Preliminaires: Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

1) $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ d'où:

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{c=1}^{p} \left( \sum_{d=1}^{n} a_{cd}b_{dc} \right), \quad \text{Tr}(AB) = \sum_{c=1}^{p} \left( \sum_{d=1}^{n} a_{cd}b_{dc} \right) = \sum_{d=1}^{n} \left( \sum_{c=1}^{p} b_{dc}a_{cd} \right) = \text{Tr}(BA)$$

D'où $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. 

2) $\eta$ et $\eta'$ sont semblables d'où il y a une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que: $P^{-1}\eta P = \eta'$. 

$$\text{Tr}(\eta) = \text{Tr} \left( (P^{-1}\eta P) \right) = \text{Tr} \left( \eta (P^t P) \right) = \text{Tr} \left( P (P^t P) \right) = \text{Tr} \left( PP^t P \right) = \text{Tr} (PP^t)$$

D'où $\text{Tr}(\eta) = \text{Tr}(\eta')$.

3) Si $\eta$ et $\eta'$ sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\text{Tr}(\eta) = \text{Tr}(\eta')$.

Partie I: Etude des éléments de l'ensemble $T(E)$

9) 1) soit $x$ un élémt.

$\nu$-linéaire orthogonale à $x$ si $\forall \omega \in \nu(x), \langle \omega, x \rangle = 0$.

$\nu$-linéaire orthogonale à $x$ si $\nu(x) = \text{vect}(x)$.

Pour tout $v$ appartenant à $E$, l'unique norme linéaire $\lambda(v)$ tel que $\nu = \lambda(v) x_n$. Pour exemple $
u = \text{vect}(x) 

2) $\nu$ est un noyau de $\omega$ si $\forall \omega \in \nu(v), \langle \omega, x \rangle = 0$.

$\nu \in (\text{vect}(x))^2$. Ainsi $E = \text{vect}(x) + x$ et même $E = \text{vect}(x) + x$ !

Nan c'est pas la case.

D'apônt: $\text{vect}(x) + x \in E$.

Réciproquement soit $v$ un élément de $E$. $v = \lambda(v) x + (\nu - \lambda(v)) x$. Car $\nu(v) = \text{vect}(x)$ et $\nu - \lambda(v)$ est orthogonal à $x$ d'après $x$. Ainsi $v = \text{vect}(x) + x$ pour certain $E \in \text{vect}(x) + x$.

Finalement: $E = \text{vect}(x) + x$. Notion que $\omega$ comme et d'ici.

Soit $\omega \in \text{vect}(x) + x$. Enfin, $\omega = \lambda \omega$ et $\omega$ est orthogonal à $x$ car et orthogonal à $x$.

Ainsi $\langle \omega, x \rangle = 0$; donc $\omega = \lambda x = \lambda x_2$. Et alors seul cas $\lambda x_2 = 0$, il n'est pas. Ainsi $\omega = 0$. 


Lemme 2.1

\( \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x = \langle x, x \rangle \lambda x \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)

\( \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \tau = \lambda \tau \)
b) \( Sp(u_k) = \{ 0, \text{dim} u_k \} \)

\[ 1g(u_k) \leq 3 \text{ et } u_k \neq 0 \text{ donc } 1g(u_k) = 3 \text{ et ainsi dim } K u_k = p-1. \]

Par conséquent, \( SEP(u_k, 0) = p-1 \) et donc nécessairement \( dim \text{ SEP}(u_k, 11k^2) = 1. \)

\[ \text{Vérifier } u_k(t) = \langle k, t \rangle \Rightarrow k = 0, u = 0 \text{ et } x \in \text{ SEP}(u_k, 0) \quad \Rightarrow \quad \text{dim } k = p-1 = \text{ dim } \text{ SEP}(u_k, 0); \quad \text{SEP}(u_k, 0) = X. \]

\[ u_k(x) = \langle k, k \rangle = 11k^2 = 11k^2 x \quad \Rightarrow \quad x \in \text{ SEP}(u_k, 11k^2) \text{. Comme } k \text{ n'est pas nul et que } \text{SEP}(u_k, 11k^2) \text{ est une droite vectorielle : } \text{SEP}(u_k, 11k^2) = \text{Vect}(k). \]

c) Remarquons que le vecteur \( B = (x, e_1, \ldots, e_p) \) précédente.

\[ (f \circ u_k)(x) = \begin{cases} 11k^2 x & \text{si } x = 11k^2 \left[ \lambda f(x) \right] + (x-11k^2) \end{cases} \]

la composante du vecteur \((f \circ u_k)(x)\) relative au premier vecteur de \( B \) et

\[ 11k^2 \lambda f(x) \quad \text{avec} \quad 11k^2 \left[ \lambda f(x) \right] \in \mathbb{C}^{d n} e_{x} \quad (e_{q}, e_{r}, \ldots, e_{p}). \]

Cette composante est encore : \( 11k^2 \left[ \frac{f(x)}{11k^2} \right] = \left[ f(x) \right] \).

Vérifions \( (f \circ u_k)(x) = f(11k^2 x) = 0 \)

Pour tout \( i \) dans \( \mathbb{C}^{d n} \), la composante de \((f \circ u_k)(x)\) sur le vecteur \( e_i \) de \( B \) est : \( (f \circ u_k)(x) = 0 \)

Ainsi la trace de \((f \circ u_k)\) est \( (f(x), x) \).

\[ \text{Q3 a) } \text{Im } u = \text{Vect}(x). \text{ Si } u(x) \in \text{Im } u \text{ donc } \exists \lambda \in K, u(x) = \lambda x. \]

Ainsi \( x \neq 0 \) et \( u(x) = \lambda x \). \( x \) est un vecteur propre de \( u \).

\[ u \in K \text{ donc } \langle k, u(x) \rangle = 0; \quad \langle x, x \rangle = 0; \quad j \langle 11k^2 \rangle = 0. \]

Ainsi \( y > 0 \) car \( 11k^2 > 0 \). Il est positif.

\[ b) \text{Posons d'abord qué : } x \in \text{ker } u. \text{ Soit } t \text{ un élément de } x. \begin{cases} x \neq 0 \text{ et } t \neq 0 \text{ et } z \neq 0 \text{ et } 3 \text{ de } K \text{ \text{Et } u(z) = 0.} \end{cases} \]

\[ \langle u(t), x \rangle = \langle t, u(x) \rangle = \langle t, \lambda x \rangle = \lambda \langle t, x \rangle = 0. \]
\[ V \in E, \quad \langle u(t), v \rangle = 0. \quad \text{Dans} \quad u(t) \in E^t, \quad u(t) = 0_E; \quad \text{téléau.} \]

\[ \text{Ainsi} \quad V \in E, \quad \langle u(t), v \rangle = 0. \quad \text{Dans} \quad u(t) \in E^t, \quad u(t) = 0_E; \quad \text{téléau.} \]

\[ \text{La détermination est faite.} \quad \text{La solution est unique.} \]

\[ \text{Soit} \quad u \in E \text{ de } E. \quad \langle u, v \rangle = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}. \]

\[ u - \langle u, v \rangle v \text{ est} \quad u - \langle u, v \rangle v = 0. \]

\[ \text{Ainsi} \quad u(t) = \lambda(t) u(x) + u(\lambda^{-1}(x)) = \lambda(t) u(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\| \|v\|} u. \]

\[ V \in E, \quad u(v) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\| \|v\|} u. \]

\[ \text{Posons} \quad y = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\| \|v\|} u. \quad y \in E \text{ et } V \in E, \quad u(v) = \langle y, v \rangle u = u(y(v)). \]

\[ \text{Ainsi} \quad \exists y \in E, \quad u = u(y); \quad \text{mieux} \quad \exists y \in E \text{ telle que} \quad u = u(y). \]

\[ \Delta \quad \text{Attention ici car l'application est un : que je noterais } \phi, \text{ n'est pas linéaire ne serait-ce que parce que } T(E) \text{n'est pas un espace vectoriel !} \]

\[ \text{Observons que } \phi \text{ est une application de } E \text{ dans } T(E) \text{ d'après } \phi \text{ est par que } u_0 = a_0(t) T(t) ! \quad \text{soit } x \in E \text{ et } 0_E, \quad V \in E, \quad u(x) = \langle x, v \rangle u(x) = \langle x, v \rangle \bar{u} = u(-x) \]

\[ \text{Ainsi} \quad u(x) = u(-x) \quad \text{et } \quad -x = 0_E. \]

\[ \text{Donc} \quad \phi(x) = \phi(-x) \quad \text{avec } \quad -x = 0_E. \quad \phi \text{ n'est pas injective.} \]

\[ \text{N'oubliez que } \phi \text{ est injective, soit } u \text{ un élément quelconque de } T(E). \]

\[ \text{N'oubliez que : } \exists y \in E, \quad \phi(y) = u \text{ ou } u(y) = u \]

\[ \text{Si } u \text{ n'est pas nul c'est dû à l'affaire de } T(t) \text{ et } \text{n'oubliez pas que } y \in E \text{ est l'affaire.} \]

\[ \text{Ainsi} \quad V \in T(E), \exists y \in E, \quad \phi(y) = u. \quad \phi \text{ est injective.} \]

\[ \text{Exercice :} \quad \text{n'oubliez que : } \langle v(x), v' \rangle \in E^t, \phi(x) = \phi(t) \Rightarrow x = x \text{ et } x = -x \ldots \text{ many variations.} \]
Partie II Approximation des éléments de $s(E)$
par les éléments de $T(E)$.

(1) a) Rappelons que $Tr : \mathbb{P}_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

Ainsi $v(a,b) \in \mathbb{P}_0(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{E}$, $Tr(aA + b) = aTr(A) + Tr(b)$.

Rappelons que: $v(f,g) \in \mathcal{E}$, $v \in \mathcal{E}$, $Tr(\lambda f + g) = \lambda Tr(f) + Tr(g)$.

Notons que $[\cdot, \cdot]$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$

→ $[\cdot, \cdot]$ est une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ (1)

→ $\text{diag}(f,g,h) \in \mathcal{E}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $[fg, gh] = Tr[(fg)(gh)] = Tr[(f, g + g, h)] = \lambda Tr(fg) + Tr(gh) = \lambda [f, g] + [g, h]$ (2)
- $[f, g] = Tr(fo) = Tr(go) = [g, f]$ (3)

Ainsi:

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Posons $A = (a_{ij}) = \mathbf{P}_0(f)$.

- $[f, g] = Tr(fo) = Tr(a^2) = \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\mathcal{U}} a_{ik} a_{kj}$.

- $\mathcal{B}$ est symétrique et la base $\mathcal{B}$ est orthogonale ; notons $v(i, j) \in \mathcal{B}, F_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$[f, g] = \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\mathcal{U}} q_{ik} a_{ij} a_{kj} = \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\mathcal{U}} q_{ik} a_{ik} = \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\mathcal{U}} q_{ik}^2 \Rightarrow 0$. $[f, g] \Rightarrow 0$ (4)

Supposons $[f, g] = 0$, alors $\left| \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\mathcal{U}} q_{ik}^2 = 0 \right| \forall v(i, j) \in \mathcal{B}, F_{ij}$, $q_{ik} = 0$.

Ainsi $v(i, k) \in \mathcal{B}, F_{ik}$, $q_{ik} = 0$. $A = 0_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$ donc $f = 0_{\mathcal{E}(\mathbb{E})}$.

$\forall v \in s(E), [f, f] = 0 \Rightarrow f = 0_{s(E)}$ (5)

(1), (2), (3), (4) et (5) montrent que $[\cdot, \cdot]$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. 

b) $N^1(f - u_k) = N^1(f) - 2[f, u_k] + N^1(u_k) = N^1(f) - 2Tr(fou_k) + Tr(u_kou_k)$.

Si $k$ n'est pas nul, 2 $\neq 0$ faisons $Tr(fou_k) = \langle f, x \rangle$ et $Tr(u_kou_k) = \|x\|^4$ et

- $N^1(f - u_k) = N^1(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4$.

Si $k = 0$, $N^1(f - u_k) = N^1(f) = N^1(f) - 2\langle \delta, f(x) \rangle + \|\delta\|^2$. $\delta u_k = 0$.$\delta u_k = 0$.
Finalement, \( N^2(x_{-u}) = N^2(y) - 2 \langle x, y \rangle + 11x II^4 \) pour \( y \in E \) et \( u \in T(E) \).

#### a) Soit \( y \in E \).

\[
\begin{align*}
F(x+ty) &= N^2(x) - 2 \langle x, y \rangle + 11x II^4 \\
F(x) &= N^2(x) - 2 \langle x, f(x) \rangle - 2 \langle y, f(x) \rangle - 2t^2 \langle y, f(y) \rangle + (11x II^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^4 II^4)^2 \text{Nott}ur \text{ que } \langle y, f(x) \rangle = \langle x, f(y) \rangle \text{ car } f \text{ est préhameque. N'oublions pas que } II^4 y = 1.
\end{align*}
\]

Ainsi \( F(x) = N^2(x) - 2 \langle x, f(x) \rangle - 4t \langle y, f(x) \rangle - 2t^2 \langle y, f(y) \rangle + 11x II^4 + 4t^2 \langle x, y \rangle + t^4 + 4 \) \( 11x II^4 + 4 \langle x, y \rangle + 2 \left( 2 \langle x, y \rangle^2 + 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle \right) t^2 + 2 \left( 2 \langle x, y \rangle + 11x II^4 \right) \langle y, f(y) \rangle t^2 + 4 \left( 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle \right) II^4 + II^4 + N^2(y) - 2 \langle x, f(x) \rangle
\]

Ce qui donne une fonction polynôme de degré 4.

#### b) Supposons que \( y \in E \), \( F(x) \leq F(y) \).

Alors \( y \in \text{EIR} \) si \( F(x) \leq F(x+ty) \). \( y \in \text{EIR} \), \( h(0) \leq h(t) \).

\( h \) prend un minimum en 0 et donc \( h'(0) = 0 \). (À noter que l'onde de \( (x,t) \)-polynôme)

#### c) D'ou l'on obtient a) donc sans difficulté \( h'(0) = 4(11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle)
\]

Ainsi \( 4 \left( 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle \right) = 0 \) or \( 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle = 0 \) et cela,

pour tout vecteur unitaire \( y \) de \( E \).

\( \forall y \in E \), \( II^4 y = 1 \) \( \Rightarrow 0 = 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle = <11x II^4 - f(x), y>
\)

Soit \( \langle c_0, c_1, \ldots, c_p \rangle \) une base orthogonale de \( E \).

\( \forall c_0, c_1, \ldots, c_p \in \text{EIR} \), \( \forall \epsilon > 0 \), \( \forall \epsilon > 0 \), \( 11x II^4 - f(y) \) est orthogonal à \( \epsilon \).

Ainsi \( 11x II^4 - f(y) \in \left( \text{Vect}(c_0, c_1, \ldots, c_p) \right)^\perp = E^\perp = \{0 \}_{E} \).

\( \forall \epsilon = 11x II^4 - f(y) \).

#### d) Soit \( y \in E \).

\[
F(x+ty) - F(x) = h(t) - \left( N^2(y) - 2 \langle x, y \rangle + 11x II^4 \right)
\]

\[
= t^4 + 4 \langle x, y \rangle + 2 \left( 2 \langle x, y \rangle + 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle \right) t^2 + 4 \left( 11x II^4 - \langle y, f(y) \rangle \right) t^4 + II^4 + N^2(y) - 2 \langle x, f(x) \rangle - 11x II^4 + II^4 - 2 \langle x, f(y) \rangle.
\]
Supposons que \( F(z) = u(z) \); c'est-à-dire que \( F \) prête une minimisation en \( z \).

Alors on a d'abord \( f(z) = \text{II} \cdot z \).

Soit \( y \) un vecteur unitaire de \( E \).

Veuillez, \( F(z + y) \geq F(z) \) d'abord \( V \in \mathbb{R}^n \), \( t^2 \left[ (t + 2 \langle y, x \rangle)^2 + 2 (\text{II} \cdot z - \langle y, f(z) \rangle) \right] \geq 0 
\)

Par conséquent : \( V \in \mathbb{R}^n \), \( (t + 2 \langle y, x \rangle)^2 + 2 (\text{II} \cdot z - \langle y, f(z) \rangle) \geq 0 \)

Par calculé : \( V \in \mathbb{R}^n \), \( (t + 2 \langle y, x \rangle)^2 + 2 (\text{II} \cdot z - \langle y, f(z) \rangle) \geq 0 \).

En faisant \( t = -2 \langle y, x \rangle \) on obtient : \( \text{II} \cdot z - \langle y, f(z) \rangle \geq 0 \) ou : \( \langle y, f(z) \rangle \leq \text{II} \cdot z \).

Ainsi \( \overline{F(z)} = u(z) \) on a : \( \text{I}(i) \), \( f(z) = \text{II} \cdot z \).

(\text{ii}) pour tout vecteur unitaire \( y \) : \( \langle y, f(z) \rangle \leq \text{II} \cdot z \).

Réciproquement supposons que l'on a (i) et (ii) et montrons que \( F(z) = u(z) \).

Il s'agit de prouver que : \( \forall z \in E, \ F(z) \leq F(y) \) ... au \( y \in E - \{x\}, \ F(z) \leq F(y) \).

Soyons \( y = \frac{1}{\text{II} - z} (z - x) \) et \( t = \text{II} - z \).

Alors \( y \) est un vecteur unitaire, \( E \in \mathbb{R}^n \) et \( z = x + y \).

(i) donne \( f(z) = \text{II} \cdot x \), qui donne comme dans \( y \) de (ii):

\[ F(x + y) - F(x) = t^2 \left[ (t + 2 \langle y, x \rangle)^2 + 2 (\text{II} \cdot y - \langle y, f(z) \rangle) \right] \]

\( \geq 0 \), \( (t + 2 \langle y, x \rangle)^2 + 2 (\text{II} \cdot y - \langle y, f(z) \rangle) \geq 0 \) grâce à (i).

Ainsi \( F(x + y) \geq F(x) \) donc \( F(y) \geq F(x) \).

\( \forall z \in E - \{x\}, \ F(z) \leq F(y) \). \( F \) prête une minimisation en \( z \) ; \( F(z) = u(z) \).

Ainsi \( F(z) = u(z) \iff \text{I}(i) \), \( f(x) = \text{II} \cdot x \\ (\text{ii}) pour tout vecteur unitaire \( y \) : \( \langle y, f(z) \rangle \leq \text{II} \cdot y \).
(9.3) 1) S'atou endomorphisme sylnétique de l'espace vectoriel euclidien E d'où
de part une base \( B = (e_1, e_2, \ldots, e_p) \) de E, orthonormale et continue de deux propres de \( f \).

2) On note \[ N(g) = \left( \begin{array}{c} \lambda_1 g (0) \\ \vdots \\ \lambda_p g (0) \end{array} \right), \quad \Pi(g) = \left( \begin{array}{c} \lambda_1^2 g (0) \\ \vdots \\ \lambda_p^2 g (0) \end{array} \right), \]

et \[ W(g) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 g (0)}. \]

3) D'où y un espace unitaire de \( E \). \( \exists (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p, y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i. \)

\[ \langle y, g(y) \rangle = \sum_{i=1}^{p} y_i (y_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2. \]

\( (e_1, e_2, \ldots, e_p) \) étant une base orthonormale : \[ \langle y, g(y) \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i. \]

\[ \langle y, g(y) \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \lambda_p \| y \|_{11}^2 = \lambda_p \text{ car } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p \text{ et } \| y \|_{11} = 1 \]

De plus : \[ \langle e_p, (g(e_p)) \rangle = \langle e_p, \lambda_p e_p \rangle = \lambda_p \| e_p \|_{11}^2 = \lambda_p. \]

D'où \( y \in E, \| y \|_{11} = 1 \Rightarrow \langle y, g(y) \rangle \leq \lambda_p = \langle e_p, (g(e_p)) \rangle. \]

Ainsi : \( \lambda_p \) est le plus grand élément de \[ \{ \langle y, g(y) \rangle ; y \in E, \| y \|_{11} = 1 \}. \]

Examinons un espace unitaire \( y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \) de \( E \). \[ \langle y, g(y) \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda_p) y_i^2 \]

\( \langle y, g(y) \rangle = \lambda_p \iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \lambda_p \iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_p y_i^2 \iff \sum_{i=1}^{p} (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0. \]

Notons que : \( \forall e \in E, \lambda_p - \lambda_i) y_i^2 \geq 0. \)

\( \forall e \in E, \langle y, g(y) \rangle = \lambda_p \iff \forall e \in E, \lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0. \)

Soit \( \lambda \) le plus petit élément de \( \{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \} \).

\( \forall e \in E, \lambda \leq \lambda_p \iff \forall e \in E, \lambda \leq \lambda_p. \)

\( \langle y, g(y) \rangle = \lambda_p \iff \forall e \in E, (\lambda_p - \lambda_i) y_i^2 = 0 \iff \forall e \in E, \lambda_i = \lambda_p. \)

\( \langle y, g(y) \rangle = \lambda_p \iff y \in \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) \)

Comme \( \forall e \in E, \lambda \leq \lambda_p : \forall e \in E, \langle y, g(y) \rangle = \lambda_p \text{ et } \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) \text{ est contenu dans } \text{SEP}(f, \lambda_p). \) Notons que cette inclusion est une égalité.
Soit \( \lambda \in \mathbb{C} \) un élément de \( E \).

\[ g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_i. \]

\[ \text{SEP}(g, \lambda) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad \text{VEC}(g, \lambda, \mathbb{P}), \quad \text{si} \quad \lambda_0 \neq 0, \quad \text{VEC}(g, \lambda, \mathbb{P}), \quad (\lambda_0 - \lambda_0) \lambda_0 = 0. \]

\[ \text{SEP}(g, \lambda) \quad \Rightarrow \quad \text{VEC}(g, \lambda, \mathbb{P}), \quad \lambda_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad g \in \text{VEC}(e_r, e_r, ..., e_p) \quad \Rightarrow \quad \text{SEP}(g, \lambda) = \text{VEC}(e_{r_1}, ..., e_{r_p}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_0. \]

\[ \text{dans} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle = \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle = \lambda_0 \mathbf{y}. \]

85) a) Supposons \( \lambda_0 \leq 0 \). Supposons \( \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \} = \lambda_0 \leq 0 \).

Alors \( \forall \mathbf{y} \in \mathbb{E}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \Rightarrow \quad \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle \leq 0. \)

b) Supposons \( \text{et} \text{ii}) \Rightarrow \text{et} \text{iii}) \Rightarrow \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle = 0 = \|\mathbf{x}\|^2. \)

dans (i) et (iii) sont définit et ainsi \( F(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \mathbf{y} \).

6) L'équation est supposée être \( \text{et} \text{ii}) ) \Rightarrow \text{et} \text{iii}) \Rightarrow \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle \leq 0 = \|\mathbf{x}\|^2. \)

dans (i) et (iii) sont définit et ainsi \( F(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \mathbf{y} \).

Soit \( \lambda_0 \geq 0 \), soit \( \mathbf{x} \in \mathbb{E} \).

Remarquons que \( \text{Sup} \{ \langle \mathbf{y}, f_{(g)} \rangle ; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{E}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \} = \lambda_0. \)

Ainsi (ii) \( \Rightarrow \lambda_0 \leq \|\mathbf{x}\|^2. \)

\( F(\mathbf{x}) = m(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \text{et} (\text{i}) \text{et} (\text{ii}) \Rightarrow \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{y} \quad \text{et} \quad \lambda_0 \leq \|\mathbf{x}\|^2. \) Notons que \( \lambda_0 > 0 \)

\( F(\mathbf{x}) = m(\mathbf{y}) \Rightarrow \lambda_0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \) et \( \mathbf{x} \) est une valeur propre de \( f \) associée à la valeur propre \( \|\mathbf{x}\|^2 \)

\( \lambda_0 \quad \text{étant la plus grande valeur propre de} \quad f \) \( \text{et} \quad \mathbf{x} \) \( \text{et} \) \text{SEP}(f, \lambda_0) \( \Rightarrow \text{KESEP}(f, \mathbf{x}, \lambda_0) \quad \Rightarrow \text{KESEP}(f, \mathbf{x}, \lambda_0) \quad \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \sqrt{\lambda_0}. \)
Doit \( x \) un élément de \( \mathbb{S} \) de \( \mathbb{P}(\mathbb{S}, \lambda_p) \) tel que : \( \|x\|_1 = \sum \lambda_p \). (de toute évidence un élément critique !)

\[
F(x) = N^2(\mathbb{S}) - 2 \langle x, \lambda_p \rangle + \lambda_p \|x\|^2 = N^2(\mathbb{S}) - 2 \lambda_p \|x\|^2 + \lambda_p^2
\]

\[
F(x) = N^2(\mathbb{S}) - \lambda_p \|x\|^2 = N^2(\mathbb{S}) - \lambda_p \sum_{i=1}^p x_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 - \lambda_p \sum_{i=1}^p \lambda_i^2
\]

Ainsi \( x \in \mathbb{S} \) de \( \mathbb{P}(\mathbb{S}, \lambda_p) \) et \( \forall \lambda \in E \), \( F(x) = \mu(\mathbb{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\|x\|_1 = \sum \lambda_p.
\end{array} \right. \]

#### Q6

a) Pour \( X = \left( \begin{array}{c}
\frac{1}{2} \\
\vdots \\
\frac{1}{2}
\end{array} \right) \) et \( Y = \left( \begin{array}{c}
\frac{1}{2} \\
\vdots \\
\frac{1}{2}
\end{array} \right) = \pi X.
\]

\( \forall \mathbb{E}, \lambda \mathbb{D}, \quad y_i = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j = \sum_{j=1}^p m_{ij} = d . \quad \pi x = x \) et \( x \notin \mathbb{D} \).

b) \( \pi x = \lambda x \) donc : \( \sum_{i=1}^p m_{ij} x_j = \lambda x \).

\[
1 \leq k \leq 1 \quad \Xi \lambda_{k+1} = k \sum_{i=1}^p m_{ij} x_j = \sum_{i=1}^p m_{ij} |x_j| \leq \sum_{i=1}^p m_{ij} = \sum_{i=1}^p m_{ij} = \|x\|_1 \quad (\Pi)
\]

Ainsi \( \|k\|_1 \leq k \) avec \( k_{i+1} = \pi x \) avec \( x \neq \emptyset \).

Supposons \( k = \lambda x \) l'unique vecteur (\( \Pi \))

\[
|k_{i+1}| = \|k\|_1 = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j = |\sum_{j=1}^p m_{ij} |x_j| \leq \sum_{j=1}^p m_{ij} \sum_{j=1}^p |x_j| = |x_1| \sum_{j=1}^p m_{ij} = |\sum_{j=1}^p m_{ij} x_j|
\]

Ainsi : \( |k| \leq \|k\|_1 \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j = \sum_{j=1}^p |m_{ij} x_j| = \sum_{j=1}^p |m_{ij} x_j| \)

\[
\forall \pi x \in \mathbb{S}, \quad k_{i+1} = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j
\]

En particuliers pour tout \( j \) dans \( \{1, \ldots, p\} \), \( m_{1i} x_i, m_{2i} x_i, \ldots, m_{pi} x_i \) tout même vecteur ; donc \( x_1, x_2, \ldots, x_p \) est même vecteur (\( x \in \mathbb{S}, \lambda \mathbb{D}, \quad m_{ij} > 0 \)).

\[
\|k\|_1 = \|k\|_1 = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j = \left| \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^p m_{ij} x_j
\]

\[
\forall \pi x \in \mathbb{S}, \quad |k|_{\leq 0} \quad (\Xi)
\]

\[\]
\[ \sum_{j=1}^{p} m_{ij} (1x_j - 1x_i) = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} |1x_j| - \left( \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \right) |1x_i| = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} (|1x_j| - |1x_i|) \]

\( a \) a aussi : \( \sum_{j=1}^{p} m_{ij} (|1x_i| - |1x_j|) = 0 \) et \( \forall j \in [1, p], m_{ij} (|1x_i| - |1x_j|) > 0 \).

\( \text{D'où} \quad \forall j \in [1, p], m_{ij} (|1x_i| - |1x_j|) = 0 \) et \( m_{ij} > 0 \).

\( \text{Ainsi} \quad \forall j \in [1, p], |1x_i| - |1x_j| = 0. \quad \forall j \in [1, p], |1x_j| = |x_i|. \)

\( \forall j \in [1, p], \mathcal{E} x_j = \mathcal{E} x_i. \quad \forall j \in [1, p], x_j = x_i. \)

\( \text{Ainsi} \quad x = x_i \left( \frac{1}{3} \right). \)

\( \mathcal{E} x \mathcal{E} x = \mathcal{E} x \mathcal{E} \left( \frac{1}{3} \right) = \mathcal{E} x \left( \frac{1}{3} \right) = x; \quad (\lambda - 1) x = 0 \) et \( x \neq 0. \quad \lambda = 3. \)

\( \text{Nous avons aussi dédui que} \quad \forall x \in \mathbb{F}_p, x \neq 0 \) et \( \mathcal{E} x \mathcal{E} x = x \Rightarrow x \in \text{Vect}(\left\{ \frac{1}{3} \right\}). \)

\( \text{D'où} \quad \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) \supset \text{Vect}(\left\{ \frac{1}{3} \right\}). \) (Ceci donne aussi \( \dim \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) = 1. \)

\( \text{Comme aussi} \quad \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) \geq 2 \quad (\text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) \neq \{0\} \Rightarrow \dim \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) = 1). \)

\( \text{Puisque} \quad \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) = \text{Vect}(\left\{ \frac{1}{3} \right\}). \)

\( \text{Ce qui précède montre que} \quad \lambda_p = 3 ; \text{en effet} \quad \forall x \text{ valeur propre de} \quad \lambda \text{et toute valeur propre de} \quad \lambda \text{a une valeur absolue inférieure ou égale à} \quad 1. \)

\( \text{Puisque} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p \leq \lambda_1 < \lambda_p = 1 \) car le premier axe propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

\( \text{Ainsi} \quad \forall x \in \mathbb{F}_p^p, \text{F}(x) = m(\xi) \iff \begin{cases} \| x \| = \sqrt{\lambda_1} = 1 \quad \text{et} \\ x \in \text{SEP}(\mathbb{F}_p, \lambda_1) = \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 1) \end{cases} \)

\( \text{Notez que} \quad \| (x_1, x_2, \ldots, x_p) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} = \sqrt{\lambda_1}. \)

\( \text{Ainsi les vecteurs unitaires de} \quad \text{SEP}(\mathbb{F}_p, 3) \quad \text{sont} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (3, 2, 0, \ldots) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (3, 2, \ldots). \)

\( \forall x \in \mathbb{F}_p^p, \text{F}(x) = m(\xi) \iff x = \frac{1}{\lambda_1} (3, 2, \ldots) \quad \text{ou} \quad x = - \frac{1}{\lambda_1} (3, 2, \ldots). \)
doit u en dépendant de \( T(E) \). Soit \( E \), \( u = u_k \).

\[
\begin{align*}
\text{si } f \in \mathbb{N}^d \quad \Rightarrow \quad m(f) = N^d(f - u_k) \quad \Rightarrow \quad F(u) = m(f) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\|f\|} \quad (1, 2, \ldots, 3).
\end{align*}
\]

Posons : \( a = \frac{1}{\|f\|} \quad (1, 2, \ldots, 3) \) et notons que : \( x = \frac{1}{\|f\|} \quad (1, 2, \ldots, 3) \Rightarrow u_k = u_0 \), c'est-à-dire que \( x = a \) ou \( u = -a \) \( \Leftrightarrow \) \( u_k = u_0 \).

\( \square \) c'est-à-dire que \( u_k = u_0 \).

Supposons \( u_k = u_0 \). Veuillez, \( \langle x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = a \). En posant \( y = a \) on obtient :

\[
\langle x, a \rangle = \langle a, a \rangle = a = \|a\|^2 a = a.
\]

Comme \( a \) n'est pas nul, \( \langle x, a \rangle \) est différent de 0. Donc : \( x = a \) avec \( a = \frac{1}{\|f\|} \quad (1, 2, \ldots, d) \).

Alors, \( \forall y \in E, \langle x, y \rangle = a \).

\[
\forall y \in E, \langle x, y \rangle = a = \langle 0, y \rangle = a.
\]

\[
\forall y \in E, \langle x, y \rangle = a = \langle 0, y \rangle = a.
\]

\( \iff \langle x, a \rangle = \langle a, a \rangle = a = \|a\|^2 a = a. \)

Ainsi \( m(f) = N^d(f - u) \quad \Rightarrow \quad x = a \) ou \( u = -a \) \( \Leftrightarrow \) \( u_k = u_0 \).

D'ordre à orthogonale à \( T(E) \) tel que \( m(f) = N^d(f - u) \) est \( u_k = \frac{1}{\|f\|} (1, 3, \ldots, 1) \).

\[
\text{doit } y = (y_1, y_2, \ldots, y_3) \text{ un élément de } \mathbb{R}^d. \text{ Rappelons que l'a a par} \ a = \frac{1}{\|f\|} (1, 2, \ldots, 3).
\]

\[
\frac{1}{\|f\|} (1, 2, \ldots, 3) \quad (y_1, y_2, \ldots, y_3) = \langle y, a \rangle = \frac{1}{\|f\|} (y_1 + y_2 + \ldots + y_3) = \frac{1}{\|f\|} (1, 2, \ldots, 3)
\]

\[
\frac{1}{\|f\|} (1, 2, \ldots, 3) \quad (y_1, y_2, \ldots, y_3) = \frac{1}{\|f\|} (y_1 + y_2 + \ldots + y_3, y_1 + y_2 + \ldots + y_3, \ldots, y_1 + y_2 + \ldots + y_3)
\]

Ainsi la matrice de \( u_k \), dans la base canonique est

\[
\frac{1}{\|f\|} \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\]

Posons \( D = \text{vect}(a) \).

\( E = D \oplus D \). Soit \( y \in E \). \( y = y_1 y_2 \text{ avec } y_1 \in D, y_2 \in D \). D'où \( y \in E \), \( y_1 = \text{vect}(a). \)

\[
\frac{1}{\|f\|} (1, 2, \ldots, 3) \quad (y_1, y_2, \ldots, y_3) = \frac{1}{\|f\|} (y_1 + y_2 + \ldots + y_3, y_1 + y_2 + \ldots + y_3, \ldots, y_1 + y_2 + \ldots + y_3)
\]

Ainsi \( u_k \) est la projection orthogonale de \( E \) sur \( D = \text{vect}(a) \).

Ainsi la matrice précédente est la matrice dans la base canonique de \( E = \mathbb{R}^d \) de la projection orthogonale de \( E \) sur \( D = \text{vect}(a) \).