PARTIE I

Q1 Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $\langle P, \lambda Q + R\rangle = \int_0^1 P(t)(\lambda Q(t) + R(t))dt = \int_0^1 (\lambda P(t)Q(t) + P(t)R(t))dt = \lambda \int_0^1 P(t)Q(t)dt + \int_0^1 P(t)R(t)dt$.
$\langle P, \lambda Q + R\rangle = \lambda\langle P, Q\rangle + \langle P, R\rangle$.

• $\langle Q, P\rangle = \int_0^1 Q(t)P(t) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt = \langle P, Q\rangle$; $\langle Q, P\rangle = \langle P, Q\rangle$.

• $\forall t \in [0,1], (P(t))^2 \geqslant 0$; $\int_0^1 P^2(t)dt \geqslant 0$; $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.

. Supposons $\langle P, P\rangle = 0$. P^2 est continue et positive sur $[0,1]$ et $\int_0^1 P^2(t)dt = 0$; alors $\forall t \in [0,1], P^2(t) = 0$; $\forall t \in [0,1], P(t) = 0$. P est donc une fonction polynôme ayant une infinité de racines ; ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$; $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Les quatre assertions suivantes montrent que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme associée.

Q2 Dans la suite nous posons : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0, n]\!], e_k(x) = x^k.}$

a) $\forall (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \| e_n - \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \|^2$.

Posons $S = \{ \| e_n - \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \|^2 \; (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \}$

$S = \{ \| e_n - P\|^2 \; ; \; P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

Or le cours nous indique que : $\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|e_n - P\| = \| e_n - \hat{e}_n \|$ où $\hat{e}_n$ est la projection orthogonale de e_n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Mieux $\hat{e}_n$ est l'unique élément élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$\min_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \| e_n - P\| = \| e_n - \hat{e}_n \|$ ou $\min_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \| e_n - P\|^2 = \| e_n - \hat{e}_n\|^2$.

$\exists! (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{e}_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k$.

Ainsi 1.. f possède un minimum $m_n = \| e_n - \hat{e}_n \|^2$.

2.. $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ réalisant le minimum de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbb{R}^n$.

$e_n - \widehat{e_n} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$; $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\langle e_n - \widehat{e_n}, e_k \rangle = 0$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 = \langle e_n - \widehat{e_n}, e_k \rangle = \int_0^1 (e_n(t) - \widehat{e_n}(t)) e_k(t) dt = \int_0^1 (t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i) t^k dt = 0$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^1 (t^n - a_{n-1} t^{n-1} - a_{n-2} t^{n-2} - \dots - a_1 t - a_0) t^k dt = 0$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 = \int_0^1 (t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i) t^k dt = \int_0^1 (t^{n+k} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+k}) dt = \left[\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+k+1} t^{i+k+1} \right]_0^1$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+k+1} = 0$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k+1} - \frac{a_{n-1}}{n+k} - \frac{a_{n-2}}{n+k-1} - \dots - \frac{a_1}{k+2} - \frac{a_0}{k+1} = 0$.

b) Posons : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \dots, -(n-1)\}$, $h(x) = (x+n+1)(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1) F(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \dots, -(n-1)\}$, $h(x) = \prod_{k=1}^{n} (x+k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^{n+1} (x+k)$ OK ??!

Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \prod_{k=1}^{n} (x+k) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^{n+1} (x+k) \right)$

Alors 1°/ $H \in \mathbb{R}_n[X]$ (1)

2°/ $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $H(k) = F(k)(k+n+1)(k+n)\cdots(k+2)(k+1)$.

Or $F(k) = \frac{1}{k+n+1} - \frac{a_{n-1}}{k+n} - \frac{a_{n-2}}{k+n-1} - \dots - \frac{a_1}{k+2} - \frac{a_0}{k+1} = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ d'après

Q2 a) ; ainsi $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $H(k) = 0$. (2)

(1) et (2) montrent alors que : $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = a x (x-1) \cdots (x-n+1)$.

Ainsi il existe un réel a tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+n+1)(x+n)\cdots(x+2)(x+1)F(x) = a x (x-1)\cdots(x-n+1)$

$\lim_{x \to -n-1} H(x) = \lim_{x \to -n-1} \left[\prod_{k=1}^{n} (x+k) - \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^{n+1} (x+k) \right) \right] = \prod_{k=1}^{n} (-n-1+k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \times 0$.

$$\lim_{x\mapsto -n-1} H(x) = \prod_{k=1}^{n} (-n-1+k) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (n+1-k) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} i = (-1)^n n!$$

Alors : $(-1)^n n! = \lim\limits_{x\mapsto -n-1} H(x) = \lim\limits_{x\mapsto -n-1} \left[(x+n+1)(x+n)\cdots(x+2)(x+1)F(x)\right] = \lim\limits_{x\mapsto -n-1} \left[a x(x-1)\cdots(x-n+1)\right]$

Ainsi $(-1)^n n! = a(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-1-n+1) = a(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n) = a(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$

Alors $\underline{\underline{a = \dfrac{[n!]^2}{(2n)!} = \dfrac{1}{C_{2n}^{n}}}}$.

c) $m_n = \|e_n - \hat{e}_n\|^2 = \langle e_n - \hat{e}_n, e_n - \hat{e}_n\rangle = \langle e_n - \hat{e}_n, e_n\rangle + \langle e_n - \hat{e}_n, \hat{e}_n\rangle$.

Or $\langle e_n - \hat{e}_n, \hat{e}_n\rangle = 0$ car $e_n - \hat{e}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^\perp$ et $\hat{e}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Ainsi $\underline{\underline{m_n = \langle e_n - \hat{e}_n, e_n\rangle = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0)t^n \, dt}}$.

$$m_n = \int_0^1 \Big(t^{2n} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+n}\Big) dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{t^{i+n+1}}{i+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{1}{n+i+1}$$

$$m_n = \frac{1}{n+n+1} - \frac{a_{n-1}}{n+n} - \frac{a_{n-2}}{n+n-1} - \cdots - \frac{a_1}{n+2} - \frac{a_0}{n+1} = F(n).$$

$\underline{\underline{m_n = F(n)}}$. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+n+1)(x+n)\cdots(x+2)(x+1)F(x) = a x(x-1)\cdots(x-n+1)$

Alors $(n+n+1)(n+n)\cdots(n+2)(n+1)F(n) = a n(n-1)\cdots(n-n+1)$

$(2n+1)(2n)\cdots(n+2)(n+1)\, m_n = a\, n!$

$$m_n = \frac{a\, n!}{(2n+1)(2n)\cdots(n+2)(n+1)} = \frac{a\, n!\, n!}{(2n+1)!} = \frac{[n]^2[n!]^2}{(2n)!\,(2n+1)!}.$$

Ainsi $\underline{\underline{m_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}}}$.

Q3 a) Soit $P\in \mathcal{P}_n$. $\exists Q\in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=x^n+Q(x)$.

$$N_2^2(P)=\int_{-1}^1 P^2(x)\,dx \underset{x=2t-1\,;\,t=\frac{x+1}{2}}{=} \int_0^1 P^2(2t-1)\,2dt = 2\int_0^1 [(2t-1)^n+Q(2t-1)]^2dt.$$

$$N_2^2(P)=2^{2n+1}\int_0^1 \left[(t-\tfrac12)^n+\tfrac{1}{2^n}Q(2t-1)\right]^2dt = 2^{2n+1}\int_0^1\left[t^n-\left(-\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k t^k(-\tfrac12)^{n-k}-\tfrac{1}{2^n}Q(2t-1)\right)\right]^2dt$$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $S(t)=-\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k t^k(-\frac12)^{n-k}-\frac{1}{2^n}Q(2t-1)$.

$S\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $N_2^2(P)=2^{2n+1}\|e_n-S\|^2$.

Ainsi $N_2^2(P)\geqslant 2^{2n+1}m_n$ et : $N_2(P)\geqslant 2^n\sqrt{2m_n}$.

Donc $\forall P\in\mathcal{P}_n,\ N_2(P)\geqslant 2^n\sqrt{2m_n}$.

b) Notons alors que : $2^n\sqrt{2m_n}=\min\limits_{P\in\mathcal{P}_n} N_2(P)$; il suffit de prouver l'existence d'un élément P de $\mathcal{P}_n$ tel que : $N_2(P)=2^n\sqrt{2m_n}$.

$m_n=\|e_n-\hat{e}_n\|$ où $\hat{e}_n$ est la projection orthogonale de e_n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$m_n=\int_0^1(e_n(t)-\hat{e}_n(t))^2dt \underset{x=2t-1\,!}{=} \int_{-1}^1\left(e_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)-\hat{e}_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)^2\frac12\,dx.$$

$$2^{2n+1}m_n=\int_{-1}^1\left(2^ne_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)-2^n\hat{e}_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)^2dx \underset{e_n(\frac{x+1}{2})=(\frac{x+1}{2})^n}{=} \int_{-1}^1\left((x+1)^n-2^n\hat{e}_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right)^2dx.$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x+1)^n-2^n\hat{e}_n(\frac{x+1}{2})$.

Alors
- $\to$ $N_2(P)=\sqrt{\int_{-1}^1 P^2(x)\,dx}=\sqrt{2^{2n+1}m_n}=2^n\sqrt{2m_n}$
- $\to$ $P\in\mathbb{R}_n[X]$ car $x\mapsto(x+1)^n$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et $x\mapsto 2^n\hat{e}_n(\frac{x+1}{2})\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- $\to$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kx^k-2^n\hat{e}_n(\frac{x+1}{2})$ donc P est unitaire car

de degré n car $x\mapsto\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kx^k-2^n\hat{e}_n(\frac{x+1}{2})$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $P\in\mathcal{P}_n$ et $N_2(P)=2^n\sqrt{2m_n}$

Résumons : $\forall P\in\mathcal{P}_n$, $N_2(P)\geqslant 2^n\sqrt{2m_n}$ et $\exists P\in\mathcal{P}_n$, $N_2(P)=2^n\sqrt{2m_n}$

Ainsi $\min\limits_{P\in\mathcal{P}_n} N_2(P)=2^n\sqrt{2m_n}$.

PARTIE II

(Q1) a) Montrons à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2" que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, T_k est une fonction polynôme de degré k de coefficient dominant 2^{k-1} (si $k \geq 1$)

→ C'est vrai pour $k=0$ et $k=1$ car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et k où k est un élément de $\mathbb{N}^*$.

$x \mapsto 2x\,T_k(x)$ est une fonction polynôme de degré $k+1$ et $x \mapsto -T_{k-1}(x)$ est une fonction polynôme de degré $k-1$; alors $x \mapsto 2x\,T_k(x) - T_{k-1}(x)$ est une fonction polynôme de degré $k+1$ dont le coefficient dominant est celui de $x \mapsto 2x\,T_k(x)$ c'est à dire est : $2 \times 2^{k-1}$ (ici $k \in \mathbb{N}^*$ donc $k \geq 1$).

Ainsi T_{k+1} est une fonction polynôme de degré $k+1$ dont le coefficient dominant est $2^{(k+1)-1}$.

Ceci achève la récurrence.

Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, T_k est une fonction polynôme de degré k de coefficient dominant 2^{k-1} (si $k \geq 1$).

b) $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$. $T_2(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_1(\cos\theta) - T_0(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

$T_1(\cos\theta) = \cos\theta$ et $T_2(\cos\theta) = \cos 2\theta$.

$T_3(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_2(\cos\theta) - T_1(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta$

$T_3(\cos\theta) = \cos(\theta+2\theta) + \cos(\theta-2\theta) - \cos\theta = \cos 3\theta$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$, $T_2(\cos\theta) = \cos 2\theta$ et $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.

→ C'est clair pour $k=0$ et $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et k, avec k élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{k+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_k(\cos\theta) - T_{k-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos((k-1)\theta)$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos(\theta + k\theta) + \cos(\theta - k\theta) - \cos((k-1)\theta) = \cos((k+1)\theta)$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.

Q2 a) • Soit $k\in[\![0,n]\!]$. $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \cos(n\times\frac{k\pi}{n}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \frac{1}{2^{n-1}}T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) - P(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(\cos(\frac{k\pi}{n}))$$

Or $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}$; $\forall x\in[-1,1]$, $-\frac{1}{2^{n-1}}<P(x)<\frac{1}{2^{n-1}}$;

$\forall x\in[-1,1]$, $-\frac{1}{2^{n-1}}-P(x)<0$ et $\frac{1}{2^{n-1}}-P(x)>0$.

Donc si $k\in[\![0,n]\!]$, ou k est pair et : $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))=\frac{1}{2^{n-1}}-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))>0$

ou k est impair et : $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))=-\frac{1}{2^{n-1}}-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))<0$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}}T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))>0 \text{ si } k \text{ est pair}\\ \frac{1}{2^{n-1}}T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))-P(\cos(\frac{k\pi}{n}))<0 \text{ si } k \text{ est impair}\end{cases}$

• Posons $L_n=\frac{1}{2^{n-1}}T_n-P$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\alpha_k=\cos(\frac{k\pi}{n})$.

Observons que : $1=\alpha_0>\alpha_1>\dots>\alpha_{n-1}>\alpha_n=-1$.

Soit k un élément de $[\![0,n-1]\!]$. L_n est continue sur $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$ et

$L_n(\alpha_{k+1})L_n(\alpha_k)<0$ car si k est pair : $L_n(\alpha_{k+1})<0$ et $L_n(\alpha_k)>0$, et si

k impair $L_n(\alpha_{k+1})>0$ et $L_n(\alpha_k)<0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que : $\exists\beta_k\in]\alpha_{k+1},\alpha_k[$, $L_n(\beta_k)=0$

$\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\exists\beta_k\in]\alpha_{k+1},\alpha_k[$, $L_n(\beta_k)=0$. L_n a au moins n zéros distincts : $\beta_0,\beta_1,\cdots\beta_{n-1}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $L_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)-P(x)$

$T_n\in\mathbb{R}_n[X]$, $\deg T_n=n$ et le coefficient de x^n dans T_n est 2^{n-1} ; alors

$\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est une fonction-polynôme de degré n unitaire ; $\frac{1}{2^{n-1}}T_n\in P_n$.

comme $P\in P_n$, L_n est une fonction-polynôme de degré au plus $n-1$.

$L_n\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et L_n admet au moins n zéros distincts donc $L_n=0$.

Ainsi $P = T_n / 2^{n-1}$.

Alors $\frac{1}{2^{n-1}} > |P(1)| = \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(1)| = \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(\cos 0)| = \frac{1}{2^{n-1}} |\cos(n 0)| = \frac{1}{2^{n-1}}$!!

Ainsi $\forall P \in P_n$, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| = \sup\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. $\forall P \in P_n$, $N_\infty(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Dans ce qui précède nous avons vu que $\frac{1}{2^{n-1}} T_n \in P_n$.

Montrons alors que $\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Il suffit de prouver que $\|T_n\|_\infty = 1$.

Soit $x \in [-1,1]$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = x$.

$|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \leq 1 = |\cos(n 0)| = |T_n(\cos 0)| = |T_n(1)|$

$\forall x \in [-1,1]$, $|T_n(x)| \leq 1 = |T_n(1)|$ donc $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = |T_n(1)| = 1$.

Alors $\|T_n\|_\infty = 1$; $\| \frac{T_n}{2^{n-1}} \|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$

$\forall P \in P_n$, $\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{1}{2^{n-1}} T_n \in P_n$ et $\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \| = \frac{1}{2^{n-1}}$

Alors $\min\limits_{P\in P_n} N_\infty(P) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

PARTIE III

Q1 a) Montrons par récurrence que, pour tout k élément de $\mathbb{N}$, U_k est une fonction polynôme de degré k, de coefficient dominant 2^k et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.

→ La propriété est vraie pour $k=0$ et $k=1$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_0(x) = 1$ et $U_1(x) = 2x$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et k (k dans $\mathbb{N}^*$) et montrons-la pour $k+1$.

$x \mapsto 2x\, U_k(x)$ est une fonction-polynôme de degré $k+1$ et de coefficient dominant $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ et $x \mapsto -U_{k-1}(x)$ est une fonction-polynôme de degré $k-1$.

Alors $U_{k+1} : x \mapsto 2x U_k(x) - U_{k-1}(x)$ est une fonction-polynôme de degré $k+1$ et de coefficient dominant 2^{k+1}.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $U_{k+1}(-x) = -2x U_k(-x) - U_{k-1}(-x) = -2x(-1)^k U_k(x) - (-1)^{k-1} U_{k-1}(x) = (-1)^{k+1}[2x U_k(x) - U_{k-1}(x)]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $U_{k+1}(-x) = (-1)^{k+1} U_{k+1}(x)$ et ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, U_k est une fonction-polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k}.

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.

b) • L'équation $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes et conjuguées : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Le cours montre alors que l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \geq 0}$ vérifiant :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0$ est le plan vectoriel engendré par les suites $((\cos k\theta)_{k\geq 0}, (\sin k\theta)_{k \geq 0})$.

Ainsi, si $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite réelle :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = 0 \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{N}, u_k = \lambda \cos k\theta + \mu \sin k\theta.$$

• Soit $\theta \in]0, \pi[$. Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = U_k(\cos\theta)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} - 2\cos\theta\, u_k + u_{k-1} = U_{k+1}(\cos\theta) - 2\cos\theta\, U_k(\cos\theta) + U_{k-1}(\cos\theta) = 0$.

Ainsi : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \lambda \cos k\theta + \mu \sin k\theta$

$u_0 = U_0(\cos\theta) = 1$ et $u_1 = U_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$.

Alors $1 = \lambda \cos 0 + \mu \sin 0 = \lambda$ et $2\cos\theta = \lambda\cos\theta + \mu \sin\theta$.

$\lambda = 1$ et $\mu = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $(\theta \in]0, \pi[)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \cos(k\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \sin(k\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta}[\cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta] = \dfrac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$

Ainsi $\forall \theta \in]0, \pi[, \forall k \in \mathbb{N}$, $U_k(\cos\theta) = \dfrac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)} \underset{0}{\sim} \frac{(k+1)\theta}{\theta} = k+1$. Donc $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = k+1$.

En particulier $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = k+1$. Or $\forall \theta \in]0,\pi[$, $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = U_k(\cos\theta)$.

$\theta \mapsto U_k(\cos\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc à droite en 0, ainsi :

$k+1 = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} U_k(\cos\theta) = U_k(\cos 0) = U_k(1)$.

$U_k(1) = k+1$ et $U_k(-1) = (-1)^k U_k(1) = (-1)^k(k+1)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k(1) = k+1$ et $U_k(-1) = (-1)^k(k+1)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$.

En dérivant il vient : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-\sin\theta\, T'_{k+1}(\cos\theta) = -(k+1)\sin((k+1)\theta)$

Alors $\forall \theta \in]0,\pi[$, $T'_{k+1}(\cos\theta) = (k+1)\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta} = (k+1)\, U_k(\cos\theta)$.

$\forall \theta \in]0,\pi[$, $(T'_{k+1} - (k+1)U_k)(\cos\theta) = 0$; $\forall x \in]-1,1[$, $(T'_{k+1} - (k+1)U_k)(x) = 0$

Alors $T'_{k+1} - (k+1)U_k$ est une fonction polynômiale ayant une infinité de zéros ;

$T'_{k+1} - (k+1)U_k$ est la fonction nulle. $T'_{k+1} = (k+1)U_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $T'_{k+1} = (k+1)U_k$.

Q2) a) Soit $\varphi \in P_n$. Comme $P \in P_n$, $\varphi - P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi - P)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

Alors $\int_{-1}^{1} (P(x) - \varphi(x))\, \mathrm{sgn}(P(x))\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^{1} x^k\, \mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0$.

Donc $\forall \varphi \in P_n$, $\int_{-1}^{1} (P(x) - \varphi(x))\, \mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0$.

b) Soit $\varphi \in P_n$ (?!). $\int_{-1}^{1} (\varphi(x) - P(x))\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = 0$

Alors $N_1(P) = \int_{-1}^{1} |P(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx$.

Notons que $N_1(P) \geq 0$; alors $N_1(P) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx = \left|\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx\right|$

$$N_1(P) = \left|\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{Sgn}(P(x))\,dx\right| \leq \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\,|\mathrm{Sgn}(P(x))|\,dx \leq \int_{-1}^{1} |\varphi(x)| \times 1\,dx = N_1(\varphi).$$

Alors $\forall \varphi \in P_n, \quad N_1(P) \leq N_1(\varphi).$

c) $N_1(U_n) = \int_{-1}^{1} |U_n(x)|\,dx \underset{x = \cos\frac{\theta}{n+1}}{=} \int_{(n+1)\pi}^{0} \left| U_n\left(\cos\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\right)\right| \left(\frac{-1}{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\right) d\theta$

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} \sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right) \left|U_n\left(\cos\left(\frac{\theta}{n+1}\right)\right)\right| d\theta = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} \sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right) \times \left| \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right)} \right| d\theta$$

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} \sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right) \frac{|\sin(\theta)|}{\sin\left(\frac{\theta}{n+1}\right)}\,d\theta = \frac{1}{n+1} \int_0^{(n+1)\pi} |\sin(\theta)|\,d\theta$$

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} |\sin(\theta)|\,d\theta = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} (-1)^\ell \sin(\theta)\,d\theta$$

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \Big[-\cos\theta\Big]_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \left[-\cos(\ell+1)\pi + \cos\ell\pi\right]$$

$$N_1(U_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \left[-(-1)^{\ell+1} + (-1)^\ell\right] = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} 2 = 2. \quad N_1(U_n) = 2.$$

$\frac{U_n}{2^n} \in P_n$ car U_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n.

Supposons que $\frac{U_n}{2^n}$ vérifie (*).

Alors $\forall \varphi \in P_n, \quad N_1\left(\frac{U_n}{2^n}\right) \leq N_1(\varphi)$; donc $\min_{\varphi \in P_n} N_1(\varphi) = N_1\left(\frac{U_n}{2^n}\right).$

Or $N_1\left(\frac{U_n}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} N_1(U_n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$

Ainsi $\min_{\varphi \in P_n} N_1(\varphi) = \frac{1}{2^{n-1}}.$

(Q3) a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. $\frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$.

$$U_n(\cos \frac{j\pi}{n+1}) = \frac{\sin((n+1)\frac{j\pi}{n+1})}{\sin(\frac{j\pi}{n+1})} = \frac{\sin((n+1)\pi)}{\sin(\frac{j\pi}{n+1})} = 0 \; ; \; U_n(c_j) = 0 .$$

$U_n(c_0) = U_n(\cos 0) = U_n(1) = (n+1)$. $U_n(c_{n+1}) = U_n(\cos \pi) = U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$.

$\underline{U_n(c_0) = n+1 \;,\; \forall j \in [\![1, n]\!],\; U_n(c_j) = 0 \;,\; U_n(c_{n+1}) = (-1)^n(n+1).}$

Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. $]c_{j+1}, c_j[\subset]-1, 1[$.

Soit $x \in]c_{j+1}, c_j[$; $\exists! \theta \in [0, \pi]$, $x = \cos\theta$.

$c_{j+1} < x < c_j$ donc $\cos(\frac{(j+1)\pi}{n+1}) < \cos\theta < \cos\frac{j\pi}{n+1}$ et cos est strictement décroissante

sur $[0, \pi]$; ainsi $\frac{(j+1)\pi}{n+1} > \theta > \frac{j\pi}{n+1}$; en particulier $\theta \in]0, \pi[$!

$$U_n(x) = U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} .$$

$\theta \in]0, \pi[$ donc $\sin\theta > 0$. $(n+1)\theta \in]j\pi, (j+1)\pi[$ donc $\sin((n+1)\theta) > 0$ si j est pair et $\sin((n+1)\theta) < 0$ si j est impair.

$U_n(x) > 0$ si j est pair et $U_n(x) < 0$ si j est impair.

$\underline{\forall j \in [\![0, n-1]\!],\; U_n \text{ est strictement positive sur }]c_{j+1}, c_j[\text{ si } j \text{ est pair et}}$

$\underline{\text{strictement négative si } j \text{ est impair.}}$

b) Supposons k dans $[\![0, n-1]\!]$ et $n+k$ impair. $(-1)^{n+k} = -1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x)^k \operatorname{sgn}(U_n(-x)) = (-1)^k x^k \operatorname{sgn}((-1)^n U_n(x)) = (-1)^k x^k (-1)^n \operatorname{sgn}(U_n(x))$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x)^k \operatorname{sgn}(U_n(-x)) = (-1)^{n+k} x^k \operatorname{sgn}(U_n(x)) = -x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))$.

Alors $x \mapsto x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\underline{I_k = \int_{-1}^{1} x^k \operatorname{sgn}(U_n(x))\,dx = 0 \text{ si } n+k \text{ est impair.}}$

c) Supposons $n+k$ pair.

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^k \, sgn(U_n(x))\,dx = \sum_{j=0}^{n} \int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k \, sgn(U_n(x))\,dx.$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. $\forall x \in]c_{j+1}, c_j[$, $sgn(U_n(x)) = (-1)^j$ d'après b.

ceci suffit alors largement (!) pour dire que : $\int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k sgn(U_n(x))\,dx = \int_{c_{j+1}}^{c_j} (-1)^j x^k dx$

Alors $I_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_{c_{j+1}}^{c_j} x^k\,dx = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dfrac{c_j^{k+1} - c_{j+1}^{k+1}}{k+1}$.

$$I_k = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1} - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} c_j^{k+1}\right)$$

$$I_k = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1} + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j c_j^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\left(2\sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1} + (-1)^{n+1} c_{n+1}^{k+1} - c_0^{k+1}\right)$$

$c_{n+1} = \cos\frac{(n+1)\pi}{n+1} = \cos\pi = (-1)^{n+1}$; $c_{n+1}^{k+1} = \left[(-1)^{n+1}\right]^{k+1} = (-1)^{nk+k+n+1} \underset{n+k \text{ est pair}}{=} (-1)^{nk+1}$

$(-1)^{n+1} c_{n+1}^{k+1} = (-1)^{n+1+nk+1} = (-1)^{n(k+1)}$

ou n est pair et $(-1)^{n(k+1)}$ est égal à 1, ou n est impair et alors k est également impair ($n+k$ est pair) et $k+1$ est ainsi pair ce qui donne encore $(-1)^{n(k+1)} = 1$

Donc $(-1)^{n+1} c_{n+1}^{k+1} - c_0^{k+1} = 1 - \left(\cos\left(\frac{0\pi}{n+1}\right)\right)^{k+1} = 1 - 1^{k+1} = 0$.

Alors $I_k = \dfrac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j^{k+1}$ si $n+k$ est pair.

$c_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) = Re\left(e^{i\frac{j\pi}{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{j\pi}{n+1}} + e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}\right)$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

Posons pour simplifier les écritures : $\alpha = e^{i\frac{\pi}{n+1}}$.

$\forall j \in [\![0, n]\!]$, $c_j = \frac{1}{2}(\alpha^j + \alpha^{-j})$.

$$I_\ell = \frac{2}{\ell+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{1}{2^{\ell+1}}\left(\alpha^j+\alpha^{-j}\right)^{\ell+1} = \frac{1}{2^\ell(\ell+1)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{r=0}^{\ell+1}C_{\ell+1}^r\left(\alpha^j\right)^{\ell+1-r}\left(\alpha^{-j}\right)^r$$

$$I_\ell = \frac{1}{2^\ell(\ell+1)}\sum_{r=0}^{\ell+1}C_{\ell+1}^r\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\alpha^{\ell+1-2r}\right)^j = \frac{1}{2^\ell(\ell+1)}\sum_{r=0}^{\ell+1}C_{\ell+1}^r\sum_{j=0}^{n}\left(-\alpha^{\ell+1-2r}\right)^j.$$

Soit $r\in[\![0,\ell+1]\!]$.

$$-\alpha^{\ell+1-2r}=1 \iff e^{i(\ell+1-2r)\frac{\pi}{n+1}}=-1 \iff (\ell+1-2r)\frac{\pi}{n+1}\equiv\pi\ [2\pi]$$

$$-\alpha^{\ell+1-2r}=1 \iff \ell+1-2r\equiv n+1\ [2(n+1)] \iff \ell-2r\equiv n\ [2(n+1)].$$

$r\in[\![0,\ell+1]\!]$; $\ell-2r\in[\![-\ell-2,\ell]\!]\subset[\![-(n+1),n-1]\!]$; $\ell-2r-n\in[\![-2n-1,-1]\!]$

Ainsi $\ell-2r-n\not\equiv 0\ [2(n+1)]$; $\ell-2r\not\equiv n\ [2(n+1)]$; $\alpha^{\ell+1-2r}\neq-1$.

Alors $$I_\ell = \frac{1}{2^\ell(\ell+1)}\sum_{r=0}^{\ell+1}C_{\ell+1}^r\,\frac{1-\left(-\alpha^{\ell+1-2r}\right)^{n+1}}{1+\alpha^{\ell+1-2r}}$$

$$\forall r\in[\![0,\ell+1]\!],\ \left(-\alpha^{\ell+1-2r}\right)^{n+1}=(-1)^{n+1}\left(\left(e^{i\frac{\pi}{n+1}}\right)^{\ell+1-2r}\right)^{n+1}=(-1)^{n+1}e^{i\pi(\ell+1-2r)}$$

$$\forall r\in[\![0,\ell+1]\!],\ \left(-\alpha^{\ell+1-2r}\right)^{n+1}=(-1)^{n+1}(-1)^{\ell+1-2r}=(-1)^{n+\ell+2-2r}\underset{\uparrow}{=}1$$

$n+\ell+2-2r$ est pair.

Alors $$I_\ell = \frac{1}{2^\ell(\ell+1)}\sum_{r=0}^{\ell+1}C_{\ell+1}^r\,\frac{1-1}{1+\alpha^{\ell+1-2r}} = 0$$

Finalement : $\underline{\underline{\forall \ell\in[\![0,n-1]\!],\ I_\ell=0.}}$

$\frac{U_n}{2^n}\in P_n$ et $\forall \ell\in[\![0,n-1]\!],\ \int_{-1}^{1}x^\ell\,\mathrm{sgn}(U_n(x))\,dx=0$; $\mathrm{sgn}\,U_n=\mathrm{sgn}\,\frac{U_n}{2^n}$.

donc $\frac{U_n}{2^n}\in P_n$ et $\forall \ell\in[\![0,n-1]\!],\ \int_{-1}^{1}x^\ell\,\mathrm{sgn}\left(\frac{U_n}{2^n}(x)\right)dx=0$

Ainsi $\frac{U_n}{2^n}$ vérifie bien les hypothèses de §2.

Ne reste plus qu'à parler de l'épisode de "$\int_{-1}^{1}x^\ell\,\mathrm{sgn}(P(x))\,dx$" mais pour aujourd'hui ça suffit !