Barème 6	PRELIMINAIRE

Soit $x \in [0,1[$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

La formule proposée donne en faisant $\alpha = k$:

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!\,n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1} x^n.$$

4 $\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$.

Pour $\alpha = 1$ nous obtenons : $\forall x \in [0,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1(1+1)\cdots(1+n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$;

1 ou : $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (... série géométrique)

Pour $\alpha = 2$ nous obtenons : $\forall x \in [0,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\times 3\times\cdots\times(n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

Donc $\forall x \in [0,1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$

1 Ainsi $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (série géométrique dérivée).

Remarques. 1. Ce qui précède vaut encore pour $x \in]-1,0[$

2. La formule du binôme généralisé peut se démontrer en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral. Il faut absolument savoir le faire.

Barème 15	PARTIE I	Message perso. Mon gégé chéri ce n'est pas une loi binômiale négative mais une loi de Pascal.

(Q1) a) X_1 suit une loi géométrique de paramètre p.

$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X_1 = i) = p(1-p)^{i-1} = pq^{i-1}$ avec $q = 1-p$.

2 Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_1 = n+1) = p(1-p)^n = pq^n$.

Rappelons que $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Ainsi la série de terme général $n(1-p)^{n-1}$ converge ($p \in]0,1[$) et $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2}$

donc la série de terme général $np(1-p)^{n-1}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Par conséquent la série de terme général $n\,p(X_1 = n)$ est convergente et même absolument convergente ($n\,p(X_1=n) \geqslant 0$!!) et $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,p(X_1 = n) = \frac{1}{p}$

2 Ainsi X_1 possède une espérance et $E(X_1) = \frac{1}{p}$.

b) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons S_i l'événement on obtient un succès au rang i
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons H_n l'événement on obtient $k-1$ succès en $n+k-1$ épreuves

$$H_n = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_{k-1}([\![1, n+k-1]\!])} \left(\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in \bar{I}} \bar{S_i} \right)\right)$$ ($\mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])$ étant

l'ensemble des parties de $[\![1,n+k-1]\!]$ contenant $k-1$ éléments)

Par incompatibilité il vient : $p(H_n) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])} p\left(\left(\bigcap_{i\in I} S_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in \bar I} \bar{S_i}\right)\right)$

Par indépendance : $p(H_n) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])} \left(\prod_{i \in I} p(S_i) \prod_{i \in \bar I} p(\bar{S_i}) \right)$

$$p(H_n) = \sum_{I \in \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])} p^{\operatorname{card} I} (1-p)^{(n-1)-\operatorname{card} I} = \sum_{I \in \mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])} p^{k-1} (1-p)^{n+k-1-(k-1)}$$

Or $\mathcal{P}_{k-1}([\![1,n+k-1]\!])$ possède C_{n+k-1}^{k-1} éléments donc $p(H_n) = C_{n+k-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^n$

3 La probabilité d'obtenir $k-1$ succès en $n+k-1$ épreuves est $C_{n+k-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^n$.

<u>Remarque</u>.. On pouvait encore obtenir ce résultat en évoquant une loi binômiale.

$\{X_k = n+k\} = H_n \cap S_{n+k}$.

$p(X_k = n+k) = p(H_n \cap S_{n+k}) \underset{\text{Indépendance}}{=} p(H_n)\,p(S_{n+k}) = C_{n+k-1}^{k-1}\, p^{k-1}(1-p)^n p$.

2 $\forall n \in \mathbb{N},\ p(X_k = n+k) = C_{n+k-1}^{k-1}\, p^{k}\,(1-p)^n$. ... pour $k>1$ et même pour $k \geq 1$.

On peut encore écrire : $\forall i \in X_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![,\ p(X_k = i) = C_{i-1}^{k-1}\, p^k (1-p)^{i-k}$.

c] $1-p \in]0,1[$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1}(1-p)^n \underset{\text{PREL I}}{=} \frac{1}{(1-(1-p))^k} = \frac{1}{p^k}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1}\, p^k (1-p)^n = p^k \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1}(1-p)^n = p^k \times \frac{1}{p^k} = 1$.

1 donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(X_k = n+k) = 1$ ... ou $\displaystyle\sum_{i=k} p(X_k = i) = 1$.

Le préliminaire nous donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^{k}(1-p)^n = \frac{1}{(1-(1-p))^{k+1}} = \frac{1}{p^{k+1}}$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{n+k}{k} C_{n+k-1}^{k-1}}_{C_{n+k}^{k}} (1-p)^n = \frac{1}{p^{k+1}}$. En multipliant par $k p^k$ on obtient

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)\, C_{n+k-1}^{k-1}\, p^k (1-p)^n = k p^k \times \frac{1}{p^{k+1}} = \frac{k}{p}$.

ce qui s'écrit encore $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)\, p(X_k = n+k) = \frac{k}{p}$. Ceci prouve en particulier que la série de terme général $(n+k)p(X_k = n+k)$ est convergente et même absolument convergente ($(n+k)p(X_k = n+k) \geq 0$).

3 Ainsi X_k possède une espérance et $E(X_k) = \frac{k}{p}$.

2 En moyenne pour obtenir le premier succès il faut " $\frac{1}{p}$ expérience".
Donc pour obtenir un nouveau succès après le $i^{\text{ème}}$ succès il faut aussi faire en moyenne " $\frac{1}{p}$ expériences".

Donc pour obtenir k succès il faut faire en moyenne " $\frac{1}{p}+(k-1)\frac{1}{p}=\frac{k}{p}$ " expériences.

Mieux : $\forall i\in\mathbb{N}^*$, $X_{i+1}-X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $E(X_{i+1}-X_i)=\frac{1}{p}$.

Or $X_k=\sum_{i=1}^{k-1}(X_{i+1}-X_i)+X_1$; $E(X_k)=\sum_{i=1}^{k-1}E(X_{i+1}-X_i)+E(X_1)=(k-1)\times\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{k}{p}$.

Barème 25+18+18	PARTIE II	Bien maîtriser les questions (*)

R **Un rappel.** — Soit $(\Omega,\mathcal{B},p)$ un espace probabilisé. Soit $A\in\mathcal{B}$ tel que $p(A)\neq 0$.
Pour $\forall B\in\mathcal{B}$, $p_A(B)=p(B/A)$. p_A est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{B},p)$. Qu'on ne le dise et qu'on ne l'utilise.

Q1 Croissance de la population par les naissances ($k>0$).

$(\{X(t+h)<n+k\},\{X(t+h)=n+k\},\{X(t+h)=n+k+1\},\{X(t+h)>n+k+1\})$ est un système complet d'événements donc grâce à R :

$1=p(\{X(t+h)<n+k/X(t)=n+k\})+p(\{X(t+h)=n+k/X(t)=n+k\})+p(\{X(t+h)=n+k+1/X(t)=n+k\})+p(\{X(t+h)>n+k+1/X(t)=n+k\})$

donc $p(\{X(t+h)=n+k/X(t)=n+k\})=1-0-\lambda(n+k)h-h\varepsilon'_n(h)-h\,\varepsilon''_n(h)$.

1 $\underline{\underline{p(\{X(t+h)=n+k/X(t)=n+k\})=1-\lambda(n+k)h-h\left(\varepsilon'_n(h)+\varepsilon''_n(h)\right).}}$ (*)

a) Commençons par montrer que : $p(X(t)<k)=0$.
C'est clair pour $t=0$. Supposons alors $t>0$.
$p(X(t)<k)=p(X(t)<k\cap X(0)=k)$ car $X(0)=k$!
Donc $p(X(t)<k)=p(X(t)<k\,|\,X(0)=k)\,p(X(0)=k)$. Or $p(X(0)=k)=1$ donc
$p(X(t)<k)=P(X(t)<k/X(0)=k)=0$ d'après l'hypothèse (faire $n=0$, $t=0$ et remplacer h par t !)

$(\{X(t)=i\})_{i\geq k}$ est alors un système <u>quasi-complet</u> d'événements.

$$p(X(t+h)=k) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(X(t+h)=k / X(t)=i)\, p(X(t)=i)$$

Soit $i \in [\![k+1,+\infty[\![$. $\{X(t+h)=k\} \subset \{X(t+h)<i\}$ donc

$0 \leq p(X(t+h)=k/X(t)=i) \underset{(h)}{\leq} p(X(t+h)<i/X(t)=i) = 0$; $p(X(t+h)=k/X(t)=i)=0$.

Ainsi $p(X(t+h)=k) = p(X(t+h)=k/X(t)=k)\,p(X(t)=k)$.

Donc $p(X(t+h)=k) = [1-\lambda(0+k)h - h(\varepsilon'_0(h)+\varepsilon''_0(h))]\,p(X(t)=k)$.

$p(X(t+h)=k) = (1-\lambda k h)\,p(X(t)=k) - h(\varepsilon'_0(h)+\varepsilon''_0(h))\,p(X(t)=k)$.

Posons $\varepsilon_0(h) = -(\varepsilon'_0(h)+\varepsilon''_0(h))\,p(X(t)=k)$ pour tout $h\in\mathbb{R}^*_+$.

Alors $p(X(t+h)=k) = (1-\lambda k h)\,p(X(t)=k) + h\,\varepsilon_0(h)$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon_0(h)=0$.

3 Donc $p(X(t+h)=k) = (1-\lambda k h)\,p(X(t)=k) + h\,\varepsilon_0(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_0(h)=0$ (*)

$\forall h\in\mathbb{R}^*_+$, $p_k(t+h)-p_k(t) = p(X(t+h)=k) - p(X(t)=k)$

$= (1-\lambda k h)\,p(X(t)=k) + h\,\varepsilon_0(h) - p(X(t)=k)$

$= -\lambda k h\, p(X(t)=k) + h\,\varepsilon_0(h)$.

$\forall h\in\mathbb{R}^*_+$, $\dfrac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = -\lambda k\, p(X(t)=k) + \varepsilon_0(h) = -\lambda k\, p_k(t) + \varepsilon_0(h)$

Ainsi $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = -\lambda k\, p_k(t) + 0 = -\lambda k\, p_k(t)$

3 Donc p_k est dérivable à droite en t et $(p_k)'_d(t) = -\lambda k\, p_k(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$

Nous admettons donc que p_k est dérivable en t ($t\in\mathbb{R}_+$) et que $p_k'(t) = -\lambda k\, p_k(t)$.

b) Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $u(t) = e^{\lambda k t}\,p_k(t)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ u'(t)=\lambda k e^{\lambda k t}p_k(t)+e^{\lambda k t}p_k'(t)=e^{\lambda k t}(\lambda k p_k(t)+p_k'(t))=0.$

u' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc u est constante sur $\mathbb{R}_+$.

$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ u(t)=c.\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ e^{\lambda k t}p_k(t)=c.\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ p_k(t)=c\,e^{-\lambda k t}$

Or $p_k(0)=p(X(0)=k)=1$ donc $1=c\,e^{-\lambda k 0}=c$; $c=1$.

3 Finalement : $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ p_k(t)=e^{-\lambda k t}$.

c) Soit $t\in\mathbb{R}_+$. $(\{X(t)=i\})_{i\geq k}$ est un système quasi-complet d'événements.

$$p(X(t+h)=n+k)=\sum_{i=k}^{+\infty}p(X(t+h)=n+k\,/\,X(t)=i)\,p(X(t)=i).$$

Supposons que $i\in[\![n+k+1,+\infty[\![$.

$\{X(t+h)=n+k\}\subset\{X(t+h)<i\}$, $0\leq p(X(t+h)=n+k/X(t)=i)\leq p(X(t+h)<i/_{X(t)=i})=0$

donc $p(X(t+h)=n+k)=\displaystyle\sum_{i=k}^{n+k}p(X(t+h)=n+k\,/\,X(t)=i)\,p(X(t)=i)$

$$p(X(t+h)=n+k)=p(X(t+h)=n+k/X(t)=n+k)\,p(X(t)=n+k)+p(X(t+h)=n+k/X(t)=n+k-1)\,p(X(t)=n+k-1)$$
$$+\underbrace{\sum_{i=k}^{n+k-2}p(X(t+h)=n+k\,|\,X(t)=i)\,p(X(t)=i)}_{S(h)}.$$

$$p(X(t+h)=n+k)=\left[1-\lambda(n+k)h-h(\varepsilon_n'(h)+\varepsilon_n''(h))\right]p(X(t)=n+k)+\left[\lambda(n+k-1)+h\,\varepsilon_{n-1}'(h)\right]\times p(X(t)=n+k-1)+S(h)$$

$$p(X(t+h)=n+k)=\left[1-\lambda(n+k)h\right]p(X(t)=n+k)+\lambda(n+k-1)\,p(X(t)=n+k-1)+h\,\varepsilon_n(h)$$

où $\varepsilon_n(h)=-(\varepsilon_n'(h)+\varepsilon_n''(h))\,p(X(t)=n+k)+\varepsilon_{n-1}'(h)\,p(X(t)=n+k-1)+\dfrac{S(h)}{h}$

Pour achever le début de cette question il suffit de prouver que $\lim\limits_{h\mapsto 0}\varepsilon_n(h)=0$.

Pour cela il suffit de prouver que $\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{S(h)}{h}=0$ car nous avons $\lim\limits_{h\mapsto 0}\varepsilon_n'(h)=0$,

$\lim\limits_{h\mapsto 0}\varepsilon_n''(h)=0$ et $\lim\limits_{h\mapsto 0}\varepsilon_{n-1}'(h)=0$.

$S(h) = \sum_{i=k}^{n+k-2} p(X(t+h)=n+k / X(t)=i)\, p(X(t)=i)$. Pour obtenir $\lim_{h\to 0} \frac{S(h)}{h} = 0$

il suffit de prouver que $\forall i \in [\![k, n+k-2]\!]$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p(X(t+h)=n+k / X(t)=i) = 0$

Soit $i \in [\![k, n+k-2]\!]$

or $0 \leq \frac{1}{h} p(X(t+h)=n+k / X(t)=i) \leq \frac{1}{h} p(X(t+h) > i+1 / X(t)=i) = \frac{h}{h} \varepsilon''_{i-k}(h) = \varepsilon''_{i-k}(h)$

$\{X(t+h)=n+k\} \subset \{X(t+h) > i+1\}$ car $i \leq n+k-2$

Comme $\lim_{h\to 0} \varepsilon''_{i-k}(h) = 0$: $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p(X(t+h)=n+k / X(t)=i) = 0$. ceci achève de

prouver que $\lim_{h\to 0} \frac{S(h)}{h} = 0$ et donc que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_n(h) = 0$

4 Ainsi $p(X(t+h)=n+k) = (1-\lambda(n+k)h)\, p(X(t)=n+k) + \lambda(n+k-1) h\, p(X(t)=n+k-1) + h\,\varepsilon_n(h)$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_n(h) = 0$. (**)

On peut encore écrire : $P_{n+k}(t+h) = (1-\lambda(n+k)h) P_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1) h\, P_{n+k-1}(t) + h\, \varepsilon_n(h)$

Donc $\frac{P_{n+k}(t+h) - P_{n+k}(t)}{h} = -\lambda(n+k) P_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1) P_{n+k-1}(t) + \varepsilon_n(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$

Comme $\lim_{h\to 0^{(+)}} \varepsilon_n(h) = 0$: $\lim_{h\to 0^+} \frac{P_{n+k}(t+h) - P_{n+k}(t)}{h} = -\lambda(n+k) P_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1) P_{n+k-1}(t)$

2 Ainsi P_{n+k} est dérivable à droite en t et $(P_{n+k})'_d(t) = -\lambda(n+k) P_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1) P_{n+k-1}(t)$

Nous admettons que P_{n+k} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $P'_{n+k} = -\lambda(n+k) P_{n+k} + \lambda(n+k-1) P_{n+k-1}$.

d) Pour $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u_n(t) = e^{\lambda(n+k)t} P_{n+k}(t)$. u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit

de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u'_n(t) = \lambda(n+k) e^{\lambda(n+k)t} P_{n+k}(t) + e^{\lambda(n+k)t} P'_{n+k}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u'_n(t) = e^{\lambda(n+k)t} [\lambda(n+k) P_{n+k}(t) + P'_{n+k}(t)] = e^{\lambda(n+k)t} \lambda(n+k-1) P_{n+k-1}(t)$.

montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}_+, P_{n+k}(t) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^n$.

→ C'est vrai pour $n=0$ car $\forall t\in\mathbb{R}_+, P_k(t) = e^{-\lambda k t} = C_{0+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n\in\mathbb{N}^*$) et montrons-la pour n.

$\forall t\in\mathbb{R}_+, u_n'(t) = e^{\lambda(n+k)t}\lambda(n+k-1)P_{n+k-1}(t) \underset{\text{H.R.}}{=} e^{\lambda(n+k)t}\lambda(n+k-1)\,C_{n+k-2}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.

Or : $(n+k-1)C_{n+k-2}^{k-1} = (n+k-1)C_{n+k-2}^{n-1} = n\,C_{n+k-1}^{n} = n\,C_{n+k-1}^{k-1}$. Ainsi :

$\forall t\in\mathbb{R}_+, u_n'(t) = C_{n+k-1}^{k-1}\, n\lambda\, e^{\lambda n t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} = C_{n+k-1}^{k-1}\, n\lambda\, e^{\lambda t}\left(e^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t})\right)^{n-1}$

$\forall t\in\mathbb{R}_+, u_n'(t) = C_{n+k-1}^{k-1}\, n\lambda\, e^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^{n-1}$

Ainsi $\exists c\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}^+, u_n(t) = C_{n+k-1}^{k-1}(e^{\lambda t}-1)^n + c$ (la dérivée de $t\mapsto(e^{\lambda t}-1)^n$ est $t\mapsto n\lambda e^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^{n-1}$).

$\forall t\in\mathbb{R}_+, P_{n+k}(t) = e^{-\lambda(n+k)t}u_n(t) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t} e^{-\lambda n t}(e^{\lambda t}-1)^n + c\, e^{-\lambda(n+k)t}$

$\forall t\in\mathbb{R}_+, P_{n+k}(t) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}\left(e^{-\lambda t}(e^{\lambda t}-1)\right)^n + c\, e^{-\lambda(n+k)t}$

Or $P_{n+k}(0) = 0$ car $n\in\mathbb{N}^*$ donc $0 = C_{n+k-1}^{k-1}\, 1\,(1(1-1))^n + c = c$; $c=0$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+, P_{n+k}(t) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^n$. Ceci achève la récurrence.

7 $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}_+, P_{n+k}(t) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^n$. (*)

e) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in\mathbb{R}_+, P(X(t)=n+k) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda k t}(1-e^{-\lambda t})^n$

1 $X(t)$ suit "une loi binomiale négative" de paramètres $e^{-\lambda t}$ et k.

1 Ainsi $E(X(t)) = \dfrac{k}{e^{-\lambda t}} = k e^{\lambda t}$.

A partir d'ici on répète. On peut se contenter de regarder Q2 d+e et Q3 c+d+e.

(Q2) Croissance de la population par l'immigration.

Bien évidemment il n'est pas question ici de refaire les démonstrations rigoureusement analogues à celles de Q1.

1 $p(X(t+h)=n+k \,/\, X(t)=n+k) = 1-\rho h - h(\varepsilon'_n(h)+\varepsilon''_n(h))$.

1 a) C'est exactement la même chose que dans Q1 a)

1 b) En utilisant une démarche analogue à celle de Q1 b) on trouve :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ p(X(t)=k)=q_k(t)=e^{-\rho t}$.

3 c) même chose que Q1 c)

d) Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_n(t)=e^{\rho t}q_{n+k}(t)$. φ_n est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_n(t)=\rho e^{\rho t}q_{n+k}(t)+e^{\rho t}q'_{n+k}(t)=e^{\rho t}(\rho q_{n+k}(t)+q'_{n+k}(t))$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_n(t)=\rho e^{\rho t}q_{n+k-1}(t)$ au moins pour $n\in\mathbb{N}^*$.

- $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_1(t)=\rho e^{\rho t}q_k(t)=\rho e^{\rho t}e^{-\rho t}=\rho$.

$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_1(t)=\rho t+c$. $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q_{k+1}(t)=\varphi_1(t)e^{-\rho t}=(\rho t+c)e^{-\rho t}$

$q_{k+1}(0)=p(X(0)=k+1)$ donc $q_{k+1}(0)=0$; $c\times 1=0$; $c=0$.

2 $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q_{k+1}(t)=(\rho t)e^{-\rho t}$.

- $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_2(t)=\rho e^{\rho t}q_{k+1}(t)=\rho e^{\rho t}\rho t e^{-\rho t}=\rho^2 t$.

$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_2(t)=\rho^2\frac{t^2}{2}+c$. $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q_{k+2}(t)=(\rho^2\frac{t^2}{2}+c)e^{-\rho t}$

$q_{n+2}(0)=0$ donc $c=0$.

1+2 $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ q_{k+2}(t)=\frac{(\rho t)^2}{2}e^{-\rho t}$. Sautons le cas $n=3$ et passons au cas général.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+\ell}(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$ pour tout t dans $\mathbb{R}^+$.

→ C'est clair pour $n = 1$ et 2.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in [\![2,+\infty[\![$) et montrons-la pour n.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n(t) = e^{\mu t} q_{n+\ell}(t)$ et $\varphi_n'(t) = \mu e^{\mu t} q_{n+\ell-1}(t)$.

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n'(t) = \mu e^{\mu t} \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} = \frac{\mu^n}{(n-1)!} t^{n-1}$.

Ainsi $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n(t) = \frac{\mu^n t^n}{(n-1)!\, n} + C = \frac{(\mu t)^n}{n!} + C$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $q_{n+\ell}(t) = \varphi_n(t) e^{-\mu t} = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} + C e^{-\mu t}$.

Or $q_{n+\ell}(0) = p(X(0) = n+\ell) = 0$ ($n \geq 1$ et même 2 !) ; ainsi $0 + C = 0$; $C = 0$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $q_{n+\ell}(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$. Ceci achève la récurrence.

En se rappelant que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $q_\ell(t) = e^{-\mu t} = \frac{(\mu t)^0}{0!} e^{-\mu t}$ on peut écrire que :

3 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p(X(t) = n+\ell) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} = q_{n+\ell}(t)$. (*)

Soit $t \in \mathbb{R}_+$: $(X(t)-\ell)(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(X(t)-\ell = n) = p(X(t) = n+\ell) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$

1 Ainsi $X(t)-\ell$ suit une loi de Poisson de paramètre μt

1 $E(X(t)-\ell) = \mu t$ et donc $E(X(t)) = \ell + \mu t$.

Q3 Croissance de la population par les naissances et l'immigration.

2 a) Même chose que dans Q1 a) ou Q2 a)

1 b) Même chose que dans Q1 b) ou Q2 b). On trouve : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $r_\ell(t) = p(X(t) = \ell) = e^{-(\lambda \ell + \mu) t}$.

c) Une démarche analogue à celle de Q1 c) ou Q2 c) donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p(X(t+h) = n+\ell) = (1 - (\lambda(n+\ell) + \mu) h)\, p(X(t) = n+\ell) +$

$(\lambda(n+\ell-1) + \mu) h\, p(X(t) = n+\ell-1) + h\, \varepsilon_n(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon_n(h) = 0$

On montre alors que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, r_{n+k} est dérivable à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et que $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $(r_{n+k})'_d(t) = -(\lambda(n+k)+\mu)\, r_{n+k}(t) + (\lambda(n+k-1)+\mu)\, r_{n+k-1}(t)$.

On admet alors que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, r_{n+k} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

3 $\quad \forall t\in\mathbb{R}_+,\ r'_{n+k}(t) = -(\lambda(n+k)+\mu)\, r_{n+k}(t) + (\lambda(n+k-1)+\mu)\, r_{n+k-1}(t)$.

4) • Notons que cette formule vaut pour $n=1$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r'_{k+1}(t) = -(\lambda(k+1)+\mu)\, r_{k+1}(t) + (\lambda k+\mu)\, r_k(t)$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_1(t) = r_{k+1}(t)\, e^{(\lambda(k+1)+\mu)t}$.

φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_1(t) = e^{(\lambda(k+1)+\mu)t}\left[(\lambda(k+1)+\mu)\, r_{k+1}(t) + r'_{k+1}(t)\right] = (\lambda k+\mu)\, e^{(\lambda(k+1)+\mu)t}\, r_k(t)$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_1(t) = (\lambda k+\mu)\, e^{(\lambda(k+1)+\mu)t}\, e^{-(\lambda k+\mu)t} = (\lambda k+\mu)\, e^{\lambda t}$.

$\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_1(t) = (\lambda k+\mu)\dfrac{e^{\lambda t}}{\lambda} + c$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{k+1}(t) = \left[\dfrac{\lambda k+\mu}{\lambda} e^{\lambda t} + c\right] e^{-(\lambda(k+1)+\mu)t}$.

Or $r_{k+1}(0) = p(X(0)=k+1) = 0$; ainsi $c = -\dfrac{\lambda k+\mu}{\lambda}$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{k+1}(t) = \dfrac{\lambda k+\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\, e^{-\lambda t}\, e^{-(\lambda k+\mu)t}$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{k+1}(t) = \dfrac{\lambda k+\mu}{\lambda}\, e^{-(\lambda k+\mu)t}\,(1-e^{-\lambda t})$ ce qui montre bien la formule pour $n=1$.

• Supposons alors la formule vraie pour $n-1$ ($n\geq 2$) et montrons-la pour n.

Supposons donc : $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{n+k-1}(t) = \dfrac{(\lambda k+\mu)(\lambda(k+1)+\mu)\cdots(\lambda(k+n-2)+\mu)}{\lambda^{n-1}(n-1)!}\, e^{-(\lambda k+\mu)t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_n(t) = r_{n+k}(t)\, e^{(\lambda(n+k)+\mu)t}$. φ_n est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_n(t) = e^{(\lambda(n+k)+\mu)t}\left[(\lambda(n+k)+\mu)\, r_{n+k}(t) + r'_{n+k}(t)\right]$. 3) donne :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi'_n(t) = e^{(\lambda(n+k)+\mu)t}\,(\lambda(n+k-1)+\mu)\, r_{n+k-1}(t)$.

Appliquons alors l'hypothèse de récurrence et nous obtenons :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ p_n'(t) = \underbrace{\frac{\lambda(\ell+\rho)(\lambda(\ell+1)+\rho)\lambda\cdots\times(\lambda(\ell+n-1)+\rho)}{\lambda^{n-1}(n-1)!}}_{U \text{ pour éviter la recopie}}\ e^{\lambda n t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_n'(t) = U e^{\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^n$

Ainsi $\exists C\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ p_n(t) = \frac{U}{\lambda n}(e^{\lambda t}-1)^n + C = \frac{U}{\lambda n} e^{\lambda n t}(1-e^{-\lambda t})^n + C$

En revenant à $r_{n+\ell}$ et en remplaçant U par sa valeur on obtient :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{n+\ell}(t) = e^{-(\lambda(n+\ell)+\rho)t}\left[\frac{(\lambda\ell+\rho)(\lambda(\ell+1)+\rho)\times\cdots\times(\lambda(\ell+n-1)+\rho)}{\lambda^n n!} e^{\lambda n t}(1-e^{-\lambda t})^n + C\right]$

Ici encore $r_{n+\ell}(0) = p(X(0)=n+\ell) = 0$ donc $C=0$ $\quad((1-e^{-\lambda 0})^n = 0)$

Finalement :

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{n+\ell}(t) = \frac{(\lambda\ell+\rho)(\lambda(\ell+1)+\rho)\times\cdots\times(\lambda(\ell+n-1)+\rho)}{\lambda^n n!}\ e^{-(\lambda(n+\ell)+\rho-\lambda n)t}(1-e^{-\lambda t})^n.$

$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ r_{n+\ell}(t) = \frac{(\lambda\ell+\rho)(\lambda(\ell+1)+\rho)\times\cdots\times(\lambda(\ell+n-1)+\rho)}{\lambda^n n!}\ e^{-(\lambda\ell+\rho)t}(1-e^{-\lambda t})^n. \quad (*)$

5 Ainsi s'achève la récurrence. Notons que cette formule vaut (presque...) pour $n=0$

e) Fixons t dans $\mathbb{R}_+$. En posant $\rho = \rho\lambda$ on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N},\ p(X(t)=n+\ell) = \frac{(\lambda\ell+\rho\lambda)(\lambda(\ell+1)+\rho\lambda)\times\cdots\times(\lambda(\ell+n-1)+\rho\lambda)}{\lambda^n n!}\ e^{-(\lambda\ell+\rho\lambda)t}(1-e^{-\lambda t})^n$

$\forall n\in\mathbb{N},\ p(X(t)=n+\ell) = \frac{(\ell+\rho)(\ell+1+\rho)\cdots(\ell+n-1+\rho)}{n!}\ e^{-\lambda(\ell+\rho)t}(1-e^{-\lambda t})^n.$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ell+\rho)(\ell+\rho+1)\cdots(\ell+\rho+n-1)}{n!}(1-e^{-\lambda t})^n \overset{F.B.G.}{=} \frac{1}{(1-(1-e^{-\lambda t}))^{\ell+\rho}} = e^{\lambda(\ell+\rho)t}$

$\begin{cases} 1-e^{-\lambda t}\in[0,1[\\ (\ell+\rho)>0 \end{cases}$

1 Il vient donc évidemment : $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X(t)=n+\ell) = 1.$

Intéressons nous à l'espérance de $E(X(t))$. Remarquons que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+\ell)\,p(X(t)=n+\ell) = n\times\frac{(\ell+\rho)(\ell+1+\rho)\cdots(\ell+n-1+\rho)}{n!}\ e^{-(\lambda\ell+\rho\lambda)t}(1-e^{-\lambda t})^n$

$+\ \ell\, p(X(t)=n+\ell).$

Appliquons la formule du binôme généralisé avec $\alpha = \rho+\ell+1$ et $x = 1-e^{-\lambda t}$

Nous obtenons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\rho+\ell+1)(\rho+\ell+2)\cdots(\rho+\ell+1+n-1)}{n!}(1-e^{-\lambda t})^{n} = \frac{1}{(1-(1-e^{-\lambda t}))^{\rho+\ell+1}} = e^{\lambda t(\rho+\ell+1)}$.

Ainsi $\displaystyle e^{\lambda t(\rho+\ell+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\rho+\ell+1)(\rho+\ell+2)\cdots(\rho+\ell+n-1)}{(n-1)!}(1-e^{-\lambda t})^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{\rho+\ell}(\rho+\ell)(\rho+\ell+1)\cdots(\rho+\ell+n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$

$n \to n-1$

donc $\displaystyle e^{\lambda t(\rho+\ell+1)} = \frac{1}{\rho+\ell} \times \frac{1}{e^{-(\lambda\ell+\lambda\rho)t}} \sum_{n=0}^{+\infty} n\, p(X(t)=n+\ell) \times \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}$.

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\, p(X(t)=n+\ell) = (\rho+\ell)e^{-(\lambda\ell+\lambda\rho)t}(1-e^{-\lambda t})\, e^{\lambda t(\rho+\ell+1)} = (\rho+\ell)(1-e^{-\lambda t})\, e^{\lambda t}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\, p(X(t)=n+\ell) = (\rho+\ell)e^{\lambda t} - \rho - \ell$; ainsi :

$\displaystyle(\rho+\ell)e^{\lambda t} - \rho = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, p(X(t)=n+\ell) + \ell = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+\ell)\, p(X(t)=n+\ell)$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(X(t)=n+\ell) = 1$

La série de terme général $(n+\ell)p(X(t)=n+\ell)$ est donc convergente et même absolument convergente (elle est à termes positifs). Par conséquent :

$E(X(t))$ existe et vaut $(\rho+\ell)e^{\lambda t} - \rho = \ell e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)$.

6 $\quad E(X(t)) = \ell e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)$. $\qquad (*)$

Remarque.. Si l'on fait tendre ν vers 0 dans cette dernière quantité on obtient $\ell e^{\lambda t}$ ce qui est l'espérance de $X(t)$ dans $\varphi 1$; la situation de $\varphi 1$ n'est-elle pas celle de $\varphi 3$ lorsque l'on a fait tendre ν vers 0 !

Si l'on fait tendre λ vers 0 la valeur de $E(X(t))$ devient $\ell + \nu t$ qui est l'espérance de $\varphi 2$; la situation de $\varphi 2$ n'est-elle pas celle de $\varphi 3$ lorsque l'on fait tendre λ vers 0 ?

Fin de ce problème affreusement répétitif mais contenant quelques belles questions. Le barème est sur 82, on a divisé par 4.