PARTIE I T. 72

7 (Q1) Calcul de probabilités.

1 a) $p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)$.

4 b) Considérons une épreuve à laquelle participent A, B et C.

Notons EA (resp. EB ; resp. EC) l'événement A (resp. B ; resp. C) reste en vie.

On cherche ici la probabilité de l'événement : $EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC}) = (EA \cap \overline{EB}) \cup (EA \cap \overline{EC})$.

$p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) \overset{a)}{=} p(EA \cap \overline{EB}) + p(EA \cap \overline{EC}) - p(EA \cap \overline{EB} \cap \overline{EA} \cap \overline{EC})$

$p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = p(EA \cap \overline{EB}) + p(EA \cap \overline{EC}) - p(EA \cap \overline{EB} \cap \overline{EC})$. Par indépendance il vient : $p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = p(EA)p(\overline{EB}) + p(EA)p(\overline{EC}) - p(EA)p(\overline{EB})p(\overline{EC})$.

$p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{18}(3+2-1) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

$p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = \frac{2}{9}$.

Remarque.. $EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})$ se réalise si et seulement si A est tué au cours de l'épreuve et B et C ne le sont pas.

2 c) $p(\overline{EB} \cup \overline{EC}) = p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) + p(\overline{EA} \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC}))$.

Ainsi $p(\overline{EA} \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = p(\overline{EB} \cup \overline{EC}) - p(EA \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC}))$

$p(\overline{EA} \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = p(\overline{EB}) + p(\overline{EC}) - p(\overline{EB} \cap \overline{EC}) - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{9+6-3-4}{18}$

$p(\overline{EB} \cap \overline{EC}) = p(\overline{EB})p(\overline{EC})$

$p(\overline{EA} \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})) = \frac{4}{9}$.

Remarque.. $\overline{EA} \cap (\overline{EB} \cup \overline{EC})$ se réalise si et seulement si A et B sont tués.

13 (Q2) Détermination de probabilités conditionnelles.

1 a) Tant que A et B sont vivants personne ne tire sur C. Il est donc impossible que A et B restent vivants et que C soit tué.

L'événement AB_n est donc impossible.

3. b) Sachant que ABC_n est réalisé, ABC_{n+1} se réalise si et seulement les trois tireurs ratent leur tir à la $n^{ième}$ épreuve ; l'indépendance des tirs nous donne alors

$p(ABC_{n+1}/ABC_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.

4 c) Sachant que ABC_n est réalisé, BC_{n+1} se réalise si et seulement si A est tué et B et C restent vivants ; autrement dit, si A rate son tir et B ou C réussissent leur tir.

D'après Q 1 b) : $p(BC_{n+1}/ABC_n) = \frac{2}{9}$.

Sachant que ABC_n est réalisé, CA_{n+1} se réalise si et seulement si A et C restent vivants et B est tué ; autrement dit si et seulement si A réussit son tir et B et C ratent leur tir.

L'indépendance des tirs donne : $p(CA_{n+1}/ABC_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

4 d) Accélérons !

$p(A_{n+1}/ABC_n) = 0$; si A, B, C participent à la $n^{ième}$ épreuve, C ne peut pas être tué.

$p(B_{n+1}/ABC_n) = 0$ pour les mêmes raisons.

$p(C_{n+1}/ABC_n) = \frac{4}{9}$; à la $n^{ième}$ épreuve A réussit son tir et B ou C réussissent leur tir et on retrouve la situation de Q 1 c).

4 e) $p(A_{n+1}/CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; à la $n^{ième}$ épreuve A réussit son tir et C le rate ...

$p(B_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; à la $n^{ième}$ épreuve B réussit son tir et C le rate ...

$p(C_{n+1}/CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; à la $n^{ième}$ épreuve C réussit son tir et A le rate

$p(C_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; à la $n^{ième}$ épreuve B rate son tir et C le réussit.

3. f) $p(\emptyset_{n+1}/ABC_n) = 0$ car C ne peut pas être tiré à une épreuve où participent A et B.

$p(\emptyset_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; B et C ratant leur tir à la $n+1^{ème}$ épreuve.

$p(\emptyset_{n+1}|CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; C et A ratant leur tir à la $n+1^{ème}$ épreuve.

Nous allons résumer ces résultats dans un tableau à double entrée. À l'intersection de la colonne portant l'événement U et de la ligne portant l'événement V nous écrivons $p(V/U)$

ABC_n	BC_n	CA_n	A_n	B_n	C_n	$\emptyset_n$	
$\frac{1}{9}$	◌	◌	◌	◌	◌	◌	ABC_{n+1}
$\frac{2}{9}$	• $(\frac{1}{3})$	◌	◌	◌	◌	◌	BC_{n+1}
$\frac{2}{9}$	◌	•• $(\frac{2}{9})$	◌	◌	◌	◌	CA_{n+1}
0	◌	$\frac{4}{9}$	1	◌	◌	◌	A_{n+1}
0	$\frac{1}{3}$	◌	◌	1	◌	◌	B_{n+1}
$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	◌	◌	1	◌	C_{n+1}
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	◌	◌	◌	1	$\emptyset_{n+1}$

◌ = 0 provenant d'une réunion quasi-impossible !

1 : est quasi-certain que le survivant ne se suicide pas

1 = 1 réunion quasi impossible.

Tiens il y a 2 trous. Pour finir la page bouchons les !

• $p(BC_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; B et C ratent leur tir...

•• $p(CA_{n+1}/CA_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$; C et A ratent leur tir...

18 (Q3) a) $\{T=1\}$ se réalise si et seulement si à la fin de la première épreuve
1 il ne reste plus qu'un tireur qui ne peut être que C.

$\{T=1\}$ se réalise si et seulement si à la première épreuve A et B sont tués.

$\{T=1\}$ se réalise si et seulement si A réussit son tir et B ou C réussit son tir.

D'après Q1 c) : $\underline{\underline{p(T=1)=\frac{4}{9}}}$.

3 b) $ABC_1\cap\cdots\cap ABC_n = ABC_0\cap ABC_1\cap\cdots\cap ABC_n$!

Alors $p(ABC_1\cap\cdots\cap ABC_n)=p(ABC_0)\,p(ABC_1/ABC_0)\,p(ABC_2/ABC_0\cap ABC_1)\cdots p(ABC_n/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_{n-1})$.

Notons que $p(ABC_{k+1}/ABC_0\cap ABC_1\cap\cdots\cap ABC_k)=p(ABC_{k+1}/ABC_k)=\frac{1}{9}$ pour $k\in\mathbb{N}$

$$p(ABC_1\cap\cdots\cap ABC_n)=p(ABC_0)\prod_{k=0}^{n-1}p(ABC_{k+1}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k)=1\times\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Donc $\underline{\underline{p(ABC_1\cap\cdots\cap ABC_n)=\left(\frac{1}{9}\right)^n}}$ pour tout $n\in[\![1,+\infty[\![$ et même pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

6 c) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. Posons $H_n^k=ABC_1\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\cap\cdots\cap CA_n$.

$ABC_1\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\cap\cdots\cap CA_n=ABC_0\cap ABC_1\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\cap\cdots\cap CA_n$.

$p(H_n^k)=p(ABC_0)\,p(ABC_1/ABC_0)\cdots p(ABC_k/ABC_0\cap ABC_1\cap\cdots\cap ABC_{k-1})\,p(CA_{k+1}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k)\times$

$p(CA_{k+2}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1})\cdots p(CA_n/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\cap\cdots\cap CA_{n-1})$.

$$p(H_n^k)=\left[\prod_{i=0}^{k-1}p(ABC_{i+1}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_i)\right]p(CA_{k+1}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k)\prod_{j=k+1}^{n-1}p(CA_{j+1}/ABC_0\cap\cdots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\cap\cdots\cap CA_j)$$

Ceci a deux cas particuliers : $k=0$ et $k=n-1$ (pour $k=0$ le premier produit vaut 1 et pour $k=n-1$ c'est le second qui vaut 1 !)

Nous pouvons encore écrire :

$$p(H_n^k)=\left[\prod_{i=0}^{k-1}p(ABC_{i+1}/ABC_i)\right]p(CA_{k+1}/ABC_k)\prod_{j=k+1}^{n-1}p(CA_{j+1}/CA_j)$$

Ceci donne encore : $p(H_n^k)=\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{9}\right)\frac{2}{9}\prod_{j=k+1}^{n-1}\frac{2}{9}$ d'après Q2 et mon commentaire !

$$p(H_n^\ell) = \left(\frac{1}{9}\right)^\ell \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1-\ell}$$

$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!]$, $p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^\ell \left(\frac{2}{9}\right)^{n-\ell} = \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(\frac{2}{9}\right)^n$

Alors $p\left(\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{union disjointe}}}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$

Ainsi $p\left(\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_n)\right) = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right).$

6 d) Soit $\ell \in [\![0,n-1]\!]$. Posons $\hat{H}_n^\ell = ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_n)$. En raisonnant comme dans c) on obtient :

$p(\hat{H}_n^\ell) = \left[\prod_{i=0}^{\ell-1} p(ABC_{i+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_i\right] p(BC_{\ell+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_\ell) \prod_{j=\ell+1}^{n-1} p(BC_{j+1} / ABC_0 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_j)$

Alors il vient :

$$p(\hat{H}_n^\ell) = \left[\prod_{i=0}^{\ell-1} p(ABC_{i+1}/ABC_i)\right] p(BC_{\ell+1}/ABC_\ell) \prod_{j=\ell+1}^{n-1} p(BC_{j+1}/BC_j).$$

$$p(\hat{H}_n^\ell) = \left(\frac{1}{9}\right)^\ell \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-\ell} = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{9}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{-\ell} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!]$, $p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

$p\left(\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_n)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{union disj}}}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$

$$p\left(\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_n)\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

6 e) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

Notons que $\{T > n\} = \left(\underbrace{\bigcup_{\ell=1}^{n} ABC_\ell}_{L}\right) \cup \left(\underbrace{\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_n)}_{L'}\right) \cup$
$\left(\underbrace{\bigcup_{\ell=0}^{n-1}(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_n)}_{L''}\right)$

Notons que les événements L, L' et L'' sont deux à deux disjoints.

Alors $p(T>n) = p(\omega) + p(\omega') + p(\omega'')$; ceci donne encore :

$$p(T>n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n - 2\left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n . \qquad \underline{\underline{p(T>n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n .}}$$

Pour $n=0$: $-2\left(\frac{1}{9}\right)^0 + 2\left(\frac{2}{9}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -2+2+1 = 1 = p(T>0)$.

Pour $n=1$: $-2\left(\frac{1}{9}\right)^1 + 2\left(\frac{2}{9}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

$p(ABC_1) = p(ABC_1 / ABC_0)\,p(ABC_0)$
$p(CA_1) = p(CA_1 / ABC_0)\,p(ABC_0)$
$p(BC_1) = p(BC_1 / ABC_0)\,p(ABC_0)$

Or $p(T>1) = p(ABC_1 \cup CA_1 \cup BC_1) = p(ABC_1) + p(CA_1) + p(BC_1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ p(T>n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 2\left(\frac{2}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n .}}$

Ceci entraîne alors à écrire que :

$\forall n \in \underline{\underline{\mathbb{N}^*}}$, $p(T=n) = p(T>n-1) - p(T>n) = -2\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{9}\right)^n - 2\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(T=n) = \left(-2+\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \left(2-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(T=n) = -\frac{16}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -16\left(\frac{1}{9}\right)^n + 7\left(\frac{2}{9}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n .}}$

Notons que si $n=1$: $-\frac{16}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{1-1} + \frac{14}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{1-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = -\frac{16}{9} + \frac{14}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$; on retrouve ainsi le résultat de Q3 a).

6 f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=n) = -\frac{16}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

↑ les trois séries convergent ($\left|\frac{1}{9}\right|<1$, $\left|\frac{2}{9}\right|<1$ et $\left|\frac{1}{3}\right|<1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=n) = -\frac{16}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{14}{9}\,\frac{1}{1-\frac{2}{9}} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -2 + 2 + 1 = 1 .$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} p(T=n) = 1$ et c'est heureux !

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,p(T=n) \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,p(T=n) = -\frac{16}{9} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9} n \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Les séries de termes généraux $n\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$, $n\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$ et $n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ convergent car $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$, $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$; donc la série de terme général $n\,p(T=n)$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes ; elle est même absolument convergente car à termes positifs.

Ainsi T possède une espérance.

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p(T=n) = -\frac{16}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{14}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$E(T) = -\frac{16}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2} + \frac{14}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{2}{9}\right)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{18}{8} + \frac{18}{7} + \frac{3}{2} = \frac{102}{56}$$

$E(T) = \frac{51}{28}$ $\qquad E(T) \simeq 1{,}8$ $\qquad$ Ça descend rapide, hein !

18 (Q4) a) 3 Nécessairement C réussit à la première épreuve, donc l'événement A_1 est impossible.

L'événement A correspondant le contact à l'issue de la nième épreuve est impossible pour $n = 1$.

Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$.

$p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap A_n) = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1}) \times$

$p(A_n / ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1})$

$\overset{Q3\,c)}{=} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times p(A_n / CA_{n-1})$ ok !

$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{4}{9}\right)$ d'après Q2 c

Alors $p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap A_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2}{9}\right)^n$.

3. b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Notons GA_n l'événement A gagne après la $n^{ième}$ épreuve.

Notons que pour l'emporter A doit d'abord tuer B puis C.

Ainsi $GA_n = \bigcup_{\ell=0}^{n-2} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n)$.

Cette réunion étant disjointe : $p(GA_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n)$.

$$p(GA_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} 2\left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(\frac{2}{9}\right)^n = 2\left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-(1/2)} = 4\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ p(GA_n) = \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$; ceci vaut encore pour $n = 1$.

3 c) Notons G_A l'événement A gagne. $G_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} GA_n$.

$$p(G_A) = p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} GA_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(GA_n) = \frac{8}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{8}{9}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right]$$

union disjointe — les 2 séries convergent

$$p(G_A) = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{1-2/9} - \frac{1}{1-1/9}\right) = \frac{8}{9}\left(\frac{9}{7} - \frac{9}{8}\right) = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}.$$

A gagne avec la probabilité $\frac{1}{7}$.

3 d) Le problème est analogue au précédent... nous irons plus vite.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ GB_n = \bigcup_{\ell=0}^{n-2} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_{n-1} \cap B_n)$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ p(GB_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cdots \cap BC_{n-1}) \times p(B_n / ABC_1 \cap \dots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \dots \cap BC_{n-1})$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ p(GB_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell p(B_n / BC_{n-1}) = \sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell \frac{1}{3}$

cf 3 d) — cf 2 e)

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ p(GB_n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^\ell = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1-(1/3)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right).$$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $p(GB_n) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$.

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(GB_n) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$ car $p(B_1) = 0$.

Soit G_B l'événement B gagne.

$$p(G_B) = p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} GB_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(GB_n) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)$$

$$p(G_B) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

B gagne avec la probabilité $\frac{1}{8}$.

6 c) Ici c'est plus compliqué.

Il y a trois possibilités

→ A et B se tuent à la même épreuve

→ A tue B puis C tue A

→ B tue A puis C tue B

Notons que $p(C_1) = \frac{4}{9}$ d'après Q 1 c) (A tue B et B ou C tue A)

Supposons $n \geq 2$.

$$GC_n = (ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) \cup \left(\bigcup_{\ell=0}^{n-2}(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap C_n)\right)$$
$$\cup \left(\bigcup_{\ell=0}^{n-2}(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_\ell \cap BC_{\ell+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1} \cap C_n)\right)$$

$$p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1})\, p(C_n \mid ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1}).$$
$$= \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} p(C_n / ABC_{n-1}) = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right).$$

$$p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1} \cap C_n) = p(ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_\ell \cap CA_{\ell+1} \cap \cdots \cap CA_{n-1})\, p(C_n / CA_{n-1})$$
$$= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}\frac{1}{3}$$

$$p(ABC_1\cap\dots\cap ABC_\ell\cap BC_{\ell+1}\cap\dots\cap BC_{n-1}\cap C_n)=p(ABC_1\cap\dots\cap ABC_\ell\cap BC_{\ell+1}\cap\dots\cap BC_{n-1})\,p(C_n\,|\,BC_{n-1})$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}.$$

Alors $p(GC_n)=p(ABC_1\cap\dots\cap ABC_{n-1}\cap C_n)+\sum_{\ell=0}^{n-2}p(ABC_1\cap\dots\cap ABC_\ell\cap CA_{\ell+1}\cap\dots\cap CA_{n-1}\cap C_n)$

$$+\sum_{\ell=0}^{n-2}p(ABC_1\cap\dots\cap ABC_\ell\cap BC_{\ell+1}\cap\dots\cap BC_{n-1}\cap C_n).$$

$$p(GC_n)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{1}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}+\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}.$$

$$p(GC_n)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1-(1/3)^{n-1}}{1-1/3}.$$

$$p(GC_n)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)+\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right).$$

$$p(GC_n)=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Comme $p(GC_1)=\frac{4}{9}$ ceci vaut encore pour $n=1$, non !

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p(GC_n)=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Soit G_C l'événement C gagne. $G_C=\bigcup_{n=1}^{+\infty}GC_n$

$$p(G_C)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(GC_n)=\frac{1}{18}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p(G_C)=\frac{1}{18}\times\frac{1}{1-1/9}+\frac{2}{9}\,\frac{1}{1-2/9}+\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-1/3}=\frac{1}{16}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{67}{112}.$$

La probabilité pour que C gagne est $\frac{67}{112}$.

PARTIE II   Total 48

10

Q1 Expression de la matrice de transition.

9 a) Tout est fait dans Q2 b) non ?!

Soit $n \in \mathbb{N}$. $ABC_{n+1} \subset ABC_n$.

$$p(ABC_{n+1}) = p(ABC_{n+1} \cap ABC_n) = p(ABC_{n+1}/ABC_n)\,p(ABC_n) = \frac{1}{9}\,p(ABC_n).$$

. $BC_{n+1} \subset ABC_n \cup BC_n$.

Alors $p(BC_{n+1}) = p(BC_{n+1} \cap ABC_n) + p(BC_{n+1} \cap BC_n)$.

$$= p(BC_{n+1}/ABC_n)\,p(ABC_n) + p(BC_{n+1}/BC_n)\,p(BC_n)$$

$$p(BC_{n+1}) = \frac{2}{9}\,p(ABC_n) + \frac{1}{3}\,p(BC_n).$$

Par des considérations analogues : $p(CA_{n+1}) = \frac{2}{9}\,p(ABC_n) + \frac{2}{9}\,p(CA_n)$.

$A_{n+1} \subset CA_n \cup A_n$. $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap CA_n) + p(A_{n+1} \cap A_n)$

$$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}/CA_n)\,p(CA_n) + p(A_{n+1}/A_n)\,p(A_n)$$

$$p(A_{n+1}) = \frac{4}{9}\,p(CA_n) + p(A_n).$$

Par des considérations analogues : $p(B_{n+1}) = \frac{1}{3}\,p(BC_n) + p(B_n)$.

$C_{n+1} \subset ABC_n \cup BC_n \cup CA_n \cup C_n$.

$$p(C_{n+1}) = p(C_{n+1} \cap ABC_n) + p(C_{n+1} \cap BC_n) + p(C_{n+1} \cap CA_n) + p(C_{n+1} \cap C_n)$$

$$p(C_{n+1}) = p(C_{n+1}/ABC_n)\,p(ABC_n) + p(C_{n+1}/BC_n)\,p(BC_n) + p(C_{n+1}/CA_n)\,p(CA_n) + p(C_{n+1}/C_n)\,p(C_n).$$

$$p(C_{n+1}) = \frac{4}{9}\,p(ABC_n) + \frac{1}{6}\,p(BC_n) + \frac{1}{9}\,p(CA_n) + p(C_n).$$

Par des considérations analogues $p(\Phi_{n+1}) = \frac{1}{6}p(C_n) + \frac{2}{9}p(CA_n) + p(\Phi_n)$.

En posant $\Pi = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 2/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} = \Pi E_n$

Notons que la somme des éléments de chaque colonne vaut 1

1 b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} = \Pi E_n$. Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n = \Pi^n E_0$.

Notons que $E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, E_n est la première colonne de Π^n.

8 (Q2) Calcul des puissances de la matrice Π.

4 a) $\Pi'\Pi'' = \begin{bmatrix} U' & 0 \\ V' & I_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U'' & 0 \\ V'' & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'U'' + 0V'' & U'0 + 0I_4 \\ V'U'' + I_4V'' & V'0 + I_4I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'U' & 0 \\ V'U' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$

$\Pi'\Pi'' = \begin{bmatrix} U'U'' & 0 \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$.

1 b) d'après II § 1 a) : $\Pi = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix}$ avec $U = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 2/9 & 1/3 & 0 \\ 2/9 & 0 & 2/9 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/9 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 4/9 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 2/9 \end{bmatrix}$.

3 c) Montrons ce résultat par récurrence ; montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V\sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \Pi^1 = \Pi = \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^1 & 0 \\ V\sum_{k=0}^{1-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}$, la propriété est vraie pour $n = 1$

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V\sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^n U & 0 \\ (V\sum U^k)U + V & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{n+1} & 0 \\ V\sum_{k=0}^{n-1} U^{k+1} + V & I_4 \end{bmatrix}$$

Or $V\sum_{k=0}^{n-1} U^{k+1} + V = V\left(\sum_{k=1}^{n} U^k + I_4\right) = V\sum_{k=0}^{n} U^k = V\sum_{k=0}^{n+1-1} U^k$ ... ce qui achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V\sum_{k=0}^{n-1} U^k & I_4 \end{bmatrix}.$$

$\frac{11}{6}$ Q3) a) U est triangulaire supérieure ; ainsi l'ensemble des valeurs propres de U est l'ensemble des éléments de sa diagonale ; $Sp(U) = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}\}$.

$U \in M_3(\mathbb{R})$ et U admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Alors 1) U est diagonalisable

2) Les sous-espaces propres de U sont des droites vectorielles.

Notons que $U\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $U\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4/9\end{pmatrix} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Posons alors $V_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$U\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}x = \frac{1}{9}x \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}y \\ \frac{6}{9}x + \frac{4}{9}z = \frac{1}{9}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = y \\ 2x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$SEP(U, \frac{1}{9}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$. Posons alors $V_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est le vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ dont la 1ère composante vaut 1

$V_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{2}{9}$ dont la 3ème composante vaut 1

$V_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ——— $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ dont la 2ème ———

5 b) V_1, V_2, V_3 sont trois vecteurs propres de U associés à des valeurs propres distinctes.
Ainsi (V_1, V_2, V_3) est une famille LIBRE de trois éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 ; (V_1, V_2, V_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de passage P de la base canonique $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$ à la base (V_1, V_2, V_3) est donc inversible ; P^{-1} est la matrice de passage de (V_1, V_2, V_3) à $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$.

Rappelons que : $V_1 = \hat{E}_1 - \hat{E}_2 - 2\hat{E}_3$, $V_2 = \hat{E}_3$ et $V_3 = \hat{E}_2$.

Alors $\hat{E}_2 = V_3$, $\hat{E}_3 = V_2$ et $\hat{E}_1 = V_1 + V_3 + 2V_2 = V_1 + 2V_2 + V_3$.

Alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Alors $D = P^{-1} U P = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

19 Q4 a) 4

$D^n = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (1/9)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2/9)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{bmatrix}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_3 + D + \cdots + D^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} D^k = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} (1/9)^k & 0 & 0 \\ 0 & (2/9)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1}(1/9)^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1}(2/9)^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n-1}(1/3)^k \end{bmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_3 + D + \cdots + D^{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-(1/9)^n}{1-1/9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(2/9)^n}{1-(2/9)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-(1/3)^n}{1-(1/3)} \end{bmatrix}$

b) $\left|\frac{1}{9}\right|<1$, $\left|\frac{2}{9}\right|<1$, $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$ et

1o

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_3+D+D^2+\cdots+D^{n-1}\right)=\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 0 & 9/7 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{bmatrix}.$$

$D=P^{-1}UP$; $U=PDP^{-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $U^n = PD^nP^{-1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} U^n = P0P^{-1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} U^n = 0$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_3+U+U^2+\cdots+U^{n-1}=\sum_{\ell=0}^{n-1}U^\ell=\sum_{\ell=0}^{n-1}PD^\ell P^{-1}=P\sum_{\ell=0}^{n-1}D^\ell P^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\ell=0}^{n-1}D^\ell=\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 0 & 9/7 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{bmatrix} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(I_3+U+U^2+\cdots+U^{n-1}\right)=P\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 0 & 9/7 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{bmatrix}P^{-1}$$

Un calcul simple donne : $P\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 0 & 9/7 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 3/8 & 3/2 & 0\\ 9/28 & 0 & 9/7\end{bmatrix}.$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_3+U+U^2+\cdots+U^{n-1}\right)=\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 3/8 & 3/2 & 0\\ 9/28 & 0 & 9/7\end{bmatrix}.$$

$$V\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 3/8 & 3/2 & 0\\ 9/28 & 0 & 9/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/9\\ 0 & 1/3 & 0\\ 4/9 & 1/6 & 1/9\\ 0 & 1/6 & 2/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9/8 & 0 & 0\\ 3/8 & 3/2 & 0\\ 9/28 & 0 & 9/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 4/7\\ 1/8 & 1/2 & 0\\ 67/112 & 1/4 & 1/7\\ 15/112 & 1/4 & 2/7\end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(V+VU+VU^2+\cdots+VU^{n-1}\right)=\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 4/7\\ 1/8 & 1/2 & 0\\ 67/112 & 1/4 & 1/7\\ 15/112 & 1/4 & 2/7\end{bmatrix}$$

c) 3

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Pi^n=\begin{bmatrix} U^n & 0\\ V\sum\limits_{\ell=0}^{n-1}U^\ell & I_4\end{bmatrix}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\Pi^n=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ H & I_4\end{bmatrix}$ avec $H=\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 4/7\\ 1/8 & 1/2 & 0\\ 67/112 & 1/4 & 1/7\\ 15/112 & 1/4 & 2/7\end{bmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n = \Pi^n E_0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi^n\right) E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 67/112 \\ 15/112 \end{bmatrix}$.

2. d) $\forall n \in \mathbb{N},\ E_n = \begin{bmatrix} p(ABC_n) \\ p(BC_n) \\ p(CA_n) \\ p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \\ p(\Phi_n) \end{bmatrix}$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p(ABC_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(BC_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(CA_n) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n) = \dfrac{1}{7}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(B_n) = \dfrac{1}{8}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(C_n) = \dfrac{67}{112}$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} p(\Phi_n) = \dfrac{15}{112}$.

$(A_n)_{n\geq 0}$, $(B_n)_{n\geq 0}$, $(C_n)_{n\geq 0}$ sont des suites croissantes d'événements.

Le théorème de la limite monotone donne alors :

$p\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim p(A_n) = \dfrac{1}{7}$, $p\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim p(B_n) = \dfrac{1}{8}$ et $p\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} C_n\right) = \lim p(C_n) = \dfrac{67}{112}$

Ce qui confirme les résultats obtenus dans I Q4.

Gégé m'a tu"er" !

J'ai mis 1h15 pour faire le problème au brouillon

J'ai mis 5h30 pour le rédiger au propre !!