Préliminaire. Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

a) $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux éléments de $M_p(\mathbb{R})$ donc :

$$\underline{\underline{Tr(AB)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}\right)}} \quad . \quad Tr(AB)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki}a_{ik}\right)=Tr(BA)$$

donc $\underline{\underline{Tr(AB)=Tr(BA)}}$.

b) M et M' sont semblables donc il existe une matrice inversible P de $M_p(\mathbb{R})$ telle que : $M=P^{-1}M'P$.

$$Tr(M)=Tr(P^{-1}M'P)=Tr((P^{-1}M')P)\overset{a)}{=}Tr(P(P^{-1}M'))=Tr(PP^{-1}M')=Tr(I_pM')$$

donc $Tr(M)=Tr(M')$.

$\underline{\underline{\text{Si } M \text{ et } M' \text{ sont deux matrices semblables de } M_p(\mathbb{R}) :\ Tr(M)=Tr(M').}}$

Partie I : Etude des éléments de l'ensemble T(E)

Q1 a) Soit λ un réel.

$v-\lambda x$ orthogonal à $x \iff 0=\langle v-\lambda x,x\rangle=\langle v,x\rangle-\lambda\langle x,x\rangle=\langle v,x\rangle-\lambda\|x\|^2$

$v-\lambda x$ orthogonal à $x \iff \lambda=\dfrac{\langle v,x\rangle}{\|x\|^2}$ $\quad$ ($\|x\|^2\neq 0$ car $x\neq 0_E$).

$\underline{\underline{\text{Pour tout } v \text{ appartenant à } E \text{ l'unique nombre réel } \lambda(v) \text{ tel que } v-\lambda(v)x \text{ soit orthogonal à } x \text{ est} : \dfrac{\langle v,x\rangle}{\|x\|^2}}}$

b) C'est du cours !! $X=\{u\in E \mid \langle t,x\rangle=0\}=\{t\in E\mid \forall y\in Vect(x), \langle t,y\rangle=0\}$

donc $X=(Vect(x))^\perp$. Ainsi $E=Vect(x)\oplus X$ ... et même $E=Vect(x)\overset{\perp}{\oplus} X$!

Mais réinventons la roue.

D'abord : $Vect(x)+X\subset E$.

Réciproquement soit v un élément de E. $v=\lambda(v)x+(v-\lambda(v)x)$. Or $\lambda(v)x\in Vect(x)$ et $v-\lambda(v)x$ est orthogonal à x donc appartient à X. Ainsi $v\in Vect(x)+X$

Par conséquent $E\subset Vect(x)+X$.

Finalement : $E=Vect(x)+X$. Montrons que cette somme est directe.

Soit $t\in Vect(x)\cap X$. $\exists\lambda\in\mathbb{R}, t=\lambda x$ et t appartient à X donc est orthogonal à x

Ainsi $\langle t,x\rangle=0$; donc $0=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2$. λ est alors nul car $\|x\|^2$ ne l'est pas. Ainsi $t=0_E$.

donc $E = \mathrm{Vect}(x) + X$ et $\mathrm{Vect}(x) \cap X = \{0_E\}$. Vect(x) et X sont supplémentaires ... et orthogonaux

(Q2) a) • $x \in E$ et $\forall v \in E$, $\langle x, v\rangle \in \mathbb{R}$; $\forall v \in E$, $u_x(v) = \langle x, v\rangle x \in E$

$\forall (v_1, v_2) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u_x(\lambda v_1 + v_2) = \langle x, \lambda v_1 + v_2\rangle x = (\lambda \langle x, v_1\rangle + \langle x, v_2\rangle) x$

$\forall (v_1, v_2) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u_x(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \langle x, v_1\rangle x + \langle x, v_2\rangle x = \lambda u_x(v_1) + u_x(v_2)$.

u_x est un endomorphisme de E.

• $\forall (v_1, v_2) \in E^2$, $\langle u_x(v_1), v_2\rangle = \left\langle \langle x, v_1\rangle x, v_2 \right\rangle = \langle x, v_1\rangle \langle x, v_2\rangle = \langle x, v_2\rangle \langle v_1, x\rangle$

$\forall (v_1, v_2) \in E^2$, $\langle u_x(v_1), v_2\rangle = \left\langle v_1, \langle x, v_2\rangle x \right\rangle = \langle v_1, u_x(v_2)\rangle$

u_x est symétrique

• $\forall v \in E$, $u_x(v) = \langle x, v\rangle x \in \mathrm{Vect}(x)$; $\mathrm{Im}\, u_x \subset \mathrm{Vect}(x)$.

$\mathrm{rg}\, u_x = \dim \mathrm{Im}\, u_x \leq \dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1$. $\mathrm{rg}\, u_x \leq 1$.

• $\forall v \in E$, $\langle u_x(v), v\rangle = \left\langle \langle x, v\rangle x, v \right\rangle = \langle x, v\rangle \langle x, v\rangle = (\langle x, v\rangle)^2 \geq 0$

$\forall v \in E$, $\langle u_x(v), v\rangle \geq 0$.

Ce qui précède montre que : u_x est un élément de $T(E)$ pour tout x dans $E - \{0_E\}$.

Remarques. - 1. Ceci vaut encore pour $x = 0_E$.

2. Si x n'est pas nul $\mathrm{rg}\, u_x = 1$ ($u_x\left(\frac{1}{\|x\|^2} x\right) = x \neq 0_E$) ...)

Soit $(e_2, \dots, e_p)$ une base de X ($\dim X = p-1$ car $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus X$ et $x \neq 0_E$).

$\mathcal{B} = (x, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E car (x) est une base de Vect(x), $(e_2, \dots, e_p)$ est une base de X et $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus X$.

$e_i \in X$ donc $\langle x, e_i\rangle = 0$

$u_x(x) = \langle x, x\rangle x = \|x\|^2 x$ et $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $u_x(e_i) = \langle x, e_i\rangle x = 0_E$

Ainsi $M_{\mathcal{B}}(u_x) = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Remarque... Il fallait sans doute ici supposer que : $p \geq 2$!

$\mathrm{Tr}(u_x) = \mathrm{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u_x)) = \|x\|^2$. $\mathrm{Tr}(u_x) = \|x\|^2$.

$\mathrm{Tr}(u_x \circ u_x) = \mathrm{Tr}((M_{\mathcal{B}}(u_x))^2) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \|x\|^4 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \|x\|^4$. $\mathrm{Tr}(u_x \circ u_x) = \|x\|^4$.

b) $Sp(u_x) = Sp(M_B(u_x)) = \{0, \|x\|^2\}$

$rg(u_x) \leq 1$ et $u_x \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $rg(u_x) = 1$ et ainsi $\dim Ker\, u_x = p-1$.

Par conséquent $\dim SEP(u_x, 0) = p-1$ et alors nécessairement $\dim SEP(u_x, \|x\|^2) = 1$.

$\forall t \in X$, $u_x(t) = \langle x, t\rangle x = 0.x = 0_E$; $X \subset SEP(u_x, 0)$ et

$\dim X = p-1 = \dim SEP(u_x, 0)$; $SEP(u_x, 0) = X$.

$u_x(x) = \langle x, x\rangle x = \|x\|^2 x$; $x \in SEP(u_x, \|x\|^2)$. Comme x n'est pas nul et que $SEP(u_x, \|x\|^2)$ est une droite vectorielle : $SEP(u_x, \|x\|^2) = Vect(x)$.

c) Reprenons la base $\mathcal{B} = (x, e_2, \ldots, e_p)$ précédente.

$(f \circ u_x)(x) = f(\|x\|^2 x) = \|x\|^2 f(x) = \|x\|^2 [\lambda(f(x))\, x + (f(x) - \lambda(f(x))x)]$

La composante du vecteur $(f \circ u_x)(x)$ relative au premier vecteur de $\mathcal{B}$ est alors $\|x\|^2 \lambda(f(x))$ car $\|x\|^2 [f(x) - \lambda(f(x))x] \in$ ~~X et~~ $Vect(e_2, \ldots, e_p)$.

Cette composante est encore : $\|x\|^2 \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} = \langle f(x), x\rangle$.

$\forall i \in [\![2, p]\!]$, $(f \circ u_x)(e_i) = f(u_x(e_i)) = f(0_E) = 0_E$

Pour tout i dans $[\![2, p]\!]$ la composante de $(f \circ u_x)(e_i)$ sur le vecteur e_i de $\mathcal{B}$ est 0.

Les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$ dans $\mathcal{B}$ sont : $(\langle f(x), x\rangle, 0, \ldots, 0)$

Ainsi la trace de $f \circ u_x$ est $\langle f(x), x\rangle$.

Q3) a) $Im\, u = Vect(x)$. Or $u(x) \in Im\, u$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mu x$.

Ainsi $x \neq 0_E$ et $u(x) = \mu x$. x est un vecteur propre de u.

$u \in T(E)$ donc $\langle x, u(x)\rangle \geq 0$; $\langle x, \mu x\rangle \geq 0$; $\mu \|x\|^2 \geq 0$.

Ainsi $\mu \geq 0$ car $\|x\|^2 > 0$. Donc μ est positive.

b) Montrons d'abord que : $X \subset Ker\, u$. Soit t un élément de X. $\left\{ X = \{v \in E \mid \langle x, v\rangle = 0\} \right.$

Prenons un élément quelconque z de E. $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $u(z) = \gamma x$.

$\langle u(t), z\rangle = \langle t, u(z)\rangle = \langle t, \gamma x\rangle = \gamma \langle t, x\rangle = 0$.

Ainsi $\forall z \in E$, $\langle u(t), z\rangle = 0$. Donc $u(t) \in E^\perp = \{0_E\}$; $u(t) = 0_E$; $t \in \mathrm{Ker}\, u$.
On a donc bien $X \subset \mathrm{Ker}\, u$.
Soit alors v un élément de E. $v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$ avec $\lambda(v) = \dfrac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}$.
$v - \lambda(v)x \in X$ donc $u(v - \lambda(v)x) = 0$.
Ainsi $u(v) = \lambda(v)u(x) + u(v - \lambda(v)x) = \lambda(v)u(x) = \dfrac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}\mu x$.

$$\forall v \in E,\ u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2}\langle x, v\rangle x.$$

c) Nous savons déjà que : $\mu \geq 0$. Supposons $\mu = 0$ alors $\forall v \in E$, $u(v) = 0_E$ et : $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
Ainsi : $\mu > 0$.

$\forall v \in E$, $u(v) = \dfrac{\mu}{\|x\|^2}\langle x, v\rangle x = \left\langle \dfrac{\sqrt{\mu}}{\|x\|}x, v\right\rangle \dfrac{\sqrt{\mu}}{\|x\|}x$.
Posons $y = \dfrac{\sqrt{\mu}}{\|x\|}x$. $y \neq 0_E$ et $\forall v \in E$, $u(v) = \langle y, v\rangle y = u_y(v)$.

Ainsi $\exists y \in E$, $u = u_y$; mieux $\exists y \in E - \{0_E\}$, $u = u_y$.

d) ⚠ Attention ici car l'application en question, que je noterai ϕ, n'est pas linéaire ne serait-ce que parce que $T(E)$ n'est pas un espace vectoriel !

Observons que ϕ est bien une application de E dans $T(E)$ d'après Q2 et parce que $u_{0_E} = 0_{\mathcal{L}(E)} \in T(E)$! Soit $x \in E - \{0_E\}$;
$\forall v \in E$, $u_x(v) = \langle x, v\rangle x = -\langle x, v\rangle(-x) = \langle -x, v\rangle(-x) = u_{-x}(v)$
Ainsi $u_x = u_{-x}$ et $x \neq -x$ car $x \neq 0_E$.
Donc $\phi(x) = \phi(-x)$ avec $x \neq -x$. ϕ n'est pas injective.

Montrons que ϕ est surjective. Soit u un élément quelconque de $T(E)$.
Montrons que : $\exists y \in E$, $\phi(y) = u$ ou $u_y = u$
Si u n'est pas nul c'est clair d'après c). Si u est nul $y = 0_E$ fait l'affaire.
Ainsi $\forall u \in T(E), \exists y \in E$, $\phi(y) = u$. ϕ est surjective.

Exercice : Montrer que : $\forall (x, x') \in E^2$, $\phi(x) = \phi(x') \Leftrightarrow x = x'$ ou $x = -x'$ ... nous y reviendrons.

Partie II Approximation des éléments de $S(E)$ par les éléments de $T(E)$.

Q1 a) Il est clair que $Tr : \begin{array}{l} M_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto Tr(A) \end{array}$ est linéaire.

Ainsi $\forall (A,B) \in M_p(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, Tr(\lambda A+B) = \lambda Tr(A) + Tr(B)$.

Il en résulte que : $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, Tr(\lambda f+g) = \lambda Tr(f) + Tr(g)$.

Montrons que $[\cdot,\cdot]$ est un produit scalaire sur $S(E)$

→ $[\cdot,\cdot]$ est une application de $S(E) \times S(E)$ dans $\mathbb{R}$. (1)

→ Soient $(f,g,h) \in S(E)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $[\lambda f+g, h] = Tr((\lambda f+g)\circ h) = Tr(\lambda f\circ h + g\circ h) = \lambda Tr(f\circ h) + Tr(g\circ h) = \lambda [f,h] + [g,h]$ (2)
- $[f,g] = Tr(f\circ g) \underset{\text{Préliminaire}}{=} Tr(g\circ f) = [g,f]$ (3)
- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Posons $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$[f,f] = Tr(f\circ f) = Tr(A^2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{ki}$.

f étant symétrique et la base $\mathcal{B}$ étant orthonormale : A est symétrique ; donc $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$.

$[f,f] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{ik} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 \geqslant 0$. $[f,f] \geqslant 0$ (4)

Supposons $[f,f] = 0$, alors $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 = 0$ donc $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2, a_{ik}^2 = 0$.

Ainsi $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2, a_{ik} = 0$. $A = 0_{M_p(\mathbb{R})}$ donc $f = 0_{S(E)}$.

$\forall f \in S(E), [f,f] = 0 \Rightarrow f = 0_{S(E)}$ (5)

(1), (2), (3), (4) et (5) montrent que $[\cdot,\cdot]$ est un produit scalaire sur $S(E)$.

b) $N^2(f-u_x) = N^2(f) - 2[f,u_x] + N^2(u_x) = N^2(f) - 2Tr(f\circ u_x) + Tr(u_x \circ u_x)$.

si x n'est pas nul I Q 2 fournit : $Tr(f\circ u_x) = \langle f(x), x\rangle$ et $Tr(u_x\circ u_x) = \|x\|^4$ et

ainsi $N^2(f-u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4$.

Si $x=0$: $N^2(f-u_x) \underset{u_x = 0_{\mathcal{L}(E)}}{=} N^2(f) = N^2(f) - 2\langle 0_E, f(0_E)\rangle + \|0_E\|^4 = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4$.

Finalement $\underline{N^2(f-u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4}$ pour $f \in S(E)$ et $u_x \in T(E)$.

(Q2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$h(t) = F(x+ty) = N^2(f) - 2\langle x+ty, f(x+ty)\rangle + \|x+ty\|^4$

$h(t) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle - 2t\langle y, f(x)\rangle - 2t\langle x, f(y)\rangle - 2t^2\langle y, f(y)\rangle + (\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2)^2$

Notons que : $\langle y, f(x)\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ car f est symétrique. N'oublions pas que $\|y\| = 1$.

Ainsi $h(t) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle - 4t\langle y, f(x)\rangle - 2t^2\langle y, f(y)\rangle + \|x\|^4 + 4t^2(\langle x,y\rangle)^2 + t^4 +$

$4t\|x\|^2\langle x,y\rangle + 2t^2\|x\|^2 + 4t^3\langle x,y\rangle$

$\underline{h(t) = t^4 + 4\langle x,y\rangle t^3 + 2\left(2(\langle x,y\rangle)^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)t^2 + 4\left(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle\right)t}$

$\underline{+ \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle}$

<u>h est donc une fonction polynôme de degré 4.</u>

b) Supposons que $\forall z \in E$, $F(x) \leq F(z)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(x) \leq F(x+ty)$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(0) \leq h(t)$.

h présente un minimum en 0 et donc $\underline{h'(0) = 0}$. (h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car h est polynômiale)

c) Le résultat obtenu en a) donne sans difficulté $h'(0) = 4(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle)$

Ainsi $4(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle) = 0$ ou $\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle = 0$ et ceci

pour tout vecteur unitaire y de E.

$\forall y \in E$, $\|y\| = 1 \Rightarrow 0 = \|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle = \langle \|x\|^2 x - f(x), y\rangle$

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormale de E.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\|e_i\| = 1$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\|x\|^2 x - f(x)$ est orthogonal à e_i

Ainsi $\|x\|^2 x - f(x) \in (\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p))^\perp = E^\perp = \{0_E\}$.

Donc $\underline{f(x) = \|x\|^2 x}$.

d) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$F(x+ty) - F(x) = h(t) - (N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4)$

$= t^4 + 4\langle x,y\rangle t^3 + 2(2(\langle x,y\rangle)^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle)t^2 + 4(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle)t$

$+ \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle - \|x\|^4 + N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle$.

En se rappelant que $f(x) = \|x\|^2 x$ nous obtenons :

$F(x+ty)-F(x) = t^4 + 4\langle x,y\rangle t^3 + 2\left(2(\langle x,y\rangle)^2 + \|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) t^2$ car :

$4\left(\|x\|^2\langle x,y\rangle - \langle y, f(x)\rangle\right) = 4\left(\langle \|x\|^2 x - f(x), y\rangle\right) = 4\langle 0_E, y\rangle = 0.$

Donc $F(x+ty)-F(x) = t^2\left[t^2 + 4\langle x,y\rangle t + 4(\langle x,y\rangle)^2 + 2\|x\|^2 - 2\langle y, f(y)\rangle\right]$

Ainsi : $F(x+ty)-F(x) = t^2\left[(t+2\langle x,y\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\right]$ pour tout réel t.

(Q3) * Supposons que $F(x) = m(f)$; c'est à dire que F présente un minimum en x.

Alors on a d'abord $f(x) = \|x\|^2 x$.

Soit y un vecteur unitaire de E

$\forall t \in \mathbb{R}$, $F(x+ty) \geqslant F(x)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2\left[(t+2\langle y,x\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\right] \geqslant 0$

Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $(t+2\langle y,x\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) \geqslant 0$

Par continuité : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t+2\langle y,x\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) \geqslant 0$.

En faisant $t = -2\langle y,x\rangle$ on obtient : $\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle \geqslant 0$ ou : $\langle y, f(y)\rangle \leqslant \|x\|^2$.

Ainsi si $F(x) = m(f)$ on a : $\begin{cases} \text{(i) } f(x) = \|x\|^2 x \\ \text{(ii) pour tout vecteur unitaire } y : \langle y, f(y)\rangle \leqslant \|x\|^2 \end{cases}$

Réciproquement supposons que l'on a (i) et (ii) et montrons que $F(x) = m(f)$.

Il s'agit de prouver que : $\forall z \in E$, $F(x) \leqslant F(z)$ ... ou $\forall z \in E - \{x\}$, $F(x) \leqslant F(z)$.

Soit $z \in E - \{x\}$. Posons $y = \frac{1}{\|z-x\|}(z-x)$ et $t = \|z-x\|$.

Alors y est un vecteur unitaire, $t \in \mathbb{R}$ et $z = x + ty$.

(i) donne $f(x) = \|x\|^2 x$ qui donne comme dans Q2 d) :

$F(x+ty)-F(x) = t^2\left[(t+2\langle y,x\rangle)^2 + 2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right)\right]$

Or : $t^2 \geqslant 0$, $(t+2\langle y,x\rangle)^2 \geqslant 0$ et $2\left(\|x\|^2 - \langle y, f(y)\rangle\right) \geqslant 0$ grâce à (ii).

Ainsi $F(x+ty) - F(x) \geqslant 0$ donc $F(z) \geqslant F(x)$.

$\forall z \in E - \{x\}$, $F(x) \leqslant F(z)$. F présente un minimum en x, $F(x) = m(f)$.

Ainsi $F(x) = m(f) \iff \begin{cases} \text{(i) } f(x) = \|x\|^2 x \\ \text{et} \\ \text{(ii) pour tout vecteur unitaire } y : \langle y, f(y)\rangle \leqslant \|x\|^2. \end{cases}$

(Q 4) a) f est un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien E donc il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ de E, orthonormale et constituée de vecteurs propres de f.

b) $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda_p\end{pmatrix}$. $M_{\mathcal{B}}(f^2)=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & (0)\\ & \lambda_2^2 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda_p^2\end{pmatrix}$.

$N(f)=\sqrt{[f,f]}=\sqrt{Tr(f\circ f)}=\sqrt{Tr(f^2)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2}$. $\underline{\underline{N(f)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2}}}$.

c) Soit y un vecteur unitaire de E. $\exists(y_1,y_2,\dots,y_p)\in\mathbb{R}^p$, $y=\sum_{i=1}^{p}y_ie_i$.

$f(y)=\sum_{i=1}^{p}y_i\,f(e_i)=\sum_{i=1}^{p}y_i\lambda_ie_i$.

$(e_1,e_2,\dots,e_p)$ étant une base orthonormale : $\langle y,f(y)\rangle=\sum_{i=1}^{p}y_i(y_i\lambda_i)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iy_i^2$

$\langle y,f(y)\rangle=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iy_i^2\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_py_i^2=\lambda_p\|y\|^2=\lambda_p$ car $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\dots\leq\lambda_p$ et $\|y\|=1$

De plus : $\langle e_p,f(e_p)\rangle=\langle e_p,\lambda_pe_p\rangle=\lambda_p\|e_p\|^2=\lambda_p$.

Donc $\forall y\in E$, $\|y\|=1\Rightarrow\langle y,f(y)\rangle\leq\lambda_p=\langle e_p,f(e_p)\rangle$

Ainsi $\underline{\underline{\lambda_p \text{ est le plus grand élément de } \{\langle y,f(y)\rangle\ ;\ y\in E \text{ et } \|y\|=1\}}}$.

Reprenons un vecteur unitaire $y=\sum_{i=1}^{p}y_ie_i$ de E. $\langle y,f(y)\rangle=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iy_i^2$ et $\sum_{i=1}^{p}y_i^2=1$

$\langle y,f(y)\rangle=\lambda_p\iff\sum_{i=1}^{p}\lambda_iy_i^2=\lambda_p\iff\sum_{i=1}^{p}\lambda_iy_i^2=\sum_{i=1}^{p}\lambda_py_i^2\iff\sum_{i=1}^{p}(\lambda_p-\lambda_i)y_i^2=0$

Notons que : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $(\lambda_p-\lambda_i)y_i^2\geq0$.

Donc $\langle y,f(y)\rangle=\lambda_p\iff\forall i\in[\![1,p]\!]$, $(\lambda_p-\lambda_i)y_i^2=0$.

Soit r le plus petit élément de $\{i\in[\![1,p]\!]\mid\lambda_i=\lambda_p\}$.

$\forall i\in[\![1,r-1]\!]$, $\lambda_i<\lambda_p$ et $\forall i\in[\![r,p]\!]$, $\lambda_i=\lambda_p$.

$\langle y,f(y)\rangle=\lambda_p\iff\forall i\in[\![1,p]\!]$, $(\lambda_p-\lambda_i)y_i^2=0\iff\forall i\in[\![1,r-1]\!]$, $y_i=0$.

$\langle y,f(y)\rangle=\lambda_p\iff y\in Vect(e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$

Comme $\forall i\in[\![r,p]\!]$, $\lambda_i=\lambda_p$: $\forall i\in[\![r,p]\!]$, $e_i\in SEP(f,\lambda_p)$; $Vect(e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$ est contenu dans $SEP(f,\lambda_p)$. Montrons que cette inclusion est une égalité.

· Soit $z=\sum_{i=1}^{p} z_i e_i$ un élément de E.

$z\in SEP(f,\lambda_p) \Leftrightarrow f(z)=\lambda_p z \Leftrightarrow f(\sum_{i=1}^{p} z_i e_i)=\lambda_p \sum_{i=1}^{p} z_i e_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} z_i f(e_i)=\lambda_p \sum_{i=1}^{p} z_i e_i$

$z\in SEP(f,\lambda_p) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} z_i\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_p z_i e_i \Leftrightarrow \forall i\in [\![1,p]\!],\ z_i\lambda_i=\lambda_p z_i \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,p]\!],\ (\lambda_i-\lambda_p)z_i=0$

$z\in SEP(f,\lambda_p) \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \forall i\in [\![1,r-1]\!],\ z_i=0 \Leftrightarrow z\in Vect(e_r,e_{r+1},\dots,e_p)$. $\underline{SEP(f,\lambda_p)=Vect(e_r,\dots,e_p)}$.

$\begin{cases}\lambda_i-\lambda_p=0 \text{ si } i\in[\![r,p]\!]\\ \lambda_i-\lambda_p<0 \text{ si } i\in[\![1,r-1]\!]\end{cases}$

donc $\underline{\{y\in E \mid \|y\|=1 \text{ et } \langle y,f(y)\rangle=\lambda_p\}=\{y\in E\mid \|y\|=1 \text{ et } f(y)=\lambda_p y\}}$.

Q5 a) Supposons $\lambda_p\leq 0$. $\operatorname{Sup}\{\langle y,f(y)\rangle \mid y\in E \text{ et } \|y\|=1\}=\lambda_p\leq 0$.

Alors $\forall y\in E,\ \|y\|=1 \Rightarrow \langle y,f(y)\rangle\leq 0$.

• Supposons $x=0_E$. Alors $f(x)=\|x\|^2x$ et pour tout vecteur unitaire y,

$\langle y,f(y)\rangle\leq 0=\|x\|^2$.

Donc (i) et (ii) sont vérifiées et ainsi $F(x)=m(f)$.

• Réciproquement supposons que l'on ait $F(x)=m(f)$.

$f(x)=\|x\|^2x$. Supposons x non nul. $\|x\|^2$ est alors une valeur propre de f strictement positive. Ceci contredit $\lambda_p\leq 0$.

Ainsi $F(x)=m(f)$ donne $x=0_E$

$\underline{\text{Si } \lambda_p\leq 0, \text{ alors } F(x)=m(f) \text{ si et seulement si } x \text{ est nul.}}$

b) $\lambda_p>0$. Soit x un élément de E.

Remarquons que $\operatorname{Sup}\{\langle y,f(y)\rangle \,;\, y\in E \text{ et } \|y\|=1\}=\lambda_p$.

Ainsi (ii) $\Leftrightarrow \lambda_p\leq\|x\|^2$.

$F(x)=m(f) \Leftrightarrow$ (i) et (ii) $\Leftrightarrow f(x)=\|x\|^2x$ et $\lambda_p\leq\|x\|^2$. Notons que $\lambda_p>0$

$F(x)=m(f) \Leftrightarrow \lambda_p\leq\|x\|^2$ et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|x\|^2$

λ_p étant la plus grande valeur propre de f il vient :

$F(x)=m(f) \Leftrightarrow \lambda_p=\|x\|^2$ et $x\in SEP(f,\lambda_p) \Leftrightarrow x\in SEP(f,\lambda_p)$ et $\|x\|=\sqrt{\lambda_p}$.

Soit x un élément de $SEP(f,\lambda_p)$ tel que : $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$. (de toute évidence un tel élément existe !).

$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x)\rangle + \|x\|^4 = N^2(f) - 2\langle x, \lambda_p x\rangle + \lambda_p^2 = N^2(f) - 2\lambda_p\|x\|^2 + \lambda_p^2$

$F(x) = N^2(f) - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = N^2(f) - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2 - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i^2$.

6 Ainsi $m(f) = N^2(f) - \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i^2$ et $\forall x \in E$, $F(x) = m(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in SEP(f,\lambda_p) \\ \text{et} \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$.

Q6 a) Posons $X = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_p\end{pmatrix} = MX$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} * 1 = \sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1$. $MX = X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$.

2 donc <u>1 est une valeur propre de M</u> et $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ <u>est un vecteur propre associé</u>.

b) $MX = \lambda X$ donc : $\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j = \lambda x_i$.

$|\lambda||x_i| = |\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{p}|m_{ij}||x_j| \leq |x_i|\sum_{j=1}^{p}|m_{ij}| \overset{m_{ij}>0}{=} |x_i|\underbrace{\sum_{j=1}^{p} m_{ij}}_{=1} = |x_i| \quad (*)$

$|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$

Ainsi $|\lambda||x_i| \leq |x_i|$ avec $|x_i| = \max(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_p|) \neq 0$ car $X \neq 0$.

3 donc $\boxed{|\lambda| \leq 1}$.

Supposons $|\lambda| = 1$ et reprenons la ligne (*)

$|x_i| = 1 \times |x_i| = |\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{p}|m_{ij}||x_j| \leq |x_i|\sum_{j=1}^{p}|m_{ij}| = |x_i|\sum_{j=1}^{p} m_{ij} = |x_i|$

Alors : $|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j\right| = \sum_{j=1}^{p}|m_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{p}|m_{ij}x_j|$

donc $|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j\right| = \sum_{j=1}^{p}|m_{ij}x_j|$.

En particulier pour tout j dans $[\![1,p]\!]$, $m_{i1}x_1, m_{i2}x_2, \dots, m_{ip}x_p$ ont même signe ; donc $x_1, x_2, \dots, x_p$ ont même signe ($\forall j \in [\![1,p]\!]$, $m_{ij} > 0$).

Posons $\varepsilon = 1$ si $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_p \geq 0$ et $\varepsilon = -1$ si $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, \dots, x_p \leq 0$

Alors $|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\varepsilon|x_j|\right| = |\varepsilon|\left|\sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j|\right| = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j|$

$|\varepsilon| = 1$ et $\sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j| \geq 0$

donc $|x_i| = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j|$

Ainsi $0 = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j| - |x_i| = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}|x_j| - (\underbrace{\sum_{j=1}^{p} m_{ij}}_{=1})|x_i| = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}(|x_j| - |x_i|)$

On a encore : $\sum_{j=1}^{p} m_{ij}(|x_i| - |x_j|) = 0$ et $\forall j \in [\![1,p]\!],\ m_{ij}(|x_i| - |x_j|) \geqslant 0$.

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!],\ m_{ij}(|x_i| - |x_j|) = 0$ et $m_{ij} > 0$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,p]\!],\ |x_i| - |x_j| = 0$. $\forall j \in [\![1,p]\!],\ |x_j| = |x_i|$.

$\forall j \in [\![1,p]\!],\ \varepsilon x_j = \varepsilon x_i$. $\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = x_i$

Ainsi $X = x_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\lambda X = MX = x_i M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X$; $(\lambda - 1)X = 0$ et $X \neq 0$. $\underline{\underline{\lambda = 1}}$.

Nous avons aussi montré que $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0$ et $MX = X \Rightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Donc $SEP(M,1) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ceci donne aussi $\dim SEP(M,1) \leqslant 1$.

Comme $\dim SEP(M,1) \geqslant 1$ ($SEP(M,1) \neq \{0\}$) : $\underline{\underline{\dim SEP(M,1) = 1}}$.

Mieux : $\underline{\underline{SEP(M,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$.

c) Ce qui précède montre que $\lambda_p = 1$; en effet 1 est valeur propre de f et toute valeur propre de f a une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Mieux $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{p-1} < \lambda_p = 1$ car le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $F(x) = m(f) \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = \sqrt{\lambda_p} = 1 \\ x \in SEP(f,\lambda_p) = SEP(f,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = 1 \\ \text{et} \\ x \in SEP(f,1) \end{cases}$.

Notons que $\|(1,1,\dots,1)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} 1^2} = \sqrt{p}$.

Ainsi les vecteurs unitaires de $SEP(f,1)$ sont $\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$ et $-\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^p,\ F(x) = m(f) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1) \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)}}$.

Soit u un élément de $T(E)$. $\exists x \in E$, $u = u_x$.

$m(f) = N^2(f-u) \Leftrightarrow m(f) = N^2(f-u_x) \Leftrightarrow F(x) = m(f) \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$.

Posons : $a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$ et notons que : $x = \pm\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1) \Leftrightarrow u_x = u_a$, c'est à dire que $x = a$ ou $x = -a \Leftrightarrow u_x = u_a$

C.N./$\Rightarrow$ c'est clair car $u_a = u_{-a}$

C.S./$\Leftarrow$ Supposons $u_x = u_a$. $\forall y \in E$, $\langle x, y\rangle x = \langle a, y\rangle a$. En faisant $y = a$ on obtient :

$\langle x, a\rangle x = \langle a, a\rangle a = \|a\|^2 a = a$.

Comme a n'est pas nul, $\langle x, a\rangle$ est différent de 0 et : $x = \alpha a$ avec $\alpha = \frac{1}{\langle x, a\rangle}$.

$[(\langle x,a\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,a\rangle x = 0_E \Rightarrow a = 0_E)$

Alors $\forall y \in E$, $\langle \alpha a, y\rangle \alpha a = \langle a, y\rangle a$.

$\forall y \in E$, $\alpha^2\langle a, y\rangle a = \langle a, y\rangle a$. $\alpha^2\langle a, a\rangle \cdot a = \langle a, a\rangle a$. $\alpha^2\|a\|^2 a = \|a\|^2 a$

donc $\alpha^2 = 1$ car $\|a\|^2 a \neq 0_E$. $\alpha = \pm 1$. $x = \pm a$.

Ainsi $m(f) = N^2(f-u) \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a \Leftrightarrow u_x = u_a \Leftrightarrow u = u_a$.

L'unique endomorphisme u appartenant à $T(E)$ tel que $m(f) = N^2(f-u)$ est $u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)}$.

Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ un élément de $\mathbb{R}^p$. Rappelons que l'on a posé $a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$.

$u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)}(y_1, y_2, \dots, y_p) = \langle y, a\rangle a = \frac{1}{\sqrt{p}}(y_1 + y_2 + \dots + y_p) \times \frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)$

$u_{\frac{1}{\sqrt{p}}(1,1,\dots,1)}(y_1, y_2, \dots, y_p) = \frac{1}{p}(y_1+y_2+\dots+y_p,\ y_1+y_2+\dots+y_p,\ \dots,\ y_1+y_2+\dots+y_p)$

<u>Ainsi la matrice de u_a dans la base canonique est</u> $\underline{\underline{\frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}}$.

Posons $D = \mathrm{Vect}(a)$.

$E = D \oplus D^\perp$. Soit $y \in E$. $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in D$ et $y_2 \in D^\perp$. $\exists \alpha_y \in \mathbb{R}$, $y_1 = \alpha_y a$.

$u_a(y) = u_a(y_1) + u_a(y_2) = \langle a, y_1\rangle a + \underbrace{\langle a, y_2\rangle}_{=0} y_2 = \langle a, y_1\rangle a = \langle a, \alpha_y a\rangle a = \alpha_y \|a\|^2 a \underset{\|a\|=1}{=} \alpha_y a = y_1$.

<u>Ainsi u_a est la projection orthogonale de E sur $D = \mathrm{Vect}(a)$.</u>

<u>La matrice précédente est donc la matrice dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de E sur $D = \mathrm{Vect}(a)$.</u>