PARTIE I

Q1 Convergence de la suite (u_k)

a) Observons d'abord que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a e^{a(x-1)} > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [f(0), f(1)] = [e^{-a}, 1]$;
donc $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

Démontrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq 1$ et $u_k \leq u_{k+1}$.

→ $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 = 0 \leq e^{-a} = f(0) = f(u_0) = u_1$. La propriété est vraie pour $k=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.
$u_k \in [0,1]$ donc $u_{k+1} = f(u_k) \in [0,1]$ d'après ce qui précède ; on a donc $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
De plus $u_k \leq u_{k+1}$ et la croissance de f donnent : $u_{k+1} = f(u_k) \leq f(u_{k+1}) = u_{k+2}$.
Finalement $0 \leq u_{k+1} \leq 1$ et $u_{k+1} \leq u_{k+2}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq 1$ et $u_k \leq u_{k+1}$.

b) D'après a) la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ est croissante et majorée par 1 ; elle est donc convergente.
$(u_k)_{k\geq 0}$ est convergente. $L(a) = \lim_{k \to +\infty} u_k$.

Q2 Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

a) Comme nous l'avons vu plus haut, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a e^{a(x-1)}$.
En particulier : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f'(x) = a e^{a(x-1)} \leq a$ ← $e^{a(x-1)} \leq 1$ car $a(x-1) \leq 0$
L'inégalité des accroissements finis donne alors :
$\forall (u,v) \in [0,1]^2$, $u \leq v \Rightarrow 0 \leq f(v) - f(u) \leq a(v-u)$.
En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq f(1) - f(u_k) = 1 - u_{k+1} \leq a(1-u_k)$ ($u_k \in [0,1]$...)

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1-u_k)$.

b) Nous savons déjà que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_k$.
Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 - u_k \leq a^k$
C'est vrai pour $k=0$ car $u_0 = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$1-u_{k+1} \underset{\uparrow \atop 2.c)}{\leq} a(1-u_k) \underset{\uparrow \atop H.R. + a>0\,!}{\leq} a \times a^k = a^{k+1}$ … ce qui achève la récurrence.

donc $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1-u_k \leq a^k$.

$a \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} a^k = 0$. Le théorème d'encadrement redonne alors la convergence de la suite (u_k) et montre que sa limite est 1.

Ainsi pour $a \in]0,1[$: $L(a) = 1$.

Q3 Limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

a). La concavité de ln donne sans difficulté : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x-1$

donc $\ln a \leq a-1 \leq a$! Ainsi $\frac{\ln a}{a} \leq 1$ et : $0 \leq 1 - \frac{\ln a}{a}$.

De plus $a \geq 1$. Donc $\frac{\ln a}{a} \geq 0$; alors $1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1$

Finalement pour $a \in [1,+\infty[$, $0 \leq 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1$… et même $0 < 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a e^{a(x-1)}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^{a(x-1)} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a(x-1) = -\ln a \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln a}{a}$.

$1 - \frac{\ln a}{a}$ est l'unique racine de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.

- Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1$

→ Supposons $a = 1$. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1 = e^{x-1} - 1 = e^{-1}(e^x - e^1)$

$g'(1) = 0$, $\forall x \in]-\infty, 1[,\ g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ g'(x) > 0$.

Ainsi g est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Comme $g(1) = f(1) - 1 = 0$: $\forall x \in]-\infty, 1[,\ g(x) > g(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ g(x) > g(1) = 0$

1 est la seule racine de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ lorsque $a = 1$.

→ Supposons $a>1$. Posons $\alpha = 1 - \frac{\ln a}{a}$; $\alpha \in [0,1]$; mieux $\alpha \in]0,1[$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x)>0 \Leftrightarrow a e^{a(x-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{a(x-1)} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a(x-1) > -\ln a$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 - \frac{\ln a}{a} = \alpha$.

Tout ce qui précède donne alors : $\forall x \in]-\infty, \alpha[,\ g'(x)<0$, $g'(\alpha)=0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[,\ g'(x)>0$

Ainsi g est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Notons que : $\alpha < 1$ donc $g(\alpha) < g(1) = 0$; $g(\alpha) < 0$.

Notons encore que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left[\frac{e^{a(x-1)}}{x} - 1 \right] = +\infty$ et que

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{a(x-1)} - x) = +\infty$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$; g définit alors une bijection de $]-\infty, \alpha]$ sur $[g(\alpha), +\infty[$ (... $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$).

$0 \in [g(\alpha), +\infty[$ car $g(\alpha) < 0$; par conséquent $\exists !\ \beta \in]-\infty, \alpha]$, $g(\beta) = 0$

Observons que $g(\alpha) < 0$ et que $g(0) = e^{-1} > 0$ donc $\beta \in]0, \alpha[$.

g est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, $1 \in]\alpha, +\infty[$ et $g(1) = 0$; par conséquent 1 est le seul zéro de g sur $[\alpha, +\infty[$ (... ou sur $]\alpha, +\infty[$).

Finalement g possède exactement deux zéros.

Lorsque $a > 1$ l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ admet deux solutions ; l'une est 1 et l'autre est un élément de $]0, 1 - \frac{\ln a}{a}[$ et donc de $]0,1[$.

Si $r(a)$ est la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$, ce qui précède donne : $r(a) \in]0,1[$ si $a \in]1, +\infty[$ et $r(1) = 1$.

b). Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\hat{\varphi}(x) = x e^{-x}$. $\hat{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\hat{\varphi}'(x) = (1-x)e^{-x}$.

$\hat{\varphi}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \hat{\varphi}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$. $\hat{\varphi}(1) = e^{-1}$.

x	0		1		$+\infty$
$\hat{\varphi}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\hat{\varphi}(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

Rappelons que : $f(r(a)) = r(a)$ donc $e^{a(r(a)-1)} = r(a)$; $e^{ar(a)} e^{-a} = r(a)$;

$e^{-a} = r(a) e^{-ar(a)}$; $a e^{-a} = a r(a) e^{-a r(a)}$. Ainsi $\underline{\underline{\hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(a r(a))}}$

- Notons que φ est la restriction de $\hat{\varphi}$ à $[0,1]$. Ainsi φ est continue et strictement croissante sur le segment $[0,1]$.

  φ réalise alors une bijection de $[0,1]$ sur $[\varphi(0), \varphi(1)] = [0, 1/e]$.

Comme φ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, $\underline{\underline{\varphi^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur } [0, 1/e]}}$.

x	0		$1/e$
$\varphi^{-1}(x)$	0	↗	1

- Si $a=1$: $\frac{1}{a} \varphi^{-1}(a e^{-a}) = \varphi^{-1}(e^{-1}) = 1 = r(a)$

  Supposons $a > 1$. Notons que $\hat{\varphi}$ est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. $\hat{\varphi}(1) = 1/e$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \hat{\varphi}(x) = 0$. $\hat{\varphi}$ réalise alors une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1/e]$.

Posons $t = a e^{-a}$. $a \in]1, +\infty[$ donc $t \in]0, \frac{1}{e}[$. Posons $\delta = \varphi^{-1}(t)$

a et δ sont les deux seuls antécédents de t par $\hat{\varphi}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Or $\hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(a r(a))$, $a \in]1, +\infty[$, $a r(a) \in \mathbb{R}_+$ et $a r(a) \neq a$, ainsi

$a r(a) = \delta = \varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(a e^{-a})$.

Donc $\underline{\underline{r(a) = \frac{1}{a} \varphi^{-1}(a e^{-a})}}$.

$\lim\limits_{a \to +\infty} r(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{1}{a}(\varphi^{-1}(a e^{-a})) = 0 \times \varphi^{-1}(0) = 0$; $\underline{\underline{\lim\limits_{a \to +\infty} r(a) = 0}}$.

· c) • Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq r(a)$.

- C'est vrai pour $k=0$ car $u_0 = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$0 \leq u_k \leq r(a)$ donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(r(a))$ car f est croissante.

Ainsi $e^{-a} \leq u_{k+1} \leq f(r(a)) = r(a)$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq r(a)$.

Ceci achève la récurrence. $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_k \leq r(a).}}$

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = f(u_k)$, $(u_k)_{k \geq 0}$ converge vers $L(a)$ et f est continue en $L(a)$.

Par conséquent $f(L(a)) = L(a)$.

Notons aussi que $L(a) \in [0, r(a)]$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq r(a)$.

Par conséquent $L(a) \in [0, r(a)]$ et $f(L(a)) = L(a)$. Comme $r(a)$ est la plus petite racine de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x$: $\underline{\underline{L(a) = r(a).}}$

Alors $L(a) = r(a)$

• Ici nous prendrons a dans $]1, +\infty[$. Calculer les termes de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ ne pose pas de problème. Mais quand s'arrêter ? Tout simplement lorsque : $|L(a) - u_k| < 10^{-2}$; c'est à dire lorsque $u_k + 10^{-2} > L(a)$ (car $L(a) - u_k \geq 0$). Encore faut-il être capable d'évaluer la validité de cette inégalité sans connaître $L(a)$.

Pour cela nous allons utiliser g ; plus précisément le signe de g.

Rappelons alors que $\forall x \in]-\infty, L(a)[\cup]1, +\infty[$, $g(x) > 0$;

$g(L(a)) = g(1) = 0$; $\forall x \in]L(a), 1[$, $g(x) < 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si $g(u_k + 10^{-2}) \leq 0$ alors $r(a) \leq u_k + 10^{-2}$ et l'on peut s'arrêter !

Supposons $g(u_k + 10^{-2}) > 0$. Deux cas se présentent.

→ $u_k + 10^{-2} < 1$ alors $u_k + 10^{-2} < L(a)$; $10^{-2} < L(a) - u_k$;

il faut alors calculer u_{k+1}...

→ $u_k + 10^{-2} \geq 1$ alors $u_k + 10^{-2} > L(a)$; on peut s'arrêter.

Remarque : u_ℓ est une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près si et seulement si $g(u_\ell+10^{-2})\leq 0$ ou si $u_\ell+10^{-2}\geq 1$.

Tout est clair nous allons calculer u_ℓ tant que : $u_\ell+10^{-2}<1$ et $g(u_\ell+10^{-2})>0$.

Rappelons que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$.

```
program ESSEC_97_E;

const epsi=1e-2;

var k:integer;a,u,v:real;

function f(a,x:real):real;

begin
f:=exp(a*(x-1));
end;

begin
Write('Donnez la valeur de a. a=');readln(a);
u:=0;k:=0;v:=u+epsi;
while (v<1) and (f(a,v)-v>0) do
      begin
      k:=k+1;u:=f(a,u);v:=u+epsi;
      end;
writeln;
writeln(u:4:2, ' est une valeur approchée de L(',a:0:0,') à ',epsi,' près');
end.
```

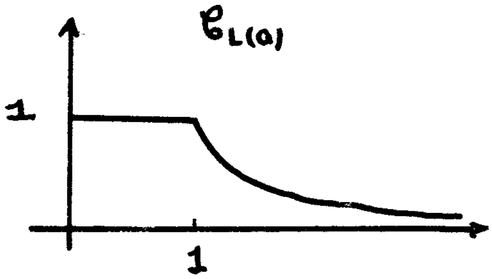
```
Donnez la valeur de a. a=2

0.20 est une valeur approchée de L(2) à  1.0000000000E-02 près

Donnez la valeur de a. a=4

0.02 est une valeur approchée de L(4) à  1.0000000000E-02 près
```

Q4 $\forall a\in]0,1]$, $L(a)=1$. $\lim\limits_{a\to+\infty} L(a)=0$.



Soit $(a_1,a_2)\in[1,+\infty[^2$, $a_1\leq a_2$.

$\hat\varphi(a_1)\leq\hat\varphi(a_2)$ car $\hat\varphi$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

or $0\leq a_2e^{-a_2}\leq a_1e^{-a_1}\leq\frac{1}{e}$ et φ^{-1} est croissante sur $[0,\frac{1}{e}]$;

donc $0\leq\varphi^{-1}(a_2e^{-a_2})\leq\varphi^{-1}(a_1e^{-a_1})$ et $0<\frac{1}{a_2}<\frac{1}{a_1}$. Par produit :

$L(a_2)=r(a_2)=\frac{1}{a_2}\varphi^{-1}(a_2e^{-a_2})\leq\frac{1}{a_1}\varphi^{-1}(a_1e^{-a_1})=r(a_1)=L(a_1)$; L est décroissante sur $[1,+\infty[$.

PARTIE II

Q1 Loi de la variable aléatoire N_1

Dans toute la suite $q = 1-p$.

a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Si $k>n$: $p(N_1=k/D=n)=0$.

Supposons : $k \leq n$: $p(N_1=k/D=n) = p(B_1+B_2+\dots+B_n=k)$; or $B_1+B_2+\dots+B_n$ suit une loi binômiale de paramètres n et p car $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

Ainsi $p(N_1=k/D=n) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(N_1=k/D=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ C_n^k p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \end{cases}$

ou $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_1/D=n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

b) Le système complet (ou quasi-complet ...) d'événements $(\{D=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et la formule des probabilités totales donnent alors :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(N_1=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(N_1=k/D=n)p(D=n) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_n^k p^k q^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(N_1=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^i}{i!}$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(N_1=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda(1-q)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

Ainsi $N_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Q2 Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

a) Notons H l'événement la file d'attente au guichet s'achève.
Si H est réalisé il existe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que le nombre de personnes de la $k_0^{\text{ème}}$ vague soit 0 donc tel que $\{N_{k_0}=0\}$ soit réalisé. Par conséquent si H est réalisé alors $\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{N_k=0\}$ est réalisé(e).
Réciproquement si $\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{N_k=0\}$ est réalisé(e) il existe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\{N_{k_0}=0\}$ soit réalisé, ce qui signifie que le nombre de personnes de la $k_0^{\text{ème}}$ vague est 0 donc que la file d'attente s'est achevée et donc que H est réalisé.

Ainsi $H = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{N_k = 0\}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $\{N_k = 0\}$ est réalisé, la $k^{\text{ième}}$ vague est vide donc la $(k+1)^{\text{ième}}$ aussi ;
ainsi $\{N_k = 0\} \subset \{N_{k+1} = 0\}$

La suite $(\{N_k = 0\})_{k \geq 1}$ est croissante.

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p(\{N_k = 0\}) \leq p(\{N_{k+1} = 0\}) = p_{k+1}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p(\{N_k = 0\}) \leq 1$.

la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est donc croissante et majorée par 1 ; elle converge et sa limite L appartient à $[0,1]$... et même à $]0,1]$.

$(p_k)_{k \geq 1}$ est convergente. $L = \lim_{k \to +\infty} p_k$ vérifie $L \leq 1$.

$(\{N_k = 0\})_{k \geq 1}$ est croissante donc le théorème de la limite monotone montre que

$$p(H) = p\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{N_k = 0\}\right) = \lim_{k \to +\infty} p(\{N_k = 0\}) = \lim_{k \to +\infty} p_k = L$$

La probabilité pour que la file d'attente s'achève au bout d'un temps fini est L.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le tout résulte du fait que la $(k+1)^{\text{ième}}$ vague n'est autre que la $k^{\text{ième}}$ vague suivant la première vague !!

Ainsi si la $1^{\text{ère}}$ vague contient une seule personne la probabilité pour que la $(k+1)^{\text{ième}}$ vague soit vide est la même que la probabilité pour que $k^{\text{ième}}$ vague soit vide. Donc $p(N_{k+1} = 0 / N = 1) = p(N_k = 0)$.

Notons que ceci vaut encore pour $k = 0$ car $p(N_1 = 0 / N_1 = 1) = 0$ et $p(N_0 = 0) = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $p(N_{k+1} = 0 / N_1 = 1) = p(N_k = 0)$.

Supposons de nouveau $k \in \mathbb{N}^*$.

Si $j = 0$ $p(N_{k+1} = 0 / N_1 = j) = p(N_{k+1} = 0 / N_1 = 0) = 1 = (p(N_k = 0))^0 = (p(N_k = 0))^j$

Supposons $j \in \mathbb{N}^*$.

Si $\{N_1 = j\}$ est réalisé la première vague contient j personnes $P_1, P_2, \dots, P_j$

chacune de ces j personnes crée des vagues successives.
Notons N_k^i le nombre de personnes de la $k^{ième}$ vague résultant de P_i :
$\{N_{k+1}=0\}$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1,j]\!]$, $\{N_k^i=0\}$ est réalisé.

Ainsi $p(N_{k+1}=0 / N_1=j) = p(\{N_k^1=0\} \cap \{N_k^2=0\} \cap \dots \cap \{N_k^j=0\})$

Il vient alors par indépendance :

$p(N_{k+1}=0/N_1=j) = \prod_{i=1}^{j} p(N_k^i=0)$ or $p(N_k^i=0) = p(N_k=0)$.

Par conséquent $p(N_{k+1}=0 / N_1=j) = (p(N_k=0))^j$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}$, $p(N_{k+1}=0/N_1=j) = (p(N_k=0))^j$

ceci vaut encore pour $k=0$ et j dans $\mathbb{N}^*$ ... et pour $k=j=0$ en convenant que $0^0=1$!

donc $\underline{\underline{\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2,\ p(N_{k+1}=0 / N_1=j) = (p(N_k=0))^j.}}$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales donne :

$p(N_{k+1}=0) = \sum_{j=0}^{+\infty} p(N_{k+1}=0/N_1=j)\, p(N_1=j)$. Rappelons que $N_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (p(N_k=0))^j \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p} = e^{(\lambda p) p(N_k=0)} e^{-\lambda p} = e^{(\lambda p)(p(N_k=0)-1)}$.

$p_{k+1} = e^{(\lambda p)(p_k-1)}$.

si $k=0$: $p_1 = p(N_1=0) = e^{-\lambda p} = e^{(\lambda p)(p_0-1)}$

donc $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ p_{k+1} = e^{\lambda p(p_k-1)} \text{ et } p_0=0.}}$

Comme $\lambda p > 0$ en posant $a=\lambda p$ nous $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = u_k$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim_{k \to +\infty} p_k = L(\lambda p).}}$

La probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est $L(\lambda p)$.

Rappelons que si $a \in]0,1]$, $L(a) = 1$ et si $a \in]1,+\infty[$, $L(a) < 1$.

Par conséquent il est presque certain que la file d'attente s'achève au bout d'un temps fini si et seulement si $\lambda p \leq 1$.

d) Rappelons que $E(D) = \lambda$

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$
$p = \frac{1}{2}$	$L = 1$	$L = 1$	$L \simeq 0,20$	$L \simeq 0,02$
$p = \frac{1}{4}$	$L = 1$	$L = 1$	$L = 1$	$L \simeq 0,20$

Q3 Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variance aléatoire N_k.

a) Si $i = 0$ la loi de la durée de service des i clients (!) de la $k^{ième}$ vague est celle de la variable certaine nulle.

Supposons $i \in \mathbb{N}^*$. Notons D_k^j la durée de service du $j^{ème}$ client de la $k^{ième}$ vague. $D_k^j \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

$D_k^1, D_k^2, \dots, D_k^i$ étant indépendantes : $D_k^1 + D_k^2 + \dots + D_k^i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda i)$.

Ainsi si $\{N_k = i\}$ est réalisé la durée de service de i clients de la $k^{ième}$ vague suit une loi de Poisson de paramètre λi

Un raisonnement analogue à celui de Q1 montre alors que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad N_{k+1} / N_k = i \hookrightarrow \mathcal{B}(\lambda i p)$$

$$\text{Si } i = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \ P(N_{k+1} = j / N_k = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

On a alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(N_{k+1} / N_k = i) = \lambda i p$ et $E(N_{k+1} / N_k = 0) = 0$.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(N_{k+1} / N_k = i) = \lambda i p$.

b) $E(N_k) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\,p(N_k=i) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty} p(N_k=i)(\lambda p i) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{k=0}^{+\infty} p(N_k=i)E(N_{k+1}/N_k=i)$

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{k=0}^{+\infty} p(N_k=i)\,E(N_{k+1}/N_k=i).$$

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(p(N_k=i)\sum_{j=0}^{+\infty} j\ p(N_{k+1}=j/N_k=i)\right)$$

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(N_{k+1}=j/N_k=i)\,p(N_k=i)\right)$$

Puisqu'il est licite de permuter les deux Σ on obtient

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} j\,p(N_{k+1}=j/N_k=i)\,p(N_k=i)\right) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(j\sum_{i=0}^{+\infty} p(N_{k+1}=j/N_k=i)\,p(N_k=i)\right)$$

Donc $E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(N_{k+1}=j)$ d'après la formule des probabilités totales.

Ainsi $\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(N_{k+1}=j)$ existe et vaut $(\lambda p)E(N_k)$.

La série de terme général $j\,p(N_{k+1}=j)$ est donc convergente et même absolument convergente car à termes positifs.

Donc $E(N_{k+1})$ existe et vaut $(\lambda p)E(N_k)$.

Si $E(N_k)$ existe : $E(N_{k+1})$ existe et $E(N_{k+1}) = (\lambda p)E(N_k)$.

c) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(N_k)$ existe et vaut $(\lambda p)^k$

C'est clair pour $k=0$ car $N_0 = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$E(N_k)$ existe et vaut $(\lambda p)^k$; d'après c) $E(N_{k+1})$ existe et vaut

$(\lambda p)E(N_k) = (\lambda p)(\lambda p)^k = (\lambda p)^{k+1}$... ce qui achève la récurrence.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $E(N_k)$ existe et vaut $(\lambda p)^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons T_n le nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n^{e} vague inclus.

$T_n = N_0 + N_1 + \dots + N_n$

- T_n possède une espérance car $N_0, N_1, \dots, N_n$ en possède une et :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n} E(N_k) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p)^k$$

si $\lambda p = 1$: $E(T_n) = n+1$

si $\lambda p \neq 1$: $E(T_n) = \dfrac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p}$

e) si $\lambda p < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = \dfrac{1}{1-\lambda p}$

si $\lambda p \geqslant 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = +\infty$

Dans le cas où $\lambda p < 1$ on peut considérer que $\dfrac{1}{1-\lambda p}$ représente le nombre moyen de clients qui se présenteront au guichet.

Pour $p = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 1$ $\dfrac{1}{1-\lambda p} = 2$

Pour $p = \frac{1}{4}$ et $\lambda = 1$ $\dfrac{1}{1-\lambda p} = \dfrac{4}{3}$

Pour $p = \frac{1}{4}$ et $\lambda = 2$ $\dfrac{1}{1-\lambda p} = 2$

Ceci achève le sujet de la voie ECO.

Notons que ce sujet reprend les idées de ESSEC 86 ; on s'intéressait à l'époque à l'extinction de la descendance d'un individu d'une population donnée. Très beau sujet de probabilité, sans boule mais qui fait quand même les hauler ... apparemment pas là où il fallait.

Q4 Appendice : le théorème de Fubini sur les séries doubles $\sum\sum v_{ij}$

a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{q} v_{ij} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij} = A_i$ par positivité des v_{ij}.

donc $\sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q} v_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{p} A_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$ par positivité des A_i.

Ainsi $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{i=0}^{p} v_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q} v_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right)$.

Fixons j dans $\mathbb{N}$. $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{ij} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} v_{ik} = A_i$.

La convergence de la série de terme général A_i et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $v_{\underline{i}j}$ est convergente.

Ainsi $B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}$ existe.

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{i=0}^{p} v_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right)$. En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{q} B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right)$.

Ainsi la série de terme général B_j est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette série est convergente ; en faisant tendre q vers $+\infty$ dans la dernière inégalité on obtient $\sum_{j=0}^{+\infty} B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}$.

La série de terme général B_j converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}$

b) En permutant les hypothèses portant sur A_i et B_j on obtient :

si les séries définissant B_j convergent et si la série de terme général B_j converge

1) A_i existe pour tout $i \in \mathbb{N}$ 2) la série de terme général A_i converge

3) $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}\right)$.

Résumons $\sum_{i=0}^{+\infty}(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij})$ existe si et seulement si $\sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij})$ existe et en cas d'existence ces deux quantités sont égales.

Exercice de contrôle .. Montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty}(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij})$ existe si et seulement si :

$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \sum_{i=0}^{p}(\sum_{j=0}^{q} v_{ij}) \leq M$.

c) $E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i)E(Y/X=i)$ dès que $E(Y)$ existe ou dès que

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E(Y/X=i)$ existe

et

- La série de terme général $p(X=i)E(Y/X=i)$ converge.

* Supposons que $E(Y)$ existe. Alors $\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(Y=j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} j\,p(Y=j/X=i)p(X=i)$ existe.

D'après b) on a alors l'existence $A_i = E(Y/X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(Y=j/X=i)p(X=i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,

la convergence de la série de terme général A_i et l'égalité $E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E(Y/X=i)$ existe et $E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)\,p(X=i)$

Supposons maintenant que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E(Y/X=i)$ existe et que la série de terme général $E(Y/X=i)p(X=i)$ converge.

Alors $\sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)\,p(X=i) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(Y=j/X=i)p(X=i)$ existe.

D'après b) $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} j\,p(Y=j/X=i)p(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(Y=j)$ existe et vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)p(X=i)$

Formule des probabilités totales

Alors $\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)p(X=i)$.

La série de terme général $j\,p(Y=j)$ est convergente et même absolument convergente ($j\,p(Y=j) \geq 0$)

Donc $E(Y)$ existe et vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)p(X=i)$.

$\underline{\underline{E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} E(Y/X=i)p(X=i)}}$ dès que ou $E(Y)$ existe ou (pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E(Y/X=i)$ existe et la série de terme général $E(Y/X=i)p(X=i)$ converge).