PARTIE I

Q1 a) Notons u la restriction de la fonction sin à $[0,\frac{\pi}{2}]$.

u est deux fois dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $u''(x) = -\sin x \leq 0$.

Ainsi u est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. La courbe représentative de u est au-dessus de toutes ses cordes, en particulier de la corde qui joint les points de la courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$; cette corde est portée par la droite d'équation

$$y = \frac{u(\pi/2)-u(0)}{\frac{\pi}{2}-0}(x-0)+u(0) \text{ ou d'équation } y = \frac{2}{\pi}x.$$

Ainsi $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x = u(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

Ceci s'écrit encore : $\underline{\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}],\ t \leq \frac{\pi}{2}\sin t}$.

Remarque.. ce résultat s'obtient également sans difficulté en étudiant $t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

Alors $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t$ et $\cos^{2p} t \geq 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2\cos^{2p} t \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\,(\cos^{2p} t) = \frac{\pi^2}{4}(1-\cos^2 t)\cos^{2p} t = \frac{\pi^2}{4}(\cos^{2p} t - \cos^{2p+2} t)$.

En intégrant il vient : $0 \leq \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt \leq \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2} t\,dt\right)$ car $\frac{\pi}{2} \geq 0$.

Alors $\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})}$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{p+1} = \int_0^{\pi/2}\cos t\,\cos^{2p+1} t\,dt \underset{u'(t)=\cos t,\ v(t)=\cos^{2p+1} t}{=} [\sin t\cos^{2p+1} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin t\,(2p+1)(-\sin t)\cos^{2p} t\,dt$

$I_{p+1} = 0 - 0 + \int_0^{\pi/2}(2p+1)\sin^2 t\cos^{2p} t\,dt = (2p+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2p} t\,dt = (2p+1)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2} t\,dt\right)$

$I_{p+1} = (2p+1)(I_p - I_{p+1})$; $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p$.

$\underline{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p}$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}$. $t \mapsto \cos^{2p}(t)$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,

alors $\underline{I_p > 0}$. $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$ donne alors : $0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p}\right)$.

Comme $\dfrac{I_{p+1}}{I_p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}$: $0 \leq \dfrac{J_p}{I_p} \leq \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{2p+1}{2p+2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4} \times \dfrac{1}{2p+2}$.

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{2p+1} = 0$: $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{J_p}{I_p} = 0$ (théorème d'encadrement).

Q2 a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t \, dt \underset{\text{IPP}}{=} \left[t\cos^{2p} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t(2p)(-\sin t)(\cos^{2p-1} t)\, dt$

$u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos^{2p} t$

$I_p = 0 - 0 + 2p \displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2p-1} t \, dt \underset{\text{IPP}}{=} 2p\left[\frac{t^2}{2}\sin t \cos^{2p-1} t\right]_0^{\pi/2} - 2p\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\left(\cos t \cos^{2p-1} t + \sin t (2p-1)(-\sin t)(\cos t)^{2p-2}\right) dt$

$u'(t) = t$ et $v(t) = \sin t \cos^{2p-1} t$

$I_p = 2p(0-0) - p\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t \, dt + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2 t \cos^{2p-2} t \, dt$

$I_p = -p J_p + p(2p-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2(1-\cos^2 t)\cos^{2p-2} t \, dt = -p J_p + p(2p-1)(J_{p-1} - J_p)$.

$I_p = p(2p-1)J_{p-1} + (-p(2p-1) - p) J_p = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_p = p\left((2p-1)J_{p-1} - 2p J_p\right)$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Signalons encore que I_p n'est pas nul.

Alors $1 = p\left((2p-1)\dfrac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\dfrac{J_p}{I_p}\right)$; $\dfrac{1}{p} = (2p-1)\dfrac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\dfrac{J_p}{I_p}$.

Ainsi $\dfrac{1}{2p^2} = \underbrace{\dfrac{2p-1}{2p}\dfrac{1}{I_p}}_{= \frac{1}{I_{p-1}} \text{ (d'après Q1 c)}} J_{p-1} - \dfrac{J_p}{I_p}$; alors $\dfrac{1}{2p^2} = \dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{2p^2}$.

c) $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$; $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$. $J_0 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$ et $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{1}{2}S_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p^2} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{J_n}{I_n} = 0$: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}S_n\right) = \frac{J_0}{I_0} = \frac{1}{3}\frac{(\pi/2)^3}{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$. $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers $S = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II

⚠ Je ne distinguerai pas f_0 et f_k pour $k\geq 1$. C'est inutile. OK ?

(Q1) Sommation de séries télescopiques.

a) • Soit $f\in E$. f est continue sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$. Ainsi $\Delta(f)\in E$.

Δ est une application de E dans E.

• Soit $(f,g)\in E^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta(\lambda f+g))(x) = (\lambda f+g)(x+1)-(\lambda f+g)(x) = \lambda(f(x+1)-f(x)) + g(x+1)-g(x)$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta(\lambda f+g))(x) = \lambda(\Delta f)(x) + (\Delta g)(x) = (\lambda(\Delta f)+(\Delta g))(x)$.

$(\Delta(\lambda f+g)) = \lambda(\Delta f) + (\Delta g)$.

Ainsi Δ est linéaire.

Δ est un endomorphisme de E.

b) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. $\sum_{p=1}^{r}(\Delta f)(p) = \sum_{p=1}^{r}(f(p+1)-f(p)) = f(r+1)-f(1)$.

$\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{r}(\Delta f)(p)\right) = \lim_{r\to+\infty}(f(r+1)-f(1)) \overset{(*)}{=} 0 - f(1) = -f(1)$.

(*) $f\in E$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

La série de terme général $(\Delta f)(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p) = -f(1)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall r\in [\![n+1,+\infty[\![$, $\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f)(p)=\sum_{p=n+1}^{r}(f(p+1)-f(p))=f(r+1)-f(n+1)$.

$\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f)(p)\right)=\lim_{r\to+\infty}(f(r+1)-f(n+1))=0-f(n+1)=-f(n+1)$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p)=-f(n+1)$.

c) Observons que : $\forall k\in\underline{\underline{\mathbb{N}}}$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_k(x)=\prod_{i=0}^{k}\frac{1}{x+i}$ ...d'où le Δ du début !

Il n'est pas difficile non plus de se convaincre que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f_k\in E$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x)=f_{k-1}(x+1)-f_{k-1}(x)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+1+i}-\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+i}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{x+i}-\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{x+i}$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x)=\left(\prod_{i=0}^{k}\frac{1}{x+i}\right)\left(x-(x+k)\right)=-k\,f_k(x)$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(\Delta f_{k-1})=-k\,f_k$.

d) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{r}f_k(p)=-\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)$.

Ainsi $\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{r}f_k(p)\right)=-\frac{1}{k}\lim_{r\to+\infty}\sum_{p=1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)\overset{b)}{=}-\frac{1}{k}\left(-f_{k-1}(1)\right)=\frac{1}{k}f_{k-1}(1)\overset{ok?}{=}\frac{1}{k\,k!}$

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme général $f_k(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{1}{k\,k!}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $r\in [\![n+1,+\infty[\![$.

$\sum_{p=n+1}^{r}f_k(p)=-\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)$;

$\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{p=n+1}^{r}f_k(p)\right)=-\frac{1}{k}\lim_{r\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{r}(\Delta f_{k-1})(p)\overset{b)}{=}-\frac{1}{k}\left(-f_{k-1}(n+1)\right)=\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)$.

Observons que $\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+k-1)}=\frac{1}{k}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$.

Alors $\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{1}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$ et ceci pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

(Q2) Accélération de la convergence de (S_n).

a) $p\in\mathbb{N}^*$. Montrons, par récurrence, que $\forall q\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{q!}{p}f_q(p)$.

• $\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{1}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{1}{p^2}-f_1(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p(p+1)}=\frac{p+1-p}{p^2(p+1)}=\frac{1}{p(p(p+1))}=\frac{1}{p}f_1(p)=\frac{1!}{p}f_1(p)$.

L'égalité vaut alors pour $q=1$.

. Supposons la propriété vraie pour $q\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

$$\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)-q!\,f_{q+1}(p)\underset{H.R.}{=}q!\,\frac{1}{p}f_q(p)-q!\,f_{q+1}(p).$$

$$\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{q!}{p}\left[\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q)}-\frac{p}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}\right]$$

$$\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{q!}{p}\,\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}[p+q+1-p]=\frac{q!\,(q+1)}{p}f_{q+1}(p)=\frac{(q+1)!}{p}f_{q+1}(p).$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)=\frac{q!}{p}f_q(p).$$

---

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $q\in\mathbb{N}^*$.

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ 0\le\frac{q!}{p}f_q(p)$; $\forall p\in[\![n+1,+\infty[\![,\ 0\le\frac{q!}{p}f_q(p)\le\frac{q!}{n+1}f_q(p)$.

Alors $\forall p\in[\![n+1,+\infty[\![,\quad 0\le\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)\le\frac{q!}{n+1}f_q(p)$.

Soit $r\in[\![n+1,+\infty[\![$.

$$0\le\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}-\sum_{p=n+1}^{r}\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p)\le\frac{q!}{n+1}\sum_{p=n+1}^{r}f_q(p)$$

$$0\le\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\sum_{p=n+1}^{r}f_k(p)\le\frac{q!}{n+1}\sum_{p=n+1}^{r}f_q(p).$$

Les séries de termes généraux $\frac{1}{p^2}$ et $f_k(p)$ (pour tout $k\in\mathbb{N}^*$) étant convergentes, en faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_q(p).$$ En utilisant

Q2 a) il vient alors :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leq \frac{q!}{n+1} \times \frac{1}{q(n+1)\cdots(n+q)}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}$.

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} - S_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S'_n est un rationnel comme somme de rationnels.

En posant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}$ on a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n \in \mathbb{Q}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$

Si $q=2$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Si $q=2$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

d) La version demandée ne pose aucun problème. Il est plus intéressant de traiter le cas général (q quelconque).
C'est très simple. On pose $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_\ell = \dfrac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)}$.

Alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{q} \frac{(\ell-1)!}{\ell(n+1)\cdots(n+\ell)} = \sum_{\ell=1}^{q} \alpha_\ell$.

On remarque alors que $\alpha_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et que $\forall \ell \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_\ell = \dfrac{(\ell-1)^2}{\ell(n+\ell)}\,\alpha_{\ell-1}$.

Tout est alors clair !

ce qui est demandé →

```
Program essec01;

var n,p:integer;s:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

s:=s+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2));

writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s)

end.
```

ce que l'on pouvait demander ↓

```
Program essec01;

var n,p,q:integer;s,u:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
write('Donnez q. q=');readln(q);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

u:=1/(n+1);s:=s+u;
for p:=2 to q do
    begin
    u:=sqr(p-1)*u/p/(n+p);s:=s+u;
    end;


writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s);

end.
```

Ce que l'on devait demander →

Ici on fixe n et on obtient en jouant sur q une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à la précision voulue

```
Program essec01;

const epsilon=1e-6;

var n,p,k:integer;s,u:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);

s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);

u:=1/(n+1);s:=s+u;k:=1;
while k*u/(n+1)>epsilon do
      begin
      k:=k+1;
      u:=sqr(k-1)*u/k/(n+k);s:=s+u;
      end;

writeln('S''(',n,') vaut sensiblement : ',s);
writeln('La valeur de q est : ',k);

end.
```

PARTIE III

Q1 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels.

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!}=0$

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_k}{(n-k)!}=0$

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ u_{n-1}=-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{u_k}{(n-k)!}$.

$\Updownarrow$

$u_0=1$ et $\forall n\in \mathbb{N},\ u_{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{(n+2-k)!}$ (1)

Le principe de récurrence "faible" montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de réels et une seule qui vérifie (1). Ainsi :

il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geq 0}$ et une seule telle que : $\begin{cases} u_0=1 \\ \text{et} \\ \forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!}=0\end{cases}$

Montrons, précisément à l'aide d'une récurrence faible, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Q}$.

→ C'est clair pour $n=0$ car $u_0=1$.

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à n et montrons-la pour $n+1$.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ u_k\in\mathbb{Q}$ donc $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \frac{u_k}{(n+2-k)!}\in\mathbb{Q}$, ainsi $u_{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{(n+2-k)!}\in\mathbb{Q}$

Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{Q}$.

(1) s'écrit encore $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_k}{(n+1-k)!}$. Alors :

$u_1=-\frac{u_0}{(2-0)!}=-\frac{1}{2}$; $u_2=-\frac{u_0}{3!}-\frac{u_1}{2!}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$; $u_3=-\frac{u_0}{4!}-\frac{u_1}{3!}-\frac{u_2}{2!}$ ou

$u_3=-\frac{1}{24}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=0$; $u_4=-\frac{u_0}{5!}-\frac{u_1}{4!}-\frac{u_2}{3!}+\frac{u_3}{2!}=-\frac{1}{120}+\frac{1}{48}-\frac{1}{72}=-\frac{1}{720}$.

$u_0=1$, $u_1=-\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{12}$, $u_3=0$ et $u_4=-\frac{1}{720}$.

R1 Dans la suite j'utiliserai la notion de polynôme plus que de fonction polynômes

R2 La relation qui définit U_n pour $n \geqslant 1$ vaut pour $n=0$ non ?

(Q2) Etude des polynômes de Bernoulli.

a) • $U_1 = u_1 + u_0 X = X - \frac{1}{2}$. $\qquad \underline{U_1 = X - \frac{1}{2}}$.

$U_2 = u_2 + \frac{u_1}{1!}X + \frac{u_0}{2!}X^2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$. $\qquad \underline{U_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$.

$U_3 = u_3 + \frac{u_2}{1!}X + \frac{u_1}{2!}X^2 + \frac{u_0}{3!}X^3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$; $\qquad \underline{U_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X}$.

$U_4 = u_4 + \frac{u_3}{1!}X + \frac{u_2}{2!}X^2 + \frac{u_1}{3!}X^3 + \frac{u_0}{4!}X^4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}$; $\qquad \underline{U_4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} X^p$ donc $U_n' = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} p X^{p-1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{(p-1)!} X^{p-1} \underset{\ell = p-1}{=} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-\ell}}{\ell!} X^\ell}_{= U_{n-1}}$.

Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n' = U_{n-1}}$.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $U_n(1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} + u_n \overset{Q1!}{=} u_n = U_n(0)$.

Alors $\underline{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ U_n(0) = U_n(1)}$.

b) • Fixons n dans $\mathbb{N}$ et montrons par récurrence que : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $V_n^{(p)} = V_{n-p}$

→ C'est clair pour $p = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour p élément de $[\![0, n-1]\!]$ et montrons la pour $p+1$.

$V_n^{(p+1)} = (V_n^{(p)})' \underset{HR}{=} (V_{n-p})' \underset{(n-p \geqslant 1)}{=} V_{n-p-1} = V_{n-(p+1)}$. Ceci achève la récurrence.

Alors $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0, n]\!],\ V_n^{(p)} = V_{n-p}}$; en particulier $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0, n]\!],\ V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)}$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est un polynôme à coefficients réels de degré n.

→ C'est clair pour $n = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.

$V_n' = V_{n-1}$; V_n est donc une primitive d'un polynôme à coefficients réels de degré $n-1$; ainsi V_n est un polynôme à coefficients réels de degré n ; ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est un polynôme à coefficients réels de degré n.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \in \mathbb{R}_n[X]$.
La formule de Taylor (pour les polynômes ... ou pas !) donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_n^{(p)}(0)}{p!} X^p = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} X^p .$$

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $V_n(0) = \dfrac{V_0(0)}{0!} = 1$ et $V_n(1) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!}$ d'après ce qui précède.

Comme $V_n(0) = V_n(1)$: $1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!}$; $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0$.

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0 .$$

- $V_0(0) = 1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0$; de l'unicité de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$, établie au Q1, il résulte que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n(0) = u_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$, $V_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} X^p = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} X^p = U_n$ (et $V_0 = 1 = U_0$).

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n$.

c) Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n U_n(1-X)$ il suffit de prouver que la suite de polynômes $((-1)^n U_n(1-X))_{n \geqslant 0}$ a les mêmes qualités que la suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = (-1)^n U_n(1-X)$ et montrons que :

$\rightarrow W_0 = 1$ $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, W_n' = W_{n-1}$ $\rightarrow \forall n \in [\![2, +\infty[\![, W_n(0) = W_n(1)$.

- $W_0 = (-1)^0 U_0(1-X) = 1$ car $U_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n' = (-1)^n \underline{(-1)} U_n'(1-X) \overset{U_n' = U_{n-1}}{=} (-1)^2 (-1)^{n-1} U_{n-1}(1-X) = W_{n-1}$.
- $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $W_n(0) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n U_n(0) = (-1)^n U_n(1-1) = W_n(1)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = U_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (-1)^n U_n(1-X)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $2p+1 \geqslant 3$. $U_{2p+1}(0) = U_{2p+1}(1) = (-1)^{2p+1} U_{2p+1}(0) = -U_{2p+1}(0)$.

Alors $2U_{2p+1}(0) = 0$. $U_{2p+1}(0) = 0$.

Comme $U_{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u_{2p+1-k}}{k!} X^k$: $U_{2p+1}(0) = \frac{u_{2p+1}}{0!}$; alors $u_{2p+1} = 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p+1} = 0$. (cela confirme le $u_3 = 0$).

Q3 Accélération de la convergence de (S_n).

a) Soyons lucide pour s'éviter du travail. Fixons p dans $\mathbb{N}$ et posons :

$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = (n+1)! \int_0^1 \frac{U_n(x)}{(x+p)^{n+2}}\, dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $K_n \underset{U'_{n+1} = U_n}{=} (n+1)! \int_0^1 \frac{U'_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+2}}\, dx \underset{\text{IPP}}{=} (n+1)! \left(\left[U_{n+1}(x) \frac{1}{(x+p)^{n+2}} \right]_0^1 - \int_0^1 U_{n+1}(x) \left(-\frac{n+2}{(x+p)^{n+3}} \right) dx \right)$

$$K_n = (n+1)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(p+1)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + (n+2)! \int_0^1 \frac{U_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+3}}\, dx$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = (n+1)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(p+1)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}$.

En particulier $K_0 = \left[\frac{U_1(1)}{(p+1)^2} - \frac{U_1(0)}{p^2} \right] + K_1 \underset{U_1 = X - \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) + K_1$.

Alors $K_1 = K_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) = \int_0^1 \frac{U_0(x)}{(x+p)^2}\, dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right) \underset{U_0 = 1}{=} \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_{n+1}(1) \underset{n+1 \geqslant 2}{=} U_{n+1}(0)$ donc $K_n = (n+1)!\,U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}$

Ainsi $K_n = (n+1)!\,U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + (n+2)!\,U_{n+2}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{n+3}} - \frac{1}{p^{n+3}} \right] + K_{n+2}$ et

ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Fixons k dans $\mathbb{N}^*$ et appliquons la formule précédente pour $n = 2k-1$.

Il vient : $K_{2k-1} = (2k)!\, U_{2k}(0)\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right] + (2k+1)!\, U_{2k+1}(0)\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+2}} - \frac{1}{p^{2k+2}}\right] + K_{2k+1}$

Notons que $U_{2k}(0) = u_{2k}$ et $U_{2k+1}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Alors $K_{2k-1} - K_{2k+1} = (2k)!\, u_{2k}\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right]$ ... et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Fixons q dans $\mathbb{N}^*$ et sommons ce qui précède de 1 à q.

Il vient sans difficulté $K_1 - K_{2q+1} = \sum_{k=1}^{q} (2k)!\, u_{2k}\left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}}\right]$.

Ainsi $K_1 + \sum_{\ell=1}^{q} (2\ell)!\, u_{2\ell}\left[\frac{1}{p^{2\ell+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2\ell+1}}\right] = K_{2q+1} = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx$

En rappelant que $K_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2}\right)$ on obtient :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{\ell=1}^{q} (2\ell)!\, u_{2\ell}\left(\frac{1}{p^{2\ell+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2\ell+1}}\right) = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx$$

et ceci pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

<u>Remarque</u>.. Notons que nous n'avons fait qu'une intégration par parties et 0 récurrence !

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{\ell=1}^{q} (2\ell)!\, u_{2\ell}\left(\frac{1}{p^{2\ell+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2\ell+1}}\right)$

Soit $r \in [\![n, +\infty[\![$

$$\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \sum_{p=n}^{r} |A_p| \overset{a)}{=} \sum_{p=n}^{r} \left|(2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\,dx\right| \leq (2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx.$$

Or : $\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx \leq M_{2q+1}\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^{2q+3}} = M_{2q+1}\left[\frac{(x+p)^{-2q-2}}{-2q-2}\right]_0^1 = \frac{M_{2q+1}}{2q+2}\left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right)$

Ainsi $(2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(x)|}{(x+p)^{2q+3}}\,dx \leq \frac{M_{2q+1}}{2q+2}(2q+2)!\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right)$

Alors $\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq M_{2q+1}(2q+1)! \sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2q+2}}-\frac{1}{(p+1)^{2q+2}}\right) = M_{2q+1}(2q+1)!\left(\frac{1}{n^{2q+2}}-\frac{1}{(r+1)^{2q+2}}\right)$

Alors $\left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$, non ? Ne reste plus qu'à faire tendre r vers $+\infty$.

$$\sum_{p=n}^{r} A_p = \underbrace{\sum_{p=n}^{r}\int_0^1 \frac{du}{(x+p)^2}}_{x_r} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right)}_{y_r} + \underbrace{\sum_{p=n}^{r}\sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}}_{z_r}\left(\frac{1}{p^{2l+1}}-\frac{1}{(p+1)^{2l+1}}\right).$$

$$x_r = \sum_{p=n}^{r}\left[-\frac{1}{x+p}\right]_0^1 = \sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{r+1}\ ;\quad \lim_{r\mapsto+\infty} x_r = \frac{1}{n}.$$

$$y_r = \frac{1}{2}\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{r+1}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2n^2}+\sum_{p=n+1}^{r}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(r+1)^2}.$$

Alors $\lim_{r\mapsto+\infty} y_r = \frac{1}{2n^2}+\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$.

$$z_r \underset{\uparrow\ \text{or ?}}{=} \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\left(\sum_{p=n}^{r}\left(\frac{1}{p^{2l+1}}-\frac{1}{(p+1)^{2l+1}}\right)\right) = \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\left(\frac{1}{n^{2l+1}}-\frac{1}{(r+1)^{2l+1}}\right)$$

Alors $\lim_{r\mapsto+\infty} z_r = \sum_{l=1}^{q}(2l)!\,u_{2l}\,\frac{1}{n^{2l+1}}$.

On a donc $\forall r\in[\![n,+\infty[\![,\ \left|\sum_{p=n}^{r} A_p\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$ et

$$\lim_{r\mapsto+\infty}\sum_{p=n}^{r} A_p = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}.$$

Nous pouvons alors écrire $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ |x|=|-x|$ il vient :

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\sum_{l=1}^{q}\frac{(2l)!\,u_{2l}}{n^{2l+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\,M_{2q+1}}{n^{2q+2}} \quad \text{pour tout } q \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!\, u_{2k}}{n^{2k+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n \in \mathbb{Q}$ car $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

De plus $\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| \underset{4}{=} \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!\, u_{2k}}{n^{2k+1}}\right| \leq \frac{(2q+1)!\, M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

$\frac{\pi^2}{6} = S_n + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

En posant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!\, u_{2k}}{n^{2k+1}}$ on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n \in \mathbb{Q}$ et $\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| \leq \frac{(2q+1)!\, M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$.

Supposons que $q = 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!\, u_{2k}}{n^{2k+1}} = \frac{2u_2}{n^3} + \frac{24u_4}{n^5} = \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S''_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right)\right| \leq \frac{120\, M_5}{n^6}$.

d)

```
Program essec01;

var n,p:integer;s:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
s:=s+1/n-1/2/n/n+1/6/n/n/n-1/30/n/n/n/n/n;

writeln('S''''(',n,') vaut sensiblement : ',s);

end.
```

Un petit comparatif ..

```
Donnez n. n=2
                S                       S'                      S''
    1.2500000000E+00        1.6250000000E+00        1.6447916667E+00
   -3.9493406684E-01       -1.9934066846E-02       -1.4240017845E-04

Donnez n. n=5
                S                       S'                      S''
    1.4636111111E+00        1.6421825397E+00        1.6449337778E+00
   -1.8132295574E-01       -2.7515271649E-03       -2.8907015803E-07

Donnez n. n=10
                S                       S'                      S''
    1.5497677312E+00        1.6444647009E+00        1.6449340645E+00
   -9.5166335684E-02       -4.6936599028E-04       -2.3519532988E-09

Donnez n. n=50
                S                       S'                      S''
    1.6251327336E+00        1.6449291137E+00        1.6449340668E+00
   -1.9801333263E-02       -4.9531736295E-06       -3.6379788071E-11

Donnez n. n=100
                S                       S'                      S''
    1.6349839001E+00        1.6449334245E+00        1.6449340668E+00
   -9.9501667428E-03       -6.4237974584E-07       -8.0035533756E-11
```

← $S'' - \frac{\pi^2}{6}$!

Remarque - $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$ et $\frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(q-1)!}{n^{q+1}}$.

$$\left|\frac{\pi^2}{2} - S''_n\right| \leq \frac{(2q+1)!\,\Pi_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Y a pas photo, non ?

De petits exercices.

1.. Calculer Π_5.

2.. Donner un majorant de $\left|\frac{\pi^2}{6} - S_n\right|$

3.. Ecrire un programme qui calcule S''_n pour n et q donnés.