P_k et S_k à l'aide d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$

Dans la suite si $k \in [\![1, 2p]\!]$ nous noterons D_k la droite de $\mathbb{R}_k[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$; D_k est donc le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$

Donc si $k \in [\![1, 2p]\!]$, $B_k \in D_k$ et $X^k - B_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0[X]$, $\langle X, \lambda \rangle = \lambda \langle X, 1 \rangle = 0$ (X est impair et 1 pair).

Donc $X \in \mathbb{R}_1[X]$ et est orthogonal à $\mathbb{R}_0[X]$; par conséquent X engendre D_1.

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $B_1 = \alpha X$. De plus $X - B_1 = (1-\alpha) X \in \mathbb{R}_0[X]$; ceci exige $\alpha = 1$.

Finalement $B_1 = X$.

b) Soit $k \in [\![1, 2p]\!]$. $X^k - B_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ exige que $\begin{cases} 1°.\ \deg B_k = k \\ 2°.\ \text{le coefficient de } X^k \text{ dans } B_k \text{ est } 1 \end{cases}$

Par conséquent : $\forall k \in [\![1, 2p]\!]$, $\deg B_k = k$ et B_k est unitaire. Comme $B_0 = 1$:

$\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $\deg B_k = k$ et B_k est unitaire.

Soit $k \in [\![0, 2p]\!]$. Pour montrer que $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$ il suffit de prouver que $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$. En effet supposons que cela soit. $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_k[X]$ ($B_i \neq 0$ car $\deg B_i = i$ ...) donc une famille libre de $(k+1)$ éléments de $\mathbb{R}_k[X]$ donc une base de $\mathbb{R}_k[X]$ car $\dim \mathbb{R}_k[X] = k+1$.

Si $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ alors $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

. C'est clair pour $k = 0$!

- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, 2p-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.
  $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une famille orthogonale. Montrer que $(B_0, B_1, \dots, B_{k+1})$ est orthogonale revient à prouver que B_{k+1} est orthogonal à $B_0, B_1, \dots, B_k$.

Par définition $B_{\ell+1}$ appartient à la droite vectorielle de $\mathbb{R}_{\ell+1}[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_\ell[X]$, donc $B_{\ell+1}$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc à $B_0, B_1, \dots, B_\ell$ ce qui achève la récurrence.

$\forall \ell \in [\![0, 2p]\!]$, $(B_0, B_1, \dots, B_\ell)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_\ell[X]$.

c] $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $Y = \sum_{i=0}^{2p} \alpha_i B_i$

$\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $\langle B_k, Y\rangle = \sum_{i=0}^{2p} \alpha_i \langle B_k, B_i\rangle \underset{\langle B_k, B_i\rangle = 0 \text{ pour } i \neq k}{=} \alpha_k \langle B_k, B_k\rangle = \alpha_k \|B_k\|^2$. $\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{\langle B_k, Y\rangle}{\|B_k\|^2}$.

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{\langle B_i, Y\rangle}{\|B_i\|^2} B_i$$

d] Soit $k \in [\![0, 2p]\!]$. P_k est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$.

P_k est donc l'unique élément de $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $Y - P_k$ soit orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(B_0, B_1, \dots, B_k)$.

P_k est donc l'unique élément de $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $Y - P_k$ soit orthogonal à $B_0, B_1, \dots, B_k$.

Posons $S_k = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{\langle B_i, Y\rangle}{\|B_i\|^2} B_i$. $S_k \in \mathrm{Vect}(B_0, B_1, \dots, B_k) = \mathbb{R}_k[X]$

de plus $Y - S_k = \sum_{i=k+1}^{2p} \dfrac{\langle B_i, Y\rangle}{\|B_i\|^2} B_i \in \mathrm{Vect}(B_{k+1}, B_{k+2}, \dots, B_{2p})$

Comme $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$ est une famille orthogonale, $Y - S_k \in \mathrm{Vect}(B_{k+1}, \dots, B_{2p})$ indique que $Y - S_k$ est orthogonal à $B_0, B_1, \dots, B_k$.

$S_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et $Y - S_k$ est orthogonal à $B_0, B_1, \dots, B_k$ donc $S_k = P_k$.

Finalement $\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $P_k = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{\langle B_i, Y\rangle}{\|B_i\|^2} B_i$

Remarque – On peut aisément retrouver ce résultat en partant de $P_k = \beta_0 B_0 + \beta_1 B_1 + \dots + \beta_k B_k$.

e] $\forall k \in [\![1, 2p]\!]$, $P_k = P_{k-1} + \dfrac{\langle B_k, Y\rangle}{\|B_k\|^2} B_k$. (ok ?)

Soit $k \in [\![0, 2p]\!]$. $\delta_k = \|P_k - Y\|^2 = \langle P_k - Y, P_k - Y\rangle = \underbrace{\langle P_k - Y, P_k\rangle}_{=0 \ P_k - Y \text{ est orthogonal à } P_k} + \langle P_k - Y, -Y\rangle = -\langle P_k, Y\rangle + \langle Y, Y\rangle$.

$\forall k \in [\![1,2p]\!]$, $S_k - S_{k-1} = -\langle P_k, Y\rangle + \langle Y,Y\rangle - (\langle P_{k-1},Y\rangle + \langle Y,Y\rangle) = -\langle P_k - P_{k-1}, Y\rangle$.

$\forall k \in [\![1,2p]\!]$, $S_k - S_{k-1} = -\langle \frac{\langle B_k, Y\rangle}{\|B_k\|^2} B_k, Y\rangle = -\frac{\langle B_k,Y\rangle}{\|B_k\|^2}\langle B_k, Y\rangle = -\frac{(\langle B_k,Y\rangle)^2}{\|B_k\|^2}$.

$\forall k \in [\![1,2p]\!]$, $S_k = S_{k-1} - \frac{(\langle B_k,Y\rangle)^2}{\|B_k\|^2}$.

Exercice.. Retrouver P_1 et S_1 à l'aide de ces formules.

Remarque.. Notons que : $\forall k \in [\![1,2p]\!]$, $S_k \leq S_{k-1}$ ce qui est heureux.
Il ne reste plus qu'à savoir construire les B_k et c'est l'objet de la partie III.

PARTIE III — c'est encore à savoir faire par coeur.

Q1 Parité de B_k.

a) Soit $k \in [\![1,2p]\!]$. Rappelons que B_k est orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.
b) Soit $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

$$\langle A_k, P\rangle = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A_k(i)P(i) = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(-1)^k B_k(-i)P(i) \underset{i\mapsto -i}{=} \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} B_k(i)(-1)^k P(-i)$$

Donc $\langle A_k, P\rangle = \langle B_k, (-1)^k P(-X)\rangle = 0$ car $(-1)^k P(-X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
$\forall P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\langle A_k, P\rangle = 0$.
A_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Donc A_k appartient à la droite de $\mathbb{R}_k[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui n'est autre que la droite engendrée par B_k.

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $A_k = \alpha B_k$. $(-1)^k B_k(-X) = \alpha\, B_k$
Le coefficient de X^k dans $(-1)^k B_k(-X)$ (resp. $\alpha\, B_k$) est $(-1)^k \times (-1)^k$ (resp. $\alpha_k \times 1$)
Par conséquent $\alpha_k = 1$. Donc $A_k = B_k$.
Donc $B_k(X) = (-1)^k B_k(-X)$

B_k a donc la parité de k.

Remarque.. ceci vaut encore pour $k=0$.

Q2 Expression de XB_k dans la base $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$.

a) Soit $k \in [\![0,2p-1]\!]$ B_k a la parité de k. Si k est pair, B_k est pair et XB_k impair.

si k est impair B_k est impair et XB_k est pair.

dans les deux cas B_k et XB_k sont de parités opposées ; donc (3) donne $\langle XB_k, B_k\rangle = 0$.

$\forall k \in [\![0, 2p-1]\!]\ \langle XB_k, B_k\rangle = 0.$

b) Soit $k \in [\![2, 2p-1]\!]$ et $i \in [\![0, k-2]\!]$.

$XB_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et B_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Par conséquent : $\langle XB_k, B_i\rangle \underset{(4)}{=} \langle B_k, XB_i\rangle = 0$.

$\forall k \in [\![2, 2p-1]\!], \forall i \in [\![0, k-2]\!], \langle XB_k, B_i\rangle = 0.$

c) Soit $k \in [\![1, 2p-1]\!]$.

$XB_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X] = \mathrm{Vect}(B_0, B_1, \dots, B_{k+1})$.

$\exists (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2},\ XB_k = \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j B_j$

1er cas.. $k = 1$. $XB_1 = \delta_0 B_0 + \delta_1 B_1 + \delta_2 B_2$

$0 = \langle XB_1, B_1\rangle = \delta_0 \langle B_0, B_1\rangle + \delta_1 \langle B_1, B_1\rangle + \delta_2 \langle B_2, B_1\rangle = \delta_1 \|B_1\|^2$ donc $\delta_1 = 0$.

Par conséquent $XB_1 = \delta_0 B_0 + \delta_2 B_2$.

En posant $\alpha_1 = \delta_2$ et $\beta_1 = \delta_0$ on obtient : $XB_1 = \alpha_1 B_2 + \beta_1 B_0$; c'est à dire $XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$.

2ème cas.. $k \in [\![2, 2p-1]\!]$

$\forall i \in [\![0, k-2]\!],\ 0 = \langle XB_k, B_i\rangle = \langle \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j B_j, B_i\rangle = \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j \langle B_j, B_i\rangle = \delta_i \|B_i\|^2$

donc $\forall i \in [\![0, k-2]\!],\ \delta_i = 0$.

Par conséquent : $XB_k = \delta_{k-1} B_{k-1} + \delta_k B_k + \delta_{k+1} B_{k+1}$

$0 = \langle XB_k, B_k\rangle = \delta_{k-1} \langle B_{k-1}, B_k\rangle + \delta_k \langle B_k, B_k\rangle + \delta_{k+1} \langle B_{k+1}, B_k\rangle = \delta_k \|B_k\|^2$; $\delta_k = 0$.

Donc $XB_k = \delta_{k-1} B_{k-1} + \delta_{k+1} B_{k+1}$

Posons $\alpha_k = \delta_{k+1}$ et $\beta_k = \delta_{k-1}$; on a alors : $XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$

$\forall k \in [\![1, 2p-1]\!],\ \exists (\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2,\ XB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$

$\forall k \in [\![1, 2p-1]\!],\ \alpha_k = 1$ (le coefficient de X^{k+1} dans XB_k est 1 et c'est α_k dans $\alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$)

Soit $k \in [\![1, 2p-1]\!]$

d) • $\deg(XB_{k-1}) = \deg B_k = k$ et le coefficient de X^k dans XB_{k-1} et dans B_k est 1.

par conséquent : $XB_{k-1} - B_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

En particulier $\langle XB_{k-1} - B_k, B_k \rangle = 0$. $\langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle B_k, B_k \rangle$.

$\langle B_k, B_k \rangle = \langle XB_{k-1}, B_k \rangle = \langle B_{k-1}, XB_k \rangle = \langle B_{k-1}, B_{k+1} + \beta_k B_{k-1} \rangle = \underbrace{\langle B_{k-1}, B_{k+1} \rangle}_{=0} + \beta_k \|B_{k-1}\|^2$

donc $\beta_k = \dfrac{\langle B_k, B_k \rangle}{\|B_{k-1}\|^2} = \dfrac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}$. $\beta_k = \dfrac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}$.

Finalement $\forall k \in [\![1, 2p-1]\!]$, $B_{k+1} = XB_k - \dfrac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}$.

e) $B_0 = 1$ et $B_1 = X$.

$$B_2 = XB_1 - \frac{\|B_1\|^2}{\|B_0\|^2} B_0 = X^2 - \|B_1\|^2 = X^2 - \|X\|^2 = X^2 - \frac{p(p+1)}{3}. \quad B_2 = X^2 - \frac{p(p+1)}{3}.$$

$$B_3 = XB_2 - \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} B_1 = X\left(X^2 - \frac{p(p+1)}{3}\right) - \frac{\|B_2\|^2}{\frac{p(p+1)}{3}} X$$

$$\|B_2\|^2 = \left\|X^2 - \frac{p(p+1)}{3}\right\|^2 = \|X^2\|^2 - 2\left\langle X^2, \frac{p(p+1)}{3}\right\rangle + \left\|\frac{p(p+1)}{3}\right\|^2 = \|X^2\|^2 - 2\frac{p(p+1)}{3}\langle X^2, 1\rangle + \left(\frac{p(p+1)}{3}\right)^2$$

$$\|B_2\|^2 = \|X^2\|^2 - 2\frac{p(p+1)}{3}\frac{p(p+1)}{3} + \left(\frac{p(p+1)}{3}\right)^2 = \|X^2\|^2 - \left(\frac{p(p+1)}{3}\right)^2 \quad \left(= V(X^2)\ ! \text{ Normal car } \|B_2\|^2 = \|X^2 - m(X^2)\|^2 \right)$$

$\langle X^2, 1 \rangle = \langle X, X \rangle = \|X\|^2 = \left(\frac{p(p+1)}{3}\right)$!

$$\text{donc } \frac{\|B_2\|^2}{\frac{p(p+1)}{3}} = \frac{\|X^2\|^2}{\frac{p(p+1)}{3}} - \frac{p(p+1)}{3} = \frac{\frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}}{\frac{p(p+1)}{3}} - \frac{p(p+1)}{3} = \frac{3p^2+3p-1}{5} - \frac{p(p+1)}{3}$$

$$\text{donc } B_3 = X^3 - \frac{p(p+1)}{3}X - \left(\frac{3p^2+3p-1}{5} - \frac{p(p+1)}{3}\right)X = X^3 - \frac{3p^2+3p-1}{5}X$$

$$B_3 = X^3 - \frac{3p^2+3p-1}{5}X$$