PARTIE I

> ⚠ Dans cette partie j'utiliserai X à la place de x quand je parlerai de polynômes.

Q1 Définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $2XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $-P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $2XP' - P'' \in \mathbb{R}_n[X]$.
φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\varphi(\lambda P+Q) = 2X(\lambda P+Q)' - (\lambda P+Q)'' = 2X(\lambda P'+Q') - (\lambda P''+Q'') = \lambda(2XP'-P'') + (2XQ'-Q'')$
$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.
φ est linéaire.

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

b) $\varphi(1) = 0$. $\varphi(X) = 2X$. $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\varphi(X^k) = 2XkX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} = 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}$.

A deux abus près : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(X^k) = 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}$.

Alors la matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\times1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & -3\times2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 4 & 0 & \ddots & 0\\ & & & \ddots & \ddots & -n(n-1)\\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 2n\end{pmatrix}$$

Q2 a) La matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de φ sont les éléments de la diagonale de cette matrice.

Ainsi $\mathrm{Sp}\,\varphi = \{2k \,;\, k \in [\![0,n]\!]\}$. Alors nous posons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = 2k$.

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

Alors φ est diagonalisable.

b) φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$; nécessairement les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Soit p un élément de $[\![0,n]\!]$. Considérons un élément U_p de $\mathbb{R}_n[X]$ qui engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_p = 2p$. $U_p \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit b_p le coefficient du terme de plus haut degré de U_p. Posons $H_p = \frac{1}{b_p} U_p$.

H_p est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ et H_p est encore un élément de $SEP(\varphi, 2p)$.

Ainsi $2XH'_p - H''_p = 4 H_p$; $H''_p - 2XH'_p + 2p H_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit $\widehat{H}_p$ un second élément unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\widehat{H}''_p - 2X\widehat{H}'_p + 2p\widehat{H}_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$\widehat{H}_p$ appartient au sous-espace propre de φ associé à la valeur propre $2p$.

(car $2X\widehat{H}'_p - \widehat{H}''_p = 2p\widehat{H}_p$) qui est à la droite vectorielle engendrée par U_p ou par H_p.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\widehat{H}_p = \lambda H_p$. Le coefficient du terme de plus haut degré de $\widehat{H}_p$ est le même que le coefficient du terme de plus haut degré de λH_p ; ainsi $1 = \lambda \times 1$. $\lambda = 1$

Alors $\widehat{H}_p = H_p$.

Pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, il existe un et un seul polynôme unitaire H_p vérifiant $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p = 0$

c) Soit $p \in [\![0,n]\!]$. $H_p \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Posons $k = \deg H_p$. Soit a_k le coefficient de X^k dans H_p. $a_k \neq 0$.

Le coefficient de X^k dans $H''_p - 2XH'_p + 2pH_p$ est : $0 - 2k a_k + 2p a_k$.

Ainsi $a_k \neq 0$ et $2(p-k)a_k = 0$. Alors $p - k = 0$; $k = p$.

Pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, H_p est de degré p.

d) 1 (resp. X) a toutes les qualités pour être H_0 (resp. H_1). $H_0 = 1$ et $H_1 = X$.

$\varphi(X^2) = 4X^2 - 2 = 4(X^2 - \frac{1}{2})$. $4(X^2 - \frac{1}{2}) = \varphi(X^2) \underset{\varphi}{=} \varphi(X^2 - \frac{1}{2})$!!

$X^2 - \frac{1}{2}$ est unitaire et $\varphi(X^2 - \frac{1}{2}) = 2\times 2(X^2 - \frac{1}{2})$. $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

Ainsi $H_2 = X^2 - \frac{1}{2}$.

$\varphi(X^3) = 6X^3 - 6X$. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi(X^3 + aX) = 6X^3 - 6X + 2aX = 6(X^3 + (\frac{a}{3} - 1)X)$

Remarquons alors que $\forall a \in \mathbb{R}$, $a = \frac{a}{3} - 1 \iff a = -\frac{3}{2}$.

Alors $\phi(X^3-\frac{3}{2}X) = 6(X^3-\frac{3}{2}X)$ et $X^3-\frac{3}{2}X$ est un polynôme unitaire.

Ainsi $\underline{H_3 = X^3-\frac{3}{2}X}$.

Again ! $\phi(X^4) = 8X^4 - 12X^2$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\phi(X^4+\alpha X^2+\beta) = 8X^4-12X^2+\alpha(4X^2-2) = 8(X^4+\frac{\alpha-3}{2}X^2-\frac{\alpha}{4})$.

$\frac{\alpha-3}{2}=\alpha$ et $-\frac{\alpha}{4}=\beta \Leftrightarrow \alpha=-3$ et $\beta=\frac{3}{4}$.

Alors $X^4-3X^2+\frac{3}{4}$ est unitaire et $\phi(X^4-3X^2+\frac{3}{4}) = 8(X^4-3X^2+\frac{3}{4})$.

Ainsi $\underline{H_4 = X^4-3X^2+\frac{3}{4}}$ ... $H_5 = X^5-5X^3+\frac{15}{4}$; $H_6 = X^6-\frac{15}{2}X^4+\frac{45}{4}X^2-\frac{15}{8}$ ...

Soit $p\in[\![3,n]\!]$. Notons b_p (resp. c_p) le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans H_p.

Le coefficient de X^{p-2} (resp. X^{p-3}) dans H'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans XH'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans H''_p est : 0 (resp. $p(p-1)$).

Alors le coefficient de X^{p-1} (resp. X^{p-2}) dans $H''_p-2XH'_p+2pH_p$ est :

$0-2(p-1)b_p+2pb_p$ (resp. $p(p-1)-2(p-2)c_p+2pc_p$) ; c'est

à dire $2b_p$ (resp. $p(p-1)+4c_p$).

Comme $H''_p-2XH'_p+2pH_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$: $2b_p=0$ et $p(p-1)+4c_p=0$

Alors $b_p=0$ et $c_p = -\frac{p(p-1)}{4}$.

Observons alors que le coefficient de X^{2-1} dans $H_2 = X^2-\frac{1}{2}$ est 0 et que le coefficient de X^{2-2} dans H_2 est $-\frac{1}{2} = -\frac{2(2-1)}{4}$. Ainsi le résultat précédent vaut pour $p=2$.

Pour tout p dans $[\![2,n]\!]$ le coefficient de X^{p-1} dans H_p est 0 et le coefficient de X^{p-2} dans H_p est $\frac{-p(p-1)}{4}$.

Q3 Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Commençons cette question par deux petits lemmes.

Lemme 1. $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \lim_{x\to+\infty} (P(x)e^{-x^2}) = \lim_{x\to-\infty} (P(x)e^{-x^2}) = 0.}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P est constant le résultat est clair.

Supposons que P ne soit pas constant. Soit k le degré de P et a_k le coefficient de x^k dans P. $k \geq 1$ et $a_k \neq 0$

Alors $|P(x)e^{-x^2}| \underset{+\infty\,(-\infty)}{\sim} |a_k||x|^k e^{-x^2} = |a_k| (x^2)^{\frac{k}{2}} e^{-x^2}$

Alors, par croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty} |P(x)e^{-x^2}| = \lim_{x\to-\infty} |P(x)e^{-x^2}| = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} (P(x)e^{-x^2}) = \lim_{x\to-\infty} (P(x)e^{-x^2}) = 0$.

Lemme 2 $\boxed{\forall S \in \mathbb{R}[X], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-t^2}\,dt \text{ converge.}}$

$\varphi : t \mapsto S(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après le lemme 1, $\lim_{t\to+\infty} (t^2\varphi(t)) = \lim_{t\to+\infty} (t^2\varphi(t)) = 0$

Alors $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [A, +\infty[, \quad 0 \leq |t^2\varphi(t)| \leq 1$.

$\exists B \in \mathbb{R}_-^*, \forall t \in]-\infty, B], \quad 0 \leq |t^2\varphi(t)| \leq 1$.

$\forall t \in [A, +\infty[, \; 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\forall t \in]-\infty, B], \; 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et de $\int_{-\infty}^{B} \frac{1}{t^2}\,dt$ et la positivité de $|\varphi|$ donnent

la convergence de $\int_A^{+\infty} |\varphi(t)|dt$ et de $\int_{-\infty}^{B} |\varphi(t)|\,dt$ donc la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt$ est absolument convergente donc convergente. Ce qui achève la démonstration du lemme 2.

a) Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]$. $PQ\in\mathbb{R}[X]$ donc d'après le lemme 2, $\int_{-\infty}^{+\infty}(PQ)(t)e^{-t^2}dt$ est convergente.

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, $\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ existe.

b) Soit $(P,Q,R)\in(\mathbb{R}_n[X])^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

toutes les intégrales convergent

- $\langle\lambda P+Q,R\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda P+Q)(t)R(t)e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda P(t)R(t)e^{-t^2}+Q(t)R(t)e^{-t^2})dt=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)R(t)e^{-t^2}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)R(t)e^{-t^2}dt$

  $\langle\lambda P+Q,R\rangle=\lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle$.

- $\langle Q,P\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(t)P(t)e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t^2}dt=\langle P,Q\rangle$; $\langle Q,P\rangle=\langle P,Q\rangle$.

- $\forall t\in\mathbb{R}$, $P^2(t)e^{-t^2}\geqslant 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty}(P(t))^2e^{-t^2}dt\geqslant 0$; $\langle P,P\rangle\geqslant 0$.

- Supposons $\langle P,P\rangle=0$. $t\mapsto(P(t))^2e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

  Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}(P(t))^2e^{-t^2}dt=0$: $\forall t\in\mathbb{R}$, $(P(t))^2e^{-t^2}=0$; $\forall t\in\mathbb{R}$, $(P(t))^2=0$; $\forall t\in\mathbb{R}$, $P(t)=0$

  $\langle P,P\rangle=0\Rightarrow P=0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Ceci suffit pour dire que : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. $\psi : t\mapsto P'(t)e^{-t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\psi'(t)=P''(t)e^{-t^2}-2tP'(t)e^{-t^2}=-\phi(P)(t)e^{-t^2}$.

La dérivée de $t\mapsto P'(t)e^{-t^2}$ est : $t\mapsto-\phi(P)(t)e^{-t^2}$.

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$\int_A^B\phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt=-\int_A^B\psi'(t)Q(t)$. Une intégration par parties donne alors :

$\int_A^B\phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt=-[\psi(t)Q(t)]_A^B+\int_A^B\psi(t)Q'(t)dt$

$\int_A^B\phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt=-P'(B)Q(B)e^{-B^2}+P'(A)Q(A)e^{-A^2}+\int_A^BP'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$.

$\phi(P)$, Q, P' et Q' sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$ convergent.

$P'Q \in \mathbb{R}[X]$ donc, d'après le lemme 1, $\lim_{B\to+\infty}(P'(B)Q(B)e^{-B^2}) = \lim_{A\to-\infty}(P'(A)Q(A)e^{-A^2}) = 0$.

En faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans la dernière égalité de la page précédente on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$.

Ainsi $\underline{\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2,\ <\phi(P),Q> = <P',Q'>}$ ... nous nous en souviendrons.

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. $<\phi(P),Q> = <P',Q'>$ et $<\phi(Q),P> = <Q',P'>$.

Alors $<\phi(P),Q> = <P',Q'> = <Q',P'> = <\phi(Q),P> = <P,\phi(Q)>$.

$\underline{\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2,\ <\phi(P),Q> = <P,\phi(Q)>\ ;\ \phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}_n[X].}$

<u>d)</u> ϕ étant symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Soit $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $p\neq q$.

$SEP(\phi,2p)$ et $SEP(\phi,2q)$ sont orthogonaux, $H_p\in SEP(\phi,2p)$ et $H_q\in SEP(\phi,2q)$;

ainsi H_p et H_q sont orthogonaux.

$\underline{\forall (p,q)\in[\![0,n]\!]^2,\ p\neq q \Rightarrow <H_p,H_q> = 0}$.

Soit $p\in[\![0,n]\!]$.

$(H_0,H_1,\dots,H_p)$ est une famille d'éléments <u>non nuls</u> et deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}_p[X]$.

Alors $(H_0,H_1,\dots,H_p)$ est une famille libre de cardinal $p+1$ de $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$. $(H_0,H_1,\dots,H_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

Mieux $(H_0,H_1,\dots,H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_p[X]$.

$\underline{\text{Pour tout } p \text{ dans } [\![0,n]\!],\ (H_0,H_1,\dots,H_p) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_p[X].}$

En particulier $\underline{(H_0,H_1,\dots,H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. H_p est orthogonal à $H_0, H_1, \dots, H_{p-1}$.

H_p est orthogonal à $\mathrm{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_{p-1}) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Ainsi $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$.

$\forall p \in [\![1,n]\!]$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$.

Q4 Etude des racines des polynômes H_p ($1 \le p \le n$).

Soit $p \in [\![1,n]\!]$.

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) e^{-t^2} dt = \langle H_p, 1 \rangle \overset{1 \in \mathbb{R}_{p-1}[X]}{=} 0 ;$$

Si $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$.

Or, comme $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ n'est pas la fonction nulle, alors $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$.

$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $H_p(t_1) e^{-t_1^2} > 0$ et $H_p(t_2) e^{-t_2^2} < 0$.

H_p est continue sur $\mathbb{R}$, $H_p(t_1) > 0$ et $H_p(t_2) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe c dans l'intervalle ouvert défini par t_1 et t_2 tel que $H_p(c) = 0$.

H_p admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Si H_p n'admet que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$, H_p garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas.

Alors H_p admet au moins une racine d d'ordre impair dans $\mathbb{R}$.

H_p s'annule en changeant de signe en d.

H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont en fait les racines d'ordre impair de H_p dans $\mathbb{R}$.
Alors $H_p P_m = H_p(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_m)$ n'a que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$. Ainsi $H_p P_m$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Supposons $m < p$. Alors $\langle H_p, P_m \rangle = 0$ car $P_m \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.
Alors $t \mapsto H_p(t) P_m(t) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} = 0$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $H_p(t) P_m(t) = 0$. $H_p P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Ceci donne $H_p = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui n'est pas.
Par conséquent $m = p$.

c) P_m divise H_p ($a_1, \dots, a_m$ sont m racines de H_p deux à deux distinctes) et $\deg P_m = p = \deg H_p$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $H_p = \lambda P_m = \lambda P_p$.
Comme H_p et P_p sont unitaires : $H_p = P_p = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_p)$

H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

Q5 Relations entre les polynômes H_p ($2 \le p \le n$).

a) Supposons que $p \in [\![3, n]\!]$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$.
$\langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t H_{p-1}(t) \varphi(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p-1}(t)\, t\varphi(t) e^{-t^2} dt = \langle H_{p-1}, X\varphi \rangle$.
Or $X\varphi \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$ donc $\langle H_{p-1}, X\varphi \rangle = 0$.
$\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X] \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$; $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$. Alors $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = \langle H_p, \varphi \rangle - \langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$.

$\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$, $\langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ et $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ ceci pour tout $p \in [\![3, n]\!]$.

H_p et XH_{p-1} sont deux polynômes unitaires de degré p.

Ainsi $H_p - XH_{p-1}$ est un élément de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$\exists(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $\quad H_p - XH_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i$.

Supposons $p \geqslant 3$

$\forall \ell \in [\![0, p-3]\!]$, $\langle H_p - XH_{p-1}, H_\ell \rangle = 0$ d'après ce qui précède.

$\forall k \in [\![0, p-3]\!], 0 = \langle \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i, H_\ell \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \langle H_i, H_\ell \rangle \underset{\uparrow}{=} \alpha_\ell \|H_\ell\|^2$

$\langle H_i, H_\ell \rangle = 0$ si $i \neq \ell$

$\forall \ell \in [\![0, p-3]\!]$, $\alpha_\ell \|H_\ell\|^2 = 0$ et $\|H_\ell\|^2 \neq 0$

$\forall k \in [\![0, p-3]\!]$, $\alpha_\ell = 0$.

Alors $\quad H_p - XH_{p-1} = \alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$

Notons que ceci vaut encore pour $p=2$ car $H_2 - XH_1 = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i H_i$.

Le coefficient de X^{p-1} dans $H_p - XH_{p-1}$ est : $0 - 0 = 0$

Le coefficient de X^{p-2} dans $H_p - XH_{p-1}$ est : $-\frac{p(p-1)}{4} - \left(-\frac{(p-1)(p-2)}{4}\right)$;

coeff de X^{p-2} dans H_p $\quad$ coeff de X^{p-3} dans H_{p-1}.

c'est à dire : $-\frac{p-1}{4}(p-(p-2)) = -\frac{p-1}{2}$.

Le coefficient de X^{p-1} dans $\alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$ est : α_{p-1}.

Le coefficient de X^{p-2} dans $\alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$ est : $\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} \times 0 = \alpha_{p-2}$.

Ainsi $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} = -\frac{p-1}{2}$. $H_p - XH_{p-1} = -\frac{p-1}{2} H_{p-2}$.

ceci suffit pour dire que : $\underline{\forall p \in [\![2,n]\!],\ 2H_p - 2XH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0}$.

b) Soit $p \in [\![2,n]\!]$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$. Soit S un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $S' = Q$.

Alors $S \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $\langle H_p', Q \rangle = \langle H_p', S' \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle \phi(H_p), S \rangle = 2p \langle H_p, S \rangle \underset{\uparrow}{=} 0$

Q3 c) $\quad S \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$

$\underline{\forall p \in [\![2,n]\!], \forall Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X], \langle H_p', Q \rangle = 0.}$

Soit $p \in [\![2,n]\!]$. $H_p' - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$ (le coeff. de X^{p-1} dans H_p' est p) et

$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, $\langle H_p' - pH_{p-1}, Q \rangle = \langle H_p', Q \rangle - p\langle H_{p-1}, Q \rangle = 0 - p \times 0 = 0$.

$H_p' - pH_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X] \cap \mathbb{R}_{p-2}[X]^\perp$. $H_p' - pH_{p-1} = 0$. $H_p' = pH_{p-1}$. Ceci vaut également pour $p=1$. Alors $\underline{\forall p \in [\![1,n]\!],\ H_p' = pH_{p-1}}$.

PARTIE II

Q1 a) $(x_1,x_2) \mapsto x_2 - x_1$ est de classe C^1 et strictement positive sur U (c'est une fonction polynomiale) et $\ln$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; par composition $(x_1,x_2) \mapsto \ln(x_2-x_1)$ est de classe C^1 sur U. De plus $(x_1,x_2) \mapsto x_1^2+x_2^2$ est de classe C^1 sur U (fonction polynômiale). Alors F est de classe C^1 sur U comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur U.

<u>F est de classe C^1 sur l'ouvert U.</u>

$\forall x=(x_1,x_2) \in U,\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + \dfrac{2}{x_2-x_1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 2x_2 - \dfrac{2}{x_2-x_1}$.

Soit $x=(x_1,x_2) \in U$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 0 \iff \frac{1}{x_2-x_1} = -x_1 = x_2 \iff \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ 1 = -x_1(-2x_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \underset{x_1<x_2}{\iff} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

<u>L'unique point de U où les deux dérivées partielles premières de F sont nulles est : $a=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.</u>

b) $F(a) = F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} - 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\ln\frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - 2\ln\sqrt{2} = 1-\ln 2$.

<u>$F(a) = 1-\ln 2$.</u>

$\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ sont de classe C^1 sur U comme fonctions rationnelles donc F est de classe C^2 sur U.

$\forall x=(x_1,x_2) \in U,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x) = 2 + \dfrac{2}{(x_2-x_1)^2},\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x) = 2 + \dfrac{2}{(x_2-x_1)^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = -\dfrac{2}{(x_2-x_1)^2}$

Posons $r = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(a)$.

$r = t = 2 + \dfrac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2 + \dfrac{2}{(\sqrt{2})^2} = 3$ et $s = -\dfrac{2}{(\sqrt{2})^2} = -1$. $rt - s^2 = 8$ et $r>0$.

Le cours permet de dire que <u>F admet en a un minimum local car U est un ouvert.</u>

(Q2) Etude du point critique de F dans le cas général.

a) P est dérivable et non nulle en tout point de $\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_n\}$

$|P|$ est dérivable et strictement positive en tout point de $\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_n\}$.

Donc $\ln|P|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_n\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_n\}$, $\ln|P(x)| = \sum_{j=1}^{n} \ln|x-a_j|$. En dérivant il vient:

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_n\}$, $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x-a_j}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $\lim_{x\to a_i}\left(\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}\right) = \lim_{x\to a_i}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{x-a_j}\right) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{a_i-a_j}$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lim_{x\to a_i}\left(\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}\right) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{a_i-a_j}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, soit a un élément de I et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ en a:

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$ (au voisinage de a) ou

$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$ (au voisinage de 0).

Rappelons que $f^{(n)}(a)$ existe signifie que f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a ... au moins pour $n\geq 1$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

P et P' sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $P(a_i+t) = P(a_i) + tP'(a_i) + \dfrac{t^2}{2}P''(a_i) + o(t^2) \overset{P(a_i)=0}{=} tP'(a_i) + \dfrac{t^2}{2}P''(a_i) + o(t^2)$ en 0...

$P'(a_i+t) = P'(a_i) + t\,P''(a_i) + o(t)$ en 0.

$tP'(a_i+t) = tP'(a_i) + t^2 P''(a_i) + o(t^2)$ en 0. Ainsi:

$g(t) = t\,P(a_i+t) = t^2 P'(a_i) + o(t^2)$ en 0,

et $f(t) = tP'(a_i+t) - P(a_i+t) = t\,P'(a_i) + t^2 P''(a_i) - tP'(a_i) - \dfrac{t^2}{2}P''(a_i) + o(t^2)$ en 0.

Finalement $f(t)=\frac{t^2}{2}P''(a_i)+o(t^2)$ et $g(t)=t^2P'(a_i)+o(t^2)$ en 0.

a_i est une racine simple de P donc $P'(a_i)\neq 0$; $g(t)\underset{t\to 0}{\sim} t^2P'(a_i)$.

$f(t)=\frac{t^2}{2}P''(a_i)+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

$$\frac{f(t)}{g(t)}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{f(t)}{t^2P'(a_i)}=\frac{1}{P'(a_i)}\left(\frac{1}{2}P''(a_i)+\varepsilon(t)\right).$$

Ainsi $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{P'(a_i)}\left(\frac{1}{2}P''(a_i)+\varepsilon(t)\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}$ car P'' est continue en a_i.

Alors $\frac{1}{2}\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{tP'(a_i+t)-P(a_i+t)}{t\,P(a_i+t)}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{P'(a_i+t)}{P(a_i+t)}-\frac{1}{t}\right)$

Ainsi $\lim\limits_{x\to a_i}\left(\frac{P'(x)}{P(x)}-\frac{1}{x-a_i}\right)=\lim\limits_{x\to a_i}\left(\frac{P'(a_i+(x-a_i))}{P(a_i+(x-a_i))}-\frac{1}{(x-a_i)}\right)=\frac{1}{2}\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}$

$\lim\limits_{x\to a_i}(x-a_i)=0$!

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lim_{x\to a_i}\left(\frac{P'(x)}{P(x)}-\frac{1}{x-a_i}\right)=\frac{1}{2}\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}.$$

c) Il résulte de a) et b) et de l'unicité de la limite d'une fonction

que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_i-a_j}=\frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$

Retrouvons ce résultat en quelques lignes. Soit P_i le quotient de P par $X-a_i$: $\forall x\in\mathbb{R},\ P_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-a_j)$. Alors la formule du a) permet d'écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n\},\ \frac{P_i'(x)}{P_i(x)}=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x-a_j}$. Ainsi $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_i-a_j}=\frac{P_i'(a_i)}{P_i(a_i)}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=(x-a_i)P_i(x)$; $\forall x\in\mathbb{R},\ P'(x)=P_i(x)+(x-a_i)P_i'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R},\ P''(x)=2P_i'(x)+(x-a_i)P_i''(x)$

Alors $P'(a_i)=P_i(a_i)$ et $P''(a_i)=2P_i'(a_i)$. $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{a_i-a_j}=\frac{P_i'(a_i)}{P_i(a_i)}=\frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$.

⚠ Attention : notre ▲ et ▼ ne redevient un élément de $\mathbb{R}^n$!!!

▲ Montrons d'abord que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$.
$(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j - x_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (fonction polynômiale) et strictement positive sur U. Comme $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \ln(x_j - x_i)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Par combinaison linéaire, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto -2\sum_{1\le i<j\le n} \ln(x_j-x_i)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Comme $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (fonction polynômiale) on peut dire que :

<u>F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U</u> comme somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)$ un élément de U et soit k un élément de $[\![1,n]\!]$.

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ i\ne k,\, j\ne k}} \ln(x_j-x_i) - 2\sum_{i=1}^{k-1} \ln(x_k - x_i) - 2\sum_{j=k+1}^{n} \ln(x_j - x_k).$$ Alors :

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - 2\times 0 - 2\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k-x_i} - 2\sum_{j=k+1}^{n} \frac{-1}{x_j-x_k}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - 2\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{x_k-x_i} - 2\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\underline{\underline{x_k-x_j}}} = 2x_k - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}.$$

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \forall x=(x_1,\dots,x_n)\in U,\quad \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n} \frac{1}{x_k-x_j}.$$ ▼

⊛ Dans la suite de la question $a=(a_1,\dots,a_n)\in U$ et $P=(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ ⊛

a est un point critique de $F \iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)=0$

" " " $\iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ 2a_i - 2\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{a_i-a_j} = 0$

" " " $\overset{2}{\iff} \forall i\in[\![1,n]\!],\ 2a_i - \frac{2P''(a_i)}{2P'(a_i)} = 0$

" " " $\iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ 2a_i P'(a_i) - P''(a_i) = 0$.

<u>$a=(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de F si et seulement si $x\mapsto 2xP'(x)-P''(x)$ admet $a_1,a_2,\dots,a_n$ pour racines.</u>

d) • Supposons que $x\mapsto 2xP'(x)-P''(x)$ admette $a_1,a_2,\dots,a_n$ pour racines.

$x\mapsto 2xP'(x)-P''(x)$ est une fonction polynomiale de degré n admettant pour racines $a_1,\dots,a_n$.

Ainsi $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 2xP'(x)-P''(x)=\lambda\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\lambda P(x)$ car $a_1,a_2,\dots,a_n$ sont deux à deux distincts.

• Réciproquement supposons que : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 2xP'(x)-P''(x)=\lambda P(x)$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\ 2a_iP'(a_i)-P''(a_i)=\lambda P(a_i)=0$. $x\mapsto 2xP'-P''$ admet $a_1,a_2,\dots,a_n$ pour racines.

<u>Ainsi $a=(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de F si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 2xP'(x)-P''(x)=\lambda P(x)$.</u>

ou $a=(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de F ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ 2XP'-P''=\lambda P$

ou $a=(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de F ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \phi(P)=\lambda P$.

• Supposons que $a=(a_1,\dots,a_n)$ est un point critique de F.

$P\neq 0$ et $\phi(P)=\lambda P$; P est un vecteur propre de ϕ.

Alors $\exists p\in[\![0,n]\!],\ \lambda=2p$; mais alors P est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $-2XP'+P''+2pP=0$ donc $P=H_p$.

En particulier $n=\deg P=\deg H_p=p$; $p=n$. $P=H_n$.

• Réciproquement supposons que $P=H_n$. $-2XP'+P''+2nP=0$;

$2XP'-P''=(2n)P$; $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ 2XP'-P''=\lambda P$; a est un point critique de F.

<u>Finalement a est un point critique de F si et seulement si $P=H_n$.</u>

Rappelons que H_n admet n zéros distincts. Soit $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ la suite strictement croissante constituée des zéros de H_n.

$P=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ avec $a_1<\dots<a_n$ et $H_n=\prod_{i=1}^{n}(X-b_i)$ avec $b_1<b_2<\dots<b_n$.

Alors $P=H_n \iff (a_1,a_2,\dots,a_n)=(b_1,b_2,\dots,b_n)$.

$a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est un point critique de F ssi $(a_1,\dots,a_n)=(b_1,\dots,b_n)$.

Ainsi F admet un unique point critique le point $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ qui est la suite strictement croissante constituée des zéros de H_n.

(Q3) Nature du point critique de F dans le cas général.

a) Soient $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ deux éléments de U et soit $t\in[0,1]$.

Soit $i\in[\![1,n-1]\!]$. $x_i<x_{i+1}$ et $y_i<y_{i+1}$.

Si $t=0$: $tx_i+(1-t)y_i=y_i<y_{i+1}=tx_{i+1}+(1-t)y_{i+1}$.

Si $t=1$: $tx_i+(1-t)y_i=x_i<x_{i+1}=tx_{i+1}+(1-t)y_{i+1}$.

Si $t\in]0,1[$, $tx_i<tx_{i+1}$ et $(1-t)y_i<(1-t)y_{i+1}$ donc $tx_i+(1-t)y_i<tx_{i+1}+(1-t)y_{i+1}$.

Dans tous les cas : $tx_i+(1-t)y_i<tx_{i+1}+(1-t)y_{i+1}$ et ceci pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$.

Alors $tx+(1-t)y\in U$.

$\forall (x,y)\in U^2$, $\forall t\in[0,1]$, $tx+(1-t)y\in U$. U est convexe.

b) • $\varphi: x\mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi''(x)=2\geqslant 0$.

$\varphi: x\mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Posons $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in U$, $\phi_i(x)=x_i^2$

Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ deux éléments de U. Soit $t\in[0,1]$.

$\phi_i(tx+(1-t)y)=(tx_i+(1-t)y_i)^2=\varphi(tx_i+(1-t)y_i)\leq t\varphi(x_i)+(1-t)\varphi(y_i)$ car φ est convexe.

Ainsi $\phi_i(tx+(1-t)y)\leq tx_i^2+(1-t)y_i^2=t\phi_i(x)+(1-t)\phi_i(y)$.

Ceci achève de prouver que ϕ_i est convexe sur U.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i^2$ est convexe sur U.

• $\hat{\varphi} : x \mapsto -\ln x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{\varphi}''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

$\hat{\varphi} : x \mapsto -\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ ... pas sur $\mathbb{R}$!!

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$.

Posons $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, $\hat{\varphi}_{ij}(x) = -\ln(x_j - x_i) = \hat{\varphi}(x_j - x_i)$

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de U. Soit $t \in [0,1]$.

$\hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y) = \hat{\varphi}(tx_j + (1-t)y_j - (tx_i + (1-t)y_i)) = \hat{\varphi}(t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i))$

$\hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y) \leq t\,\hat{\varphi}(x_j - x_i) + (1-t)\,\hat{\varphi}(y_j - y_i) = t\,\hat{\varphi}_{ij}(x) + (1-t)\,\hat{\varphi}_{ij}(y)$.

ceci achève de prouver que $\hat{\varphi}_{ij}$ est convexe sur U.

Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et si $i<j$: $(x_1, \ldots, x_n) \to -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U.

• Notons que $F = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}$.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de U. Soit $t \in [0,1]$.

$F(tx + (1-t)y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(tx + (1-t)y) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y)$.

$F(tx + (1-t)y) \leq \sum_{i=1}^{n} (t\varphi_i(x) + (1-t)\varphi_i(y)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (t\,\hat{\varphi}_{ij}(x) + (1-t)\,\hat{\varphi}_{ij}(y))$

$F(tx + (1-t)y) \leq t\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(x)\right) + (1-t)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(y)\right)$

$F(tx + (1-t)y) \leq t\,F(x) + (1-t)\,F(y)$.

F est convexe sur U.

c) • $a = (a_1, \ldots, a_n)$. $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

$\forall t \in [0,1]$, $\psi(t) = F(tx_1 + (1-t)a_1, \ldots, tx_n + (1-t)a_n)$.

→ Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t \mapsto tx_i + (1-t)a_i$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et sa dérivée est $t \mapsto x_i - a_i$.

→ $\forall t \in [0,1]$, $(tx_1 + (1-t)a_1, \dots, tx_n + (1-t)a_n) \in U$

→ F est de classe C^1 sur U.

Alors → φ est de classe C^1 sur $[0,1]$

→ $\forall t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx + (1-t)a)$.

$\varphi'(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$ car a est un (le !) point critique de F.

$\varphi'(0) = 0$.

• $\forall t \in [0,1]$, $F(tx + (1-t)a) \overset{F \text{ est convexe}}{\leq} tF(x) + (1-t)F(a) = t(F(x) - F(a)) + F(a)$

$\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) \leq t(F(x) - F(a)) + \varphi(0)$.

$\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq F(x) - F(a)$

En faisant tendre t vers 0 il vient $\varphi'(0) \leq F(x) - F(a)$ donc $F(x) - F(a) \geq 0$

Finalement $\forall x \in U$, $F(x) \geq F(a)$. F admet en a un minimum ... ce qui ne surprendra pas les spécialistes des fonctions convexes...

Q4 a) • Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. $2H_n(y_i) - \underbrace{2y_i H_{n-1}(y_i)}_{=0} + (n-1) H_{n-2}(y_i) = 0$.

Donc $H_n(y_i) = \dfrac{n-1}{2} H_{n-2}(y_i)$. Or $H_{n-2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-2} (X - z_k)$ et $H_{n-1} = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n-1} (X - y_\ell)$

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} H_{n-2}(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (y_i - z_k) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} (y_i - z_k)$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \left((-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (z_k - y_i)\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \left((-1)^{n-1} H_{n-1}(z_k)\right)$$

Alors $$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \left|(-1)^{n-1} H_{n-1}(z_k)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} |H_{n-1}(z_k)|$$

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{k=1}^{n-2} H_{n-1}(z_k)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i)\right|.$$

Pour tout $n \in [\![1,+\infty[\![$, notons $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ les racines de H_n.

Posons alors : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_n = \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(t_i^{(n-1)})\right|$

Nous avons montré que : $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $\alpha_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \alpha_{n-1}$

Alors $\alpha_3 = \frac{2^2}{2^2}\alpha_2$; $\alpha_4 = \frac{3^3}{2^3}\alpha_3 = \frac{2^2 \times 3^3}{2^{2+3}}\alpha_2$; $\alpha_5 = \frac{4^4}{2^4}\alpha_4 = \frac{2^2 \times 3^3 \times 4^4}{2^{2+3+4}}\alpha_2 \dots$

Notons que $\alpha_2 = |H_2(0)|$ (0 est la seule racine de H_1)

$\alpha_2 = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\alpha_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1} k^k}{2^{\sum_{k=1}^{n-1} k}} = \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k$

→ C'est clair pour $n = 2$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $[\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$\alpha_{n+1} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \alpha_n = \frac{n^n}{2^n} \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^{n-1} k}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k = \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^{n} k}} \prod_{k=1}^{n} k^k$$ et la récurrence s'achève.

Ainsi $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k$.

• Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Posons $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)$. $H_n = (X - a_i) Q_i$

$H_n' = Q_i + (X - a_i) Q_i'$

$H_n'(a_i) = Q_i(a_i)$. $H_n'(a_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)$; $|H_n'(a_i)| = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_i - a_j| = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_j - a_i| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|H_n'(a_i)| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $H'_n(a_i) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)$. $\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)$.

$$\left|\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i)\right| = \left|\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)\right| \times \left|\prod_{1\leq j<i\leq n} (a_i - a_j)\right| \overset{\text{à méditer}}{=} \Big[\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)\Big]^2 = \Big[\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)\Big]^2.$$

Alors $P_n^2 = \left[\left|\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i)\right|\right]$; $P_n \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\left|\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i)\right|}$.

$P_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i) > 0$ car $a_j > a_i$ si $j > i$

$$\underline{\underline{P_n = \sqrt{\left|\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i)\right|}.}}$$

• $\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i) = \prod_{i=1}^{n} (n H_{n-1}(a_i)) = n^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{n-1} (a_i - y_\ell) = n^n \prod_{\ell=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (a_i - y_\ell)$

$\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i) = n^n \prod_{\ell=1}^{n-1} \Big[(-1)^n \prod_{i=1}^{n} (y_\ell - a_i)\Big] = ((-1)^n)^{n-1} n^n \prod_{\ell=1}^{n-1} H_n(y_\ell) = n^n \prod_{\ell=1}^{n-1} H_n(y_\ell)$

(notons que $n(n-1)$ est pair : $(-1)^{n(n-1)} = 1$)

Alors : $\left|\prod_{i=1}^{n} H'_n(a_i)\right| = n^n \left|\prod_{\ell=1}^{n-1} H_n(y_\ell)\right| = n^n \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right|$. Ainsi :

$$\underline{\underline{P_n^2 = n^n \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right|.}}$$

• Alors $P_n^2 = n^n \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{\ell=1}^{n-1} \ell^\ell = \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{\ell=1}^{n} \ell^\ell$

Rappelons que P_n est positif donc $\underline{\underline{P_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{4}}} \prod_{\ell=1}^{n} \ell^{\ell/2}.}}$

<u>b)</u> - $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est le coefficient de X^{n-1} dans H_n c'est donc : 0.

$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$ est le coefficient de X^{n-2} dans H_n c'est donc : $-\dfrac{n(n-1)}{4}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = -\frac{n(n-1)}{4}$$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = 0 - 2\left(-\frac{n(n-1)}{4}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} \ln(a_j - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \ln\Big[\prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)\Big]^2$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} - \ln p_n^2 = (n-1) - \ln\left(\frac{1}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}\prod_{k=1}^{n} k^k\right)$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\ln 2 - \sum_{k=2}^{n} k\ln k.$$

- Pour $n = 2$. $a = (a_1, a_2)$ avec (a_1, a_2) suite croissante des zéros de $H_2 = X^2 - \frac{1}{2}$. Alors $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De plus $F(a) = \frac{2(2-1)}{2} + \frac{2(2-1)}{2}\ln 2 - 2\ln 2 = 1 - \ln 2$.

de plus F admet un minimum absolu en a.

On retrouve très largement les résultats de II 1°.