PARTIE I

Q1 Covariance des variables aléatoires X et Y. Ici $V(X)>0$

a) $\mathrm{cov}(\lambda X+Y,\lambda X+Y)=E\big((\lambda X+Y-E(\lambda X+Y))(\lambda X+Y-E(\lambda X+Y))\big)=E\big((\lambda X+Y-E(\lambda X+Y))^2\big)=V(\lambda X+Y)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \mathrm{cov}(\lambda X+Y,\lambda X+Y)=V(\lambda X+Y)$.

$$V(\lambda X+Y)=\mathrm{cov}(\lambda X+Y,\lambda X+Y)\underset{\uparrow}{=}\lambda^2\overbrace{\mathrm{cov}(X,X)}^{V(X)}+2\lambda\,\mathrm{cov}(X,Y)+\overbrace{\mathrm{cov}(Y,Y)}^{V(Y)}.$$

bilinéarité de la covariance
et symétrie de la covariance

Alors $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ V(\lambda X+Y)=\lambda^2V(X)+2\lambda\,\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y)$.

b) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(\lambda)=V(\lambda X+Y)=\lambda^2V(X)+2\lambda\,\mathrm{cov}(X,Y)+V(Y)$.

φ est un polynôme de degré au plus 2 et $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(\lambda)=V(\lambda X+Y)\geq 0$.

Comme $V(X)>0$: φ est un polynôme de degré 2 qui garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
Ainsi φ a au plus une racine. Son discriminant est alors négatif ou nul.

Alors $(2\,\mathrm{cov}(X,Y))^2-4V(X)V(Y)\leq 0$. $4(\mathrm{cov}(X,Y))^2\leq 4V(X)V(Y)$.

Donc $(\mathrm{cov}(X,Y))^2\leq V(X)V(Y)$.

Supposons que : $(\mathrm{cov}(X,Y))^2=V(X)V(Y)$. Alors φ admet un zéro et un seul λ_0 car son discriminant est nul.
$V(\lambda_0X+Y)=0$; λ_0X+Y est "constante avec une probabilité 1".

$\exists b\in\mathbb{R},\ P(\lambda_0X+Y=b)=1$. $P(Y=-\lambda_0X+b)=1$. Posons $a=-\lambda_0$.

Alors $P(Y=aX+b)=1$.
Si $\mathrm{cov}(X,Y)=0$: $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P(Y=aX+b)=1$.

Réciproquement supposons que : $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P(Y=aX+b)=1$.

Alors $P(Y-aX=b)=1$. $Y-aX$ est "constante avec une probabilité 1".

Ainsi $V(Y-aX)=0$; $\varphi(-a)=0$. φ admet une racine ... et une seule (φ admet au plus une racine)
mieux φ est un polynôme de degré ayant une racine et une seule.

le discriminant de q est alors nul. Ainsi $(2\,cov(X,Y))^2 - 4V(X)V(Y) = 0$

Par conséquent $cov(X,Y) = V(X)V(Y)$.

Finalement $cov(X,Y) = V(X)V(Y)$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$P(Y = aX + b) = 1$, autrement dit si et seulement si Y est une fonction quasi affine de X.

Remarques 1.. On peut encore dire que :

$cov(X,Y) = V(X)V(Y)$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que Y soit presque sûrement égale à $aX+b$.

2.. Sans l'hypothèse $V(X) > 0$ on a :

$\to (cov(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y)$

$$\to (cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(Y = aX+b) = 1 \\ \text{ou} \\ \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ P(X = a'Y + b') = 1 \end{cases}$$

ou $$(cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} V(X) = 0 \\ \text{ou} \\ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(Y = aX+b) = 1 \end{cases}$$

Q2 Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y.

Ici $V(X) > 0$ et $V(Y) > 0$.

a) $$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$ par définition.

$(cov(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y)$ donc $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y)$

Ainsi $\dfrac{|cov(X,Y)|}{\sigma(X)\sigma(Y)} \leq 1$; $\left|\dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right| \leq 1$; $|\rho| \leq 1$; $\rho \in [-1,1]$.

$$\rho = -1 \text{ ou } \rho = 1 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (cov(X,Y))^2 = (\sigma(X))^2(\sigma(Y))^2$$

Ainsi : $\rho \in \{-1,1\} \Leftrightarrow (cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y)$.

ou $\rho \in \{-1,1\}$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que Y soit presque sûrement égale à $aX+b$.

b) Si X et Y sont indépendants : $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ donc $\rho=0$.

c) $E(X)=0$ et $V(X)=1$. Notons que X possède un moment d'ordre 2 donc $E(Y)$ existe.
$E(Y)=E(X^2)=V(X)+(E(X))^2=1+0=1$.
Montrons que $Y=X^2$ possède une variance. Il suffit de prouver que $E(X^4)$ existe.
Pour cela il suffit de prouver que X possède un moment d'ordre 4.
Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$.

$t\mapsto t^4f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $A\in\mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A t^4f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A \underbrace{(-t^3)}_{u}\underbrace{(-te^{-t^2/2})}_{v'}\,dt \underset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-t^3e^{-t^2/2}\right]_0^A-\int_0^A(-3t^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

$$\int_0^A t^4f(t)\,dt=-A^3e^{-A^2/2}+3\int_0^A t^2f(t)\,dt.$$

X possède un moment d'ordre 2 qui vaut 1 donc $\int_0^{+\infty}t^2f(t)\,dt$ existe.
$t\mapsto t^2f(t)$ étant paire : $\int_0^{+\infty}t^2f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)\,dt=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^4f(t)\,dt\right)=0+3\times\frac{1}{2}=3/2$.

$\int_0^{+\infty}t^4f(t)\,dt$ existe et vaut $3/2$. $t\mapsto t^4f(t)$ étant paire : $\int_{-\infty}^{+\infty}t^4f(t)\,dt$ existe et vaut
$2\times\frac{3}{2}=3$.

Ainsi X possède un moment d'ordre 4 qui vaut 3. $E(Y^2)$ existe et vaut 3.
Alors $V(Y)$ existe et $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=3-1=2$.

$E(X)=0$, $V(X)=1$, $E(Y)=1$ et $V(Y)=2$.

X et Y possèdent un moment d'ordre 2 donc $\mathrm{cov}(X,Y)$ existe.
$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=E(X^3)$.
$E(X^3)$ existe donc $\int_{-\infty}^{+\infty}t^3f(t)\,dt$ converge. Comme $t\mapsto t^3f(t)$ est impaire :
$\int_{-\infty}^{+\infty}t^3f(t)\,dt$ existe et vaut 0 ; $E(X^3)=0$. $\mathrm{cov}(X,Y)=0$. Ainsi $\rho=0$.

$\{X^2\leq 1\}\cap\{X<-1\}=\emptyset$ donc $P(\{X^2\leq 1\}\cap\{X<-1\})=0$; $P(\{Y\leq 1\}\cap\{X<-1\})=0$

Notons ϕ la fonction de répartition de X. ϕ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

$P(Y\leq 1)=P(X^2\leq 1)=P(-1\leq X\leq 1)=\phi(1)-\phi(-1)=\phi(1)-(1-\phi(1))=2\phi(1)-1$.

Or $2\phi(1)-1\neq 0$ car $2\phi(1)-1=0 \Rightarrow \phi(1)=\frac{1}{2}=\phi(0)$! Ainsi $P(Y\leq 1)\neq 0$.

$P(X<-1)=P(X\leq -1)=\phi(-1)=1-\phi(1)\neq 0$

Alors $P(\{Y\leq 1\}\cap\{X<-1\})=0$ et $P(Y\leq 1)\,P(X<-1)\neq 0$.

$\rho=0$ mais X et Y ne sont pas indépendantes.

La réciproque de 2°b est fausse. Quel scoop !

PARTIE II

(Q1) Calculs préliminaires.

a) Fixons q dans $\mathbb{N}$ et montrons par récurrence que : $\forall n\in[\![q,+\infty[\![$, $\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$.

- $\sum_{k=q}^{q} C_k^q = C_q^q = 1 = C_{q+1}^{q+1}$; l'égalité vaut pour $n=q$.
- Supposons l'égalité vraie $n\in[\![q,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$\sum_{k=q}^{n+1} C_k^q = \sum_{k=q}^{n} C_k^q + C_{n+1}^q = C_{n+1}^{q+1}+C_{n+1}^q = C_{n+2}^{q+1} = C_{(n+1)+1}^{q+1}$$ ce qui achève la récurrence.

$\forall q\in\mathbb{N}$, $\forall n\in[\![q,+\infty[\![$, $\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$.

__Remarque__.. On peut retrouver directement le résultat avec $C_k^q = C_{k+1}^{q+1}-C_k^{q+1}$ pour $k\geq q+1$...

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} C_k^1 = C_{n+1}^{1+1} = C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2}$ ... d'après a) avec $q=1$.

a) donne avec $q=2$: $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $C_{n+1}^3 = \sum_{k=2}^{n} C_k^2 = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$.

Ainsi $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = 2C_{n+1}^3 = 2\times\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!} = \frac{1}{3}(n+1)(n)(n-1)$.

a] donc avec $q=3$: $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $C_{n+1}^4 = \sum_{\ell=3}^{n} C_\ell^3 = \sum_{\ell=3}^{n} \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)}{3!}$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $\sum_{\ell=3}^{n} \ell(\ell-1)(\ell-2) = 3!\, C_{n+1}^4 = 3! \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} = \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$.

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$; $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$ et

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $\sum_{\ell=3}^{n} \ell(\ell-1)(\ell-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

Remarque. Plus généralement : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \underline{\mathbb{N}}$, $\sum_{k=\underline{0}}^{n} k(k-1)\cdots(k-q+1) = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-q+1)}{q+1}$

A] Q2 Lois des variables aléatoires X et Y.

a]

Si $j \in [\![2,+\infty[\![$, le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à j éléments est C_j^2

Si $n \in [\![2,+\infty[\![$, ——— C_n^2

Si $j \in \{0,1\}$ (resp. $n \in \{0,1\}$) le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à j (resp. n) élément est 0 !

Soit $j \in [\![2,n]\!]$. L'événement $\{Y \leq j\}$ est réalisé si et seulement si on a tiré simultanément deux jetons ayant un numéro dans $[\![1,j]\!]$.

Alors $\text{card}\{Y \leq j\} = C_j^2$. De plus $\text{card}\,\Omega = C_n^2$.

Alors $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $P(Y \leq j) = \frac{C_j^2}{C_n^2} = \frac{j(j-1)/2}{n(n-1)/2} = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}$.

Mieux : $\forall j \in [\![\underline{1},n]\!]$, $P(Y \leq j) = \frac{j(j-1)}{n(n-1)}$. (en effet $P(Y \leq 1) = 0$).

$\forall j \in [\![2,n]\!]$, $P(Y=j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = \frac{j(j-1)}{n(n-1)} - \frac{(j-1)(j-2)}{n(n-1)} = \frac{(j-1)(j-j+2)}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}$.

$\forall j \in [\![2,n]\!]$, $P(Y=j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$. Mieux : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$ car $P(Y=1)=0$.

Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$.

$\{X \geqslant i\}$ est réalisé si et seulement si on obtient deux jetons dont le numéro appartient à l'ensemble $[\![i,n]\!]$ ... qui a $n-i+1$ éléments. $\operatorname{card}(\{X \geqslant i\}) = C_{n-i+1}^{2}$

Ainsi $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P(X \geqslant i) = \dfrac{C_{n-i+1}^{2}}{C_n^2} = \dfrac{(n-i+1)(n-i)/2}{n(n-1)/2} = \dfrac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)}$.

Mieux $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X \geqslant i) = \dfrac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)}$ car $P(X \geqslant n) = 0$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P(X=i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i+1) = \dfrac{(n-i+1)(n-i)}{n(n-1)} - \dfrac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)}$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P(X=i) = \dfrac{n-i}{n(n-1)}\left[n-i+1-n+i+1\right] = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}$.

Comme $P(X=n)=0$: $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}$.

b) Posons $Z = n+1-X$. $X(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$ donc $Z(\Omega) = [\![2,n]\!] = Y(\Omega)$.

$\forall j \in Z(\Omega)$, $P(Z=j) = P(n+1-X=j) = P(X=n+1-j) = \dfrac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y=j)$.

Ainsi $n+1-X$ et Y ont même loi.

Alors $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$.

$E(Y) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$; $E(X) = n+1-E(Y)$.

$V(Y) = V(n+1-X) \underset{\uparrow}{=} V(X)$; $V(X) = V(Y)$.

$V(aX+b) = a^2V(X)$...

Q3 a) $E(Y) = \sum_{j=2}^{n} j P(Y=j) = \sum_{j=2}^{n} \frac{2j(j-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$.

Q1 b)

$E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$. $E(X) = n+1 - E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$.

Q1 b)

b) $E(Y(Y-2)) \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=2}^{n} j(j-2) P(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2(n)3}^{n} j(j-1)(j-2) \underset{\downarrow}{=} \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$

théorème de transfert

$E(Y(Y-2)) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

$E(Y^2) = E(Y(Y-2)) + 2E(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1)$

$E(Y^2) = \frac{n+1}{6}(3n-6+8) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$.

$E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$.

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2$.

$V(Y) = \frac{n+1}{18}[9n+6-8n-8] = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.

$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.

Q4 Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y.

a) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \le i < j \le n$.

$(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le jeton numéroté i et le jeton numéroté j. Ainsi $\text{Card}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = 1$.

$P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{1}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{1}{C_n^2} = \frac{2}{n(n-1)}$.

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \le i < j \le n \Rightarrow P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{2}{n(n-1)}$.

b) $E[X(Y-2)] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} i(j-2)\, P(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$

$E[X(Y-2)] = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} i(j-2) P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} i(j-2) \frac{2}{n(n-1)}$

$P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si } 1 \le i < j \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$E[X(Y-2)] = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} (j-2) \sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2 \text{ ou } 3}^{n} (j-2)\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=3}^{n} j(j-1)(j-2).$$

$$E(X(Y-2)) = \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{4}. \quad \underline{\underline{E[X(Y-2)] = \frac{(n+1)(n-2)}{4}}}.$$

$$E(XY) = E[X(Y-2)+2X] = E[X(Y-2)] + 2E(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{4} + \frac{2(n+1)}{3} = \frac{n+1}{12}(3n-6+8).$$

$$\underline{\underline{E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}}}.$$

c) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{n+1}{3} \times \frac{2}{3}(n+1) = \frac{n+1}{36}(9n+6-8n-8)$

$$\underline{\underline{\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}}.$$

Supposons $n \geqslant 3$. $V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18} > 0$.

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{(n+1)(n-2)}{36}}{\frac{(n+1)(n-2)}{18}} = \frac{1}{2}. \quad \underline{\underline{\rho = \frac{1}{2}}}.$$

Q5 a) Soit $j \in [\![p,n]\!]$. $\{Y \leq j\}$ signifie que l'on a tiré p jetons dont le numéro appartient à $[\![1,j]\!]$.
Alors $\operatorname{card}\{Y \leq j\} = C_j^p$. Ainsi $P(Y \leq j) = \frac{C_j^p}{C_n^p}$ car $\operatorname{card}\Omega = C_n^p$.

Supposons que $j > p$. $P(Y=j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = \frac{C_j^p}{C_n^p} - \frac{C_{j-1}^p}{C_n^p} = \frac{C_j^p - C_{j-1}^p}{C_n^p} = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p}$

Si $j = p$: $P(Y=j) = P(Y \leq j) - \underbrace{P(Y \leq j-1)}_{=0} = P(Y=j) = \frac{C_j^p}{C_n^p} = \frac{C_p^p}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^p} = \frac{C_{p-1}^{p-1}}{C_n^p} = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p}$!

$$\underline{\underline{\text{Finalement : } \forall j \in [\![p,n]\!],\ P(Y \leq j) = \frac{C_j^p}{C_n^p} \text{ et } P(Y=j) = \frac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p}}}.$$

Soit $i \in [\![1, n-p+1]\!]$. $\{X \geq i\}$ signifie que les p jetons tirés ont un numéro appartenant à $[\![i, n]\!]$. Or $[\![i, n]\!]$ possède $n-i+1$ éléments.

Alors $p(X \geq i) = \dfrac{C_{n-i+1}^{p}}{C_n^p}$.

Supposons que : $i < n-p+1$. $p(X=i) = p(X \geq i) - p(X \geq i+1) = \dfrac{1}{C_n^p}\left(C_{n-i+1}^{p} - C_{n-i}^{p}\right) = C_{n-i}^{p-1} / C_n^p$.

Supposons $i = n-p+1$. $P(X=i) = P(X \geq i) - \underbrace{P(X \geq i+1)}_{=0} = p(X \geq i) = P(X \geq n-p+1) = \dfrac{C_p^p}{C_n^p} = \dfrac{1}{C_n^p} = C_{n-(n-p+1)}^{p-1} / C_n^p$

Finalement : $\forall i \in [\![1, n-p+1]\!]$, $P(X \geq i) = \dfrac{C_{n-i+1}^{p}}{C_n^p}$ et $P(X=i) = \dfrac{C_{n-i}^{p-1}}{C_n^p}$.

D] $X(\Omega) = [\![1, n-p+1]\!]$. $(n+1-X)(\Omega) = [\![p, n]\!] = Y(\Omega)$.

$\forall j \in [\![p, n]\!]$, $p(n+1-X=j) = p(X = n+1-j) = \dfrac{C_{n-(n+1-j)}^{p-1}}{C_n^p} = \dfrac{C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = P(Y=j)$.

Ainsi $n+1-X$ et Y ont même loi.

Ici encore : $E(X) = n+1 - E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$.

(Q6) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y.

a] $j C_{j-1}^{p-1} = \dfrac{j(j-1)!}{(p-1)!(p-j)!} = p \dfrac{j!}{p!(p-j)!} = p\, C_j^p$ pour tout $j \in [\![p, n]\!]$.

$E(Y) = \displaystyle\sum_{j=p}^{n} \frac{j C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = \sum_{j=p}^{n} \frac{p\, C_j^p}{C_n^p} = \frac{p}{C_n^p} \sum_{j=p}^{n} C_j^p = \frac{p}{C_n^p} C_{n+1}^{p+1} = \frac{p}{C_n^p} \frac{n+1}{p+1} C_n^p = \frac{p(n+1)}{p+1}$.

$E(Y) = \dfrac{p(n+1)}{p+1}$. $E(X) = n+1 - E(Y) = (n+1)\left(1 - \dfrac{p}{p+1}\right) = \dfrac{n+1}{p+1}$. $E(X) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

b] Soit $j \in [\![p, n]\!]$. $(j+1) j\, C_{j-1}^{p-1} = (j+1) p\, C_j^p = p \dfrac{(j+1)\, j!}{p!(j-p)!} = p(p+1) \dfrac{(j+1)!}{(p+1)!\,(j+1-(p+1))} = p(p+1)\, C_{j+1}^{p+1}$.

$(j+1) j\, C_{j-1}^{p-1} = p(p+1)\, C_{j+1}^{p+1}$.

$$E[Y(Y+1)] = \sum_{j=p}^{n} j(j+1)p(Y=j) = \sum_{j=p}^{n} \frac{j(j+1)C_{j-1}^{p-1}}{C_n^p} = \frac{1}{C_n^p}\, p(p+1) \sum_{j=p}^{n} C_{j+1}^{p+1}.$$

$$E[Y(Y+1)] = p(p+1) \frac{1}{C_n^p} \sum_{\ell=p+1}^{n+1} C_\ell^{p+1} = p(p+1)\frac{1}{C_n^p} C_{n+2}^{p+2} = p(p+1)\frac{1}{C_n^p} \frac{(n+2)(n+1)}{(p+2)(p+1)} C_n^p.$$

$$E[Y(Y+1)] = \frac{p(n+2)(n+1)}{p+2}$$

$$E(Y^2) = E[Y(Y+1)-Y] = E[Y(Y+1)] - E[X] = \frac{p(n+2)(n+1)}{p+2} - \frac{p(n+1)}{p+1} = \frac{p(n+1)[(n+2)(p+1)-(p+2)]}{(p+2)(p+2)}$$

$$E(Y^2) = \frac{p(n+1)(np+2p+n+2-p-2)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)}$$

$$E(Y^2) = \frac{p(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)}.$$

$$V(X)=V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2 = \frac{p(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)} - \left(\frac{p(n+1)}{p+1}\right)^2 = \frac{p(n+1)}{p+1}\left(\frac{np+n+p}{p+2} - \frac{p(n+1)}{p+1}\right)$$

$$V(X)=V(Y) = \frac{p(n+1)}{p+1} \frac{[np^2+np+p^2+np+n+p-p^2n-p^2-2pn-2p]}{(p+2)(p+1)} = \frac{p(n+1)}{(p+1)^2(p+2)}(n-p).$$

$$V(X) = V(Y) = \frac{p(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+2)}.$$

Q7 Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléat. X et Y.

Dans cette question nous supposerons $p \geq 2$

a) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-p+1$.

$\{X=i\} \cap \{Y=j\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu les jetons numérotés i et j et $p-2$ jetons dont le numéro appartient à $[\![i+1, j-1]\!]$.

$[\![i+1, j-1]\!]$ possède $j-1-i$ éléments ainsi card$(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = C_{j-i-1}^{p-2}$.

Alors $p(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \dfrac{C_{j-i-1}^{p-2}}{C_n^p}$ si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-p+1$.

Remarque : $P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=0$ si $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ et si l'on n'a pas $p\leq j\leq n$ et $1\leq i\leq j-p+1$.

b) $E[(Y+1)(Y-X)]=\sum_{i=1}^{n-p+1}\sum_{j=p}^{n}(j+1)(j-i)P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=\sum_{j=p}^{n}\sum_{i=1}^{n-p+1}(j+1)(j-i)P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$.

Mieux : $E[(Y+1)(Y-X)]=\sum_{j=p}^{n}\sum_{i=1}^{j-p+1}(j+1)(j-i)\frac{C_{j-i-1}^{p-2}}{C_n^p}=\frac{p-1}{C_n^p}\sum_{j=p}^{n}(j+1)\sum_{i=1}^{j-p+1}C_{j-i}^{p-1}$

$(j-i)C_{j-i-1}^{p-2}=(p-1)C_{j-i}^{p-1}$

Or $\sum_{i=1}^{j-p+1}C_{j-i}^{p-1}=\sum_{\ell=p-1}^{j-1}C_\ell^{p-1}=C_j^p$ pour tout $j\in[\![p,n]\!]$.

Alors $E[(Y+1)(Y-X)]=\frac{p-1}{C_n^p}\sum_{j=p}^{n}(j+1)C_j^p=\frac{p-1}{C_n^p}(p+1)\sum_{j=p}^{n}C_{j+1}^{p+1}=\frac{p-1}{C_n^p}(p+1)C_{n+2}^{p+2}$

$E[(Y+1)(Y-X)]=\frac{(p-1)(p+1)}{C_n^p}\times\frac{(n+2)(n+1)}{(p+2)(p+1)}C_n^p=\frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}$.

$$\boxed{E[(Y+1)(Y-X)]=\frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}}.$$

$(Y+1)(Y-X)=Y^2-XY+Y-X$. $XY=Y^2+Y-X-(Y+1)(Y-X)$

$E(XY)=E(Y^2)+E(Y)-E(X)-E[(Y+1)(Y-X)]=\frac{p(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)}+\frac{p(n+1)}{p+1}-\frac{n+1}{p+1}-\frac{(p-1)(n+2)(n+1)}{p+2}$

$E(XY)=\frac{n+1}{(p+1)(p+2)}\left[np^2+np+p^2+p^2+2p-p-2-p^2n+n-2p^2+2\right]=\frac{n+1}{(p+1)(p+2)}(np+n+p)$

$$\boxed{E(XY)=\frac{(n+1)[(p+1)n+p]}{(p+2)(p+1)}}.$$

c) $\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{(n+1)(np+n+p)}{(p+1)(p+2)}-\frac{p(n+1)}{p+1}\times\frac{n+1}{p+1}=\frac{(n+1)[(p+1)(np+n+p)-p(n+1)(p+2)]}{(p+2)(p+1)^2}$

$\text{cov}(X,Y)=\frac{n+1}{(p+2)(p+1)^2}\left[np^2+np+p^2+np+n+p-np^2-2np-p^2-2p\right]$; $\text{cov}(X,Y)=\frac{(n+1)(n-p)}{(p+2)(p+1)^2}$.

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \underset{V(X)=V(Y)}{\uparrow}= \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{(n+1)(n-p)}{(p+2)(p+1)^2} \times \left[\frac{p(n+1)(n-p)}{(p+1)^2(p+2)}\right]^{-1} = \frac{1}{p} \quad \dots \text{ si } n > p.$$

Si $n>p$: $\rho = \frac{1}{p}$.

(Q8) a) $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, i\, (1+u)^{i-1}(1+v)^j$.

$\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, i = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$.

$(\{Y=j\})_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements donc $\sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = P(X=i)$.

$\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = \sum_{i=1}^{n} i\, P(X=i) = E(X)$.

$\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$. De même $\frac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, i(i-1)(1+u)^{i-2}(1+v)^j$

$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\, P(X=i) = E[X(X-1)]$.

$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0) = E[X(X-1)]$. De même $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0) = E[Y(Y-1)]$.

$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, i\,(1+u)^{i-1}(1+v)^j$.

$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial u}(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, ij\,(1+u)^{i-1}(1+v)^{j-1}$.

$\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial u}(0,0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\, ij$. $\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial u}(0,0) = E(XY)$.

b) $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ et $w = u+v+uv$. De plus $u\neq 0, v\neq 0$ et $w \neq 0$.

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})(1+u)^i(1+v)^j$$

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)}(1+u)^i(1+v)^j = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(1+v)^j\sum_{i=1}^{j-1}(1+u)^i.$$

$$G(u,v) \underset{1+u\neq 1}{=} \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(1+v)^j(1+u)\times\frac{1-(1+u)^{j-1}}{1-(1+u)}.$$

$$G(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\frac{(1+u)}{(-u)}\sum_{j=1}^{n}(1+v)^j - \frac{2}{n(n-1)}\frac{1}{(-u)}\sum_{j=1}^{n}(\underbrace{(1+v)(1+u)}_{1+w})^j.$$

$$G(u,v) \underset{\substack{1+v\neq 0\\1+w\neq 0}}{=} -\frac{2(1+u)(1+v)}{n(n-1)u}\frac{1-(1+v)^n}{1-(1+v)} + \frac{2}{n(n-1)u}(1+w)\frac{1-(1+w)^n}{1-(1+w)}.$$

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{1-(1+w)^n}{-w} - \frac{1-(1+v)^n}{-v}\right]$$

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{(1+w)^n-1}{w} - \frac{(1+v)^n-1}{v}\right].$$

$$\frac{(1+w)^n-1}{w} = \frac{1}{w}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k w^k - 1\right] = \frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n}C_n^k w^k = \sum_{k=1}^{n}C_n^k w^{k-1}.$$

De même $\frac{(1+v)^n-1}{v} = \sum_{k=1}^{n}C_n^k v^{k-1}.$

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(w^{k-1}-v^{k-1}) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\sum_{k=2}^{n}C_n^k(w^{k-1}-v^{k-1}).$$

$\forall p\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^p-b^p=(a-b)\sum_{i=0}^{p-1}a^i b^{p-1-i}$ donc

$\forall k\in[\![2,n]\!],\ w^{k-1}-v^{k-1}=(w-v)\sum_{i=0}^{k-2}w^i v^{k-2-i} = u(1+v)\sum_{i=0}^{k-2}w^i v^{k-2-i}$

$$G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+w)}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}\left(C_n^k\sum_{i=0}^{k-2}w^i v^{k-2-i}\right)$$

Remarque.. Posons $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $H(u,v) = \sum_{k=2}^{n} \left(C_n^k \sum_{i=0}^{k-2} (u+v+uv)^i v^{k-2-i} \right) \underset{\text{avec } \omega = u+v+uv}{=} \sum_{k=2}^{n} C_n^k \sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-2-i}$.

Alors si $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ et si $\omega = u+v+uv$, $u\neq 0, v\neq 0, \omega\neq 0$: $G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} H(u,v)$

$(u,v)\to G(u,v)$ et $(u,v)\to \frac{2(1+v)(1+u+v+uv)}{n(n-1)} H(u,v)$ étant polyn. fonctions polynômes

qui coïncident sur $\mathbb{R}^2 - \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u=0 \text{ ou } v=0 \text{ ou } u+v+uv=0\}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+u+v+uv)}{n(n-1)} H(u,v)$.

ou $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\omega = u+v+uv \Rightarrow G(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} H(u,v) = \frac{2(1+v)(1+\omega)}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} \left(C_n^k \sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-2-i} \right)$

---

c) "$\frac{\partial \omega}{\partial u} = 1+v$" et "$\frac{\partial \omega}{\partial v} = 1+u$".

Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ et $\omega = u+v+uv$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)} \Big[\underbrace{(1+v)}_{\frac{\partial \omega}{\partial u}} H(u,v) + (1+\omega) \frac{\partial H}{\partial u}(u,v) \Big].$$

Alors $E(X) = \frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)} \left[H(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \right]$.

Notons que si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $\omega^p v^q = \begin{cases} 1 \text{ si } p=q=0 \text{ et } u=v=0 \\ 0 \text{ si } (p,q)\neq(0,0) \text{ et } u=v=0 \end{cases}$.

Alors $\underline{H(0,0) = C_n^2}$ car $\sum_{i=0}^{k-2} \omega^i v^{k-2-i} = \begin{cases} 0 \text{ si } k>2, u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=2, u=v=0 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{c} i=0,\ k-2-i=0 \\ \Updownarrow \\ i=0,\ k=2 \end{array} \right.$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k \underset{\text{à un changement près}}{\sum_{i=1}^{k-2}} i(1+v)\,\omega^{i-1} v^{k-2-i}$$

Or $\sum_{i=1}^{k-2} i(1+v)\,\omega^{i-1} v^{k-2-i} = \begin{cases} 0 \text{ si } k=2, u=v=0 \\ 0 \text{ si } k>3, u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=3, u=v=0 \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{c} i-1 = k-2-i = 0 \\ \Updownarrow \\ i=1 \text{ et } k=3 \end{array} \right.$

Ainsi $\underline{\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = C_n^3}$.

Finalement $E(X) = \frac{2}{n(n-1)}\left[C_n^2 + C_n^3\right] = \frac{2}{n(n-1)} C_{n+1}^3 = \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{n+1}{3}$.

$$E(X) = \frac{n+1}{3}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(1+w)H(u,v) + (1+v)\underbrace{(1+u)}_{\frac{\partial w}{\partial v}}H(u,v) + (1+v)(1+w)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v)\right].$$

$$E(Y) = \frac{\partial G}{\partial v}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)}\left[H(0,0) + H(0,0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0,0)\right] = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + \frac{\partial H}{\partial v}(0,0)\right].$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k-2} i(1+u)w^{i-1}v^{k-2-i}}_{=\begin{cases} 0 \text{ si } k=2,\ u=v=0 \\ 0 \text{ si } k>3,\ u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=3,\ u=v=0 \end{cases}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-3} w^i (k-2-i) v^{k-3-i}}_{=\begin{cases} 0 \text{ si } k=2,\ u=v=0 \\ 0 \text{ si } k>3,\ u=v=0 \\ 1 \text{ si } k=3,\ u=v=0 \end{cases}} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(0,0) = C_n^3(1+1) = 2C_n^3.$$

Alors $E(Y) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + 2C_n^3\right] = 2\,\frac{2}{n(n-1)}\left[C_n^2 + C_n^3\right] = 2E(X) = \frac{2}{3}(n+1)$.

$$E(Y) = \frac{2}{3}(n+1).$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)}\left[(1+v)H(u,v) + (1+w)\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)\right].$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(1+v)H(u,v) + (1+w)\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)\right] + \frac{2(1+v)}{n(n-1)}\left[H(u,v) + (1+v)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) + (1+u)\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) + (1+w)\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(u,v)\right]$$

$$E(XY) = \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)}\left[H(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) + H(0,0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0)\right]$$

$$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2H(0,0) + 2\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0)\right]$$

$$E(XY) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + 2C_n^3 + 2C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0)\right] = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + 4C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0)\right].$$

calculons $\frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u}(0,0)$.

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)=\sum_{k=2}^{n} C_n^k \sum_{i=1}^{k-2} i\,(1+v)\,w^{i-1}\,v^{k-2-i}.$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial u}(u,v)=\sum_{k=2}^{n} C_n^k \Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{k-2} i\,w^{i-1}v^{k-2-i}}_{\left[\begin{cases}0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=2\\ 0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k>3\\ 1 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=3\end{cases}\quad i-1=k-2-i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} i=1\\ k=3\end{cases}\right.} + \underbrace{\sum_{i=2}^{k-2} i(1+v)(i-1)(1+u)\,w^{i-2}v^{k-2-i}}_{\left[\begin{cases}0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k\neq 4\\ 2\times 1 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=4\end{cases}\quad i-2=k-2-i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} i=2\\ k=4\end{cases}\right.} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-3} i(1+v)\,w^{i-1}(k-2-i)\,v^{k-3-i}}_{\left[\begin{cases}0 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k\neq 4\\ 1 \text{ si } u=v=0 \text{ et } k=4\end{cases}\quad i-1=k-3-i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} i=1\\ k=4\end{cases}\right.}$$

Ainsi $\dfrac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial u}(0,0)= C_n^3+2C_n^4+C_n^4 = C_n^3+3C_n^4$

Alors $E(XY)=\dfrac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2+4C_n^3+C_n^3+3C_n^4\right]=\dfrac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2+5C_n^3+3C_n^4\right]$

$$E(XY)=\frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2+2C_n^3+3C_n^3+3C_n^4\right]=\frac{2}{n(n-1)}\left[2C_{n+1}^3+3C_{n+1}^4\right]=\frac{2}{n(n-1)}\left[2C_{n+2}^4+C_{n+1}^4\right]$$

$$E(XY)=\frac{2}{n(n-1)}\,\frac{1}{4!}\left[2\times(n+2)(n+1)n(n-1)+(n+1)n(n-1)(n-2)\right]$$

$$E(XY)=\frac{1}{12}\,(n+1)\left[2(n+2)+n-2\right]\ ;\quad \underline{\underline{E(XY)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}}}.$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\frac{n+1}{3}\times\frac{2(n+1)}{3}=\frac{n+1}{36}\left[9n+6-8n-8\right].$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{(n+1)(n-2)}{36}}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $E(X^2)$, $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$.

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)=\frac{2(1+v)}{n(n-1)}\left[(1+v)\,H(u,v)+(1+w)\,\frac{\partial H}{\partial u}(u,v)\right].$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u,v) = \frac{2(1+v)}{n(n-1)}\left[(1+v)\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) + (1+v)\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) + (1+w)\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u,0)\right].$$

$$E[X(X-1)] = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0,0)\right] = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0,0)\right].$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,0) = \sum_{\ell=2}^{n} C_n^\ell \sum_{i=2}^{\ell-2} i(1+v)w^{i-1}v^{\ell-2-\ell} \; ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(u,v) = \sum_{\ell=2}^{n} C_n^\ell \underbrace{\sum_{i=3}^{\ell-2} i(i-1)(1+v)^2 w^{i-2} v^{\ell-2-i}}_{=\begin{cases} 0 \text{ si } \ell \neq 4,\ u=v=0 \\ 2 \text{ si } \ell = 4,\ u=v=0 \end{cases}}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0,0) = 2C_n^4.$$

$$E[X(X-1)] = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^3 + 2C_n^4\right] = \frac{4}{n(n-1)}C_{n+1}^4 = \frac{4}{n(n-1)}\,\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \frac{1}{6}(n+1)(n-2).$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \frac{1}{6}(n+1)(n-2) + \frac{1}{3}(n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n-2+2) = \frac{n(n+1)}{6}.$$

$\underline{\underline{E(X^2) = \dfrac{n(n+1)}{6}}}$. $\quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{n(n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{3}\right)^2 = \dfrac{n+1}{18}(3n-2n-2).$

$$\underline{\underline{V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(1+w)H(u,v) + (1+v)(1+u)H(u,v) + (1+v)(1+w)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v)\right].$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2(1+u)(1+v)H(u,v) + (1+v)^2(1+u)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v)\right] \text{ car } (1+w) = (1+u)(1+v).$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(u,v) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2(1+u)H(u,v) + 2(1+u)(1+v)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) + 2(1+v)(1+u)\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) + (1+v)^2(1+u)\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u,v)\right].$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2H(0,0) + 4\frac{\partial H}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0,0)\right] = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + 8C_n^3 + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0,0)\right].$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) = \sum_{\ell=2}^{n} C_n^\ell \left(\sum_{i=1}^{\ell-2} i(1+u)w^{i-1}v^{\ell-2-i} + \sum_{i=0}^{\ell-3} w^i(\ell-2-i)v^{\ell-3-i}\right)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(u,v) = \sum_{\ell=2}^{n} C_n^\ell \left[\sum_{i=2}^{\ell-2} i(i-1)(1+u)^2 w^{i-2} v^{\ell-2-i} + \sum_{i=1}^{\ell-3} i(\ell-2-i)(1+u)w^{i-1}v^{\ell-3-i} + \sum_{i=1}^{\ell-3} i(1+u)w^{i-1}(\ell-2-i)v^{\ell-3-i} + \sum_{i=0}^{\ell-4} w^i(\ell-2-i)(\ell-3-i)w^{\ell-4-i}\right]$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(0,0) = 2C_n^4 + C_n^4 + C_n^4 + 2C_n^4 = 6C_n^4.$$

$$E[Y(Y-1)] = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(0,0) = \frac{2}{n(n-1)}\left[2C_n^2 + 8C_n^3 + 6C_n^4\right] = 2 \cdot \frac{2}{n(n-1)}\left[C_n^2 + C_n^3 + 3C_n^3 + 3C_n^4\right].$$

$$E[Y(Y-1)] = \frac{4}{n(n-1)}\left[C_{n+1}^3 + 3C_{n+1}^4\right] = \frac{4}{n(n-1)}\left[\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + 3\,\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4!}\right]$$

$$E[Y(Y-1)] = 2\left[\frac{n+1}{3} + \frac{(n+1)(n-2)}{4}\right] = \frac{n+1}{6}\left[4 + 3(n-2)\right] = \frac{(n+1)(3n-2)}{6}.$$

$$E(Y^2) = E[Y(Y-1)] + E(Y) = \frac{(n+1)(3n-2)}{6} + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{n+1}{6}\left[3n-2+4\right] = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$$

$$\underline{\underline{E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}}}. \qquad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \left(\frac{2(n+1)}{3}\right)^2$$

$$V(Y) = \frac{n+1}{18}\left(9n+6-8n-8\right); \qquad V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

Suppose $n > 2$. $V(X) = V(Y) > 0$.

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{(n+1)(n-2)/36}{(n+1)(n-2)/18} = \frac{1}{2}. \qquad \underline{\underline{\rho = \frac{1}{2}}}.$$