PARTIE I Généralités

Dans toute la suite nous n'utiliserons pas la notation ϕf ; nous écrirons $\phi(f)$.

Q1 a) Soit x un réel. Le changement de variable $u = t-(x-1)$ donne :

$$\phi(f)(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt=\int_0^1 f(u+(x-1))\,du=\int_0^1 f(x+u-1)\,du.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \phi(f)(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt=\int_0^1 f(x+u-1)\,du.$$

b) Supposons que : $\exists \varepsilon\in\{-1,1\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\varepsilon f(x)$ (les deux cas en un ...)

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \phi(f)(-x)=\int_0^1 f(-x+u-1)\,du=\varepsilon\int_0^1 f(x-u+1)\underset{v=1-u}{=}\varepsilon\int_1^0 f(x+v)(-dv)=\varepsilon\int_0^1 f(x+v)\,dv.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\phi(f)(-x)=\varepsilon\int_0^1 f(x+1+v-1)\,dv=\varepsilon\,\phi(f)(x+1).$$

Ainsi si f est paire : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\phi(f)(-x)=\phi(f)(x+1)$ et si f est impaire : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\phi(f)(-x)=-\phi(f)(x+1)$.

c) Supposons f croissante. Soit $(x,x')\in\mathbb{R}^2$ tel que : $x\leq x'$.

$\forall u\in[0,1]$, $x+u-1\leq x'+u-1$ donc $\forall u\in[0,1]$, $f(x+u-1)\leq f(x'+u-1)$.

En intégrant il vient : $\int_0^1 f(x+u-1)\,du\leq\int_0^1 f(x'+u-1)\,du$. Ainsi $\phi(f)(x)\leq\phi(f)(x')$.

Par conséquent si f est croissante : $\phi(f)$ est croissante.

On montre de même que si f est décroissante : $\phi(f)$ est décroissante.

d) Supposons que f est convexe. Montrons que $\phi(f)$ est convexe.

Soit $(x,x')\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Montrons que $\phi(f)(\lambda x+(1-\lambda)x')\leq\lambda\,\phi(f)(x)+(1-\lambda)\phi(f)(x')$.

Soit $u\in[0,1]$.

$$f(\lambda x+(1-\lambda)x'+u-1)=f(\lambda(x+u-1)+(1-\lambda)(x'+u-1))\underset{f\text{ est convexe}}{\leq}\lambda f(x+u-1)+(1-\lambda)f(x'+u-1)$$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\int_0^1 f(\lambda x+(1-\lambda)x'+u-1)\,du\leq\lambda\int_0^1 f(x+u-1)\,du+(1-\lambda)\int_0^1 f(x'+u-1)\,du.$$

Ainsi $\phi(f)(\lambda x+(1-\lambda)x'+u-1)\leq\lambda\,\phi(f)(x)+(1-\lambda)\phi(f)(x')$.

Si f est convexe, $\phi(f)$ est convexe.

On montre de même que si f est concave : $\phi(f)$ est concave.

Remarque.. On peut retrouver ces deux résultats en prouvant que $\phi(f)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)''(x) = f'(x) - f'(x-1)$.

Alors f convexe $\Rightarrow f'$ croissante $\Rightarrow \phi(f)'' \geqslant 0 \Rightarrow \phi(f)$ convexe, de même donc pour la concavité.

e) Supposons que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = L$ et montrons que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \phi(f)(x) = L$ $(L \in \mathbb{R}\ ?!)$.

Montrons que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A' \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = L$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant A \Rightarrow |f(y) - L| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [A+1, +\infty[$. $\forall u \in [0,1]$, $u-1 \geqslant -1$. $\forall u \in [0,1]$, $x+u-1 \geqslant x-1 \geqslant A+1-1 = A$

Donc $\forall u \in [0,1]$, $|f(x+u-1) - L| \leqslant \varepsilon$.

Alors $|\phi(f)(x) - L| = \left|\int_0^1 f(x+u-1)\,du - \int_0^1 L\,du\right| = \left|\int_0^1 (f(x+u-1) - L)\,du\right| \leqslant \int_0^1 |f(x+u-1) - L|\,du$.

$|\phi(f)(x) - L| \leqslant \int_0^1 |f(x+u-1) - L|\,du \leqslant \int_0^1 \varepsilon\,du = \varepsilon$.

Alors $A+1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A+1 \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

Posons $A' = A+1$. $A' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A' \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A' \Rightarrow |\phi(f)(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = L$ donne $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \phi(f)(x) = L$.

De même $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = L$ donne $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \phi(f)(x) = L$.

Exercice de contrôle.. Montrer que tout ceci vaut encore pour $L = +\infty$ ou $-\infty$.

Q2 a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\phi(P)(x) = \int_{x-1}^{x} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{x-1}^{x} t^k dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1}$.

$$\phi(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left[x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i} x^i (-1)^{k+1-i} \right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \sum_{i=0}^{\boxed{k}} C_{k+1}^{i} (-1)^{k-i} x^i.$$

$$\phi(P)(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{a_k}{k+1} C_{k+1}^{i} (-1)^{k-i} \right) x^i \ ; \text{ alors } \phi(P) \in \mathbb{R}_n[x].$$

<u>$\mathbb{R}_n[x]$ est stable par ϕ.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_k(x) = x^k$.

voir plus haut

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \phi_n(e_k)(x) = \int_{x-1}^{x} t^k dt = \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i} (-1)^{k-i} x^i$$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi_n(e_k) = \dfrac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i} (-1)^{k-i} e_i$. La matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ ~~est~~ :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & \cdots & \frac{(-1)^k}{k+1} C_{k+1}^{0} & \cdots & \frac{(-1)^n}{n+1} C_{n+1}^{0} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} C_{k+1}^{1} & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} C_{n+1}^{1} \\ & 0 & \ddots & \frac{(-1)^0}{k+1} C_{k+1}^{k} & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \frac{(-1)^0}{n+1} C_{n+1}^{n} \end{pmatrix}$$

c) $Sp(\phi_n) = Sp(M_n)$ or M_n est triangulaire supérieure donc $Sp(M_n)$ est l'ensemble des éléments diagonaux de M_n.

Alors <u>$Sp(\phi_n) = Sp(M_n) = \{1\}$</u>. (en effet $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{(-1)^0}{k+1} C_{k+1}^{k} = 1$).

Soit P un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre 1.

$\exists r \in [\![0,n]\!]$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $a_r \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$

Un calcul analogue à celui de φ_2 a donné :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \phi_n(P)(x) = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{k=i}^{r} \left(\frac{a_\ell}{\ell+1} C_{\ell+1}^{i} (-1)^{\ell-i} \right) x^i$.

Alors $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $a_i = \sum_{\ell=i}^{r} \frac{a_\ell}{\ell+1} C_{\ell+1}^{i} (-1)^{\ell-i}$.

Supposons $r \geqslant 1$. Alors $a_{r-1} = \sum_{\ell=r-1}^{r} \frac{a_\ell}{\ell+1} C_{\ell+1}^{r-1} (-1)^{\ell-r+1} = \underbrace{\frac{a_{r-1}}{r} C_r^{r-1} (-1)^0}_{=a_{r-1}} + \frac{a_r}{r+1} C_{r+1}^{r-1} (-1)^1$

Ainsi $a_{r-1} = a_{r-1} - \frac{a_r}{r+1} C_{r+1}^{r-1}$; $\frac{a_r}{r+1} C_{r+1}^{r-1} = 0$; $a_r = 0$!!

Nécessairement $r = 0$. P est un polynôme de degré 0. P est constant et non nul.

Réciproquement supposons que P soit constant et non nul. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(P)(x) = \int_{x-1}^{x} \lambda \, dt = \lambda(x - (x-1)) = \lambda = P(x)$; $\phi_n(P) = P$ et $P \neq 0$ donc P est un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre 1.

<u>Les vecteurs propres de ϕ_n associé à la valeur propre 1 sont les éléments constants et non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

(Q3) a) Soit f un élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Notons F une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t) \, dt = F(x) - F(x-1)$.

F et $x \mapsto x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x \mapsto F(x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, par différence, $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\phi(f))'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1)$. <u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.</u>

f étant continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x-1$ également, $x \mapsto f(x) - f(x-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\phi(f)'$ est continue sur $\mathbb{R}$. <u>$\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.</u>

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$. $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.

f et $x \mapsto x-1$ sont de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(x) - f(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\phi(f)'$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^{\ell+1}(\mathbb{R})$. Alors $\forall j \in [\![0, \ell+1]\!]$, $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$.

Montrons que $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}^{\ell+2}(\mathbb{R})$ ce qui donnera $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$ pour tout $j \in [\![\ell+2, +\infty[\![$.

Notons ψ l'application de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui à f élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ associe sa primitive qui prend la valeur 0 en 0. ψ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Considérons $g_0 : x \mapsto |x|$. $g_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Posons alors $f_0 = \psi^\ell(g_0) = \underbrace{(\psi \circ \psi \circ \dots \circ \psi)}_{\ell \text{ fois}}(g_0)$
Il est aisé de voir que f_0 est ℓ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_0^{(\ell)} = g_0$.
g_0 étant continue sur $\mathbb{R}$, f_0 est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbb{R}$. Alors $\phi(f_0)$ est de classe $\mathcal{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f_0)'(x) = f_0(x) - f_0(x-1)$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\phi(f_0))^{(\ell+1)}(x) = (\phi(f_0)')^{(\ell)}(x) = f_0^{(\ell)}(x) - f_0^{(\ell)}(x-1) = g_0(x) - g_0(x-1)$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f_0)^{(\ell+1)}(x) = |x| - |x-1|$. Donc $\phi(f_0)^{(\ell+1)}$ n'est pas dérivable en 0 ;
$\phi(f_0)$ n'est pas $\ell+2$ fois dérivable ; $\phi(f_0) \notin \mathcal{C}^{\ell+2}(\mathbb{R})$.
Alors $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{C}^{\ell+2}(\mathbb{R})$.
Si $\ell \in \mathbb{N}$, $\phi(\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$ si et seulement si $j \in [\![0, \ell+1]\!]$.

---

b) Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$.

$f \in \operatorname{Ker}\phi \iff \phi(f) = 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \overset{\text{OK}}{\iff} \phi(f)(1) = 0$ et $(\phi(f))' = 0$

$f \in \operatorname{Ker}\phi \iff \int_0^1 f(t)\,dt = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x-1) = 0$.

$f \in \mathrm{Ker}\,\phi \iff \begin{cases} 1) & f \text{ est périodique de période } 1 \\ 2) & \int_0^1 f(t)dt = 0 \end{cases}$

Montrons que 1) et 2) $\iff$ 1) et $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f(t)dt = 0$.

$\Leftarrow$ est une évidence

$\Rightarrow$ Soit $a \in \mathbb{R}$. $\int_a^{a+1} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{a+1} f(t)dt = \int_1^{a+1} f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$. Alors :

$\int_a^{a+1} f(t)dt \underset{t=u-1}{=} \int_0^a f(u+1)du - \int_0^a f(t)dt \overset{1)}{=} \int_0^a f(u)du - \int_0^a f(t)dt = 0$.

Alors $f \in \mathrm{Ker}\,\phi \iff \begin{cases} 1) & f \text{ est périodique de période } 1 \\ 2) & \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f(t)dt = 0. \end{cases}$

<u>$\mathrm{Ker}\,\phi$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale nulle sur une période.</u>

<u>c)</u> Posons $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \sin(2\pi x)$. $f_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x+1) = f_1(x)$ et

$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+1} f_1(t)dt = \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_a^{a+1} = 0$. $f_1 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ et $f_1 \neq 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$.

Ainsi <u>ϕ n'est pas injectif.</u>

$\phi(\mathcal{C}^0(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Alors <u>ϕ n'est pas surjectif.</u>

Q4 <u>a)</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que : $f \neq 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$ et $\phi(f) = \lambda f$.

Montrons par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$, f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

→ c'est clair pour $k=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$f = \frac{1}{\lambda}\phi(f)$. $\phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda}(f(x) - f(x-1))$.

f et $x \mapsto x-1$ sont k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \frac{1}{\lambda}(f(x)-f(x-1))$ est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f' est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi f est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
ceci achève la récurrence.
Pour tout k dans $\mathbb{N}$, f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b). Soit P une fonction polynôme. Supposons que P est une fonction propre de ϕ.
$P \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(P)=\lambda P$.
Soit r le degré de P. $P \in \mathbb{R}_r[X]$ et $\phi_r(P) = \phi(P) = \lambda P$.
Alors d'après Q2 : $\lambda = 1$ et P est constante et non nulle sur $\mathbb{R}$.

- Réciproquement soit P une fonction constante et non nulle sur $\mathbb{R}$.
$P \in C^0(\mathbb{R})$, $P \neq 0_{C^0(\mathbb{R})}$, $\phi(P) = \phi_0(P) = 1.P = P$; P est une fonction polynôme et P est une fonction propre de ϕ.

Les fonctions-polynômes qui sont fonctions propres de ϕ sont les fonctions constantes et non nulles sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$.

$$\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-1}^{x} e^{at}\,dt = \lambda e^{ax}$$

1er cas.. $a \neq 0$. $\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{a}[e^{ax} - e^{a(x-1)}] = \lambda e^{ax}$

$$\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ax}\left[\frac{1-e^{-a}}{a} - \lambda\right] = 0$$

$$\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \frac{1-e^{-a}}{a} = \lambda$$

Posons alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a) = \begin{cases} \frac{1-e^{-a}}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$.

$\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \varphi(a)=\lambda$.

2° Cas : $a=0$. $\varphi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, \int_{x-1}^{x} 1\,dt=\lambda \Leftrightarrow 1=\lambda \Leftrightarrow \varphi(0)=\lambda \Leftrightarrow \varphi(a)=\lambda$.

Ainsi si $\lambda\in\mathbb{R}^*_+$, si $a\in\mathbb{R}$ et si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{ax}$: $\phi(f)=\lambda f \Leftrightarrow \varphi(a)=\lambda$.

Etudions φ. φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\frac{1-e^{-a}}{a} \underset{0}{\sim} \frac{-(-a)}{a}=1$; $\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-a}}{a}=1=\varphi(0)$; φ est continue en 0.

$\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a}=\frac{1}{a^2}[1-e^{-a}-a]$ pour a dans $\mathbb{R}^*$ et $1-e^{-a}-a=1-(1+(-a)+\frac{(-a)^2}{2})-a+o(a^2)$

donc $1-e^{-a}-a=-\frac{a^2}{2}+o(a^2)$ au voisinage de 0.

Alors $\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a}\underset{0}{\sim}\frac{1}{a^2}\left[-\frac{a^2}{2}\right]=\frac{-1}{2}$; $\lim_{a\to 0}\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a}=\frac{-1}{2}$; φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=\frac{-1}{2}$.

$\forall a\in\mathbb{R}^*$, $\varphi'(a)=\frac{1}{a^2}\left[e^{-a}(a)-(1-e^{-a})\right]=\frac{1}{a^2}\left[(a+1)e^{-a}-1\right]$

Posons $\forall a\in\mathbb{R}$, $\psi(a)=(a+1)e^{-a}-1$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall a\in\mathbb{R}$, $\psi'(a)=e^{-a}-(a+1)e^{-a}=-ae^{-a}$. $\forall a\in\mathbb{R}^*_-$, $\psi'(a)>0$, $\psi'(0)=0$ et

$\forall a\in\mathbb{R}^*_+$, $\psi'(a)<0$. ψ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, strictement

croissante sur $]-\infty,0]$ et $\psi(0)=0$. Alors $\forall a\in\mathbb{R}^*$, $\psi(a)<0$.

Ainsi $\forall a\in\mathbb{R}^*$, $\varphi'(a)<0$. Or $\varphi'(0)=\frac{-1}{2}$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $\varphi'(a)<0$.

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{a\to+\infty}\varphi(a)=0$ et $\lim_{a\to-\infty}\varphi(a)=+\infty$

Alors φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

Donc si $\lambda\in\mathbb{R}^*_+$, $\exists!\, a\in\mathbb{R}$, $\varphi(a)=\lambda$.

Ainsi si $\lambda\in\mathbb{R}^*_+$ il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x)=e^{ax}$ $(a\in\mathbb{R})$ telle que $\phi(f)=\lambda f$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $a = \varphi^{-1}(\lambda)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = e^{ax}$.

$h_a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $h_a \neq 0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$ et $\phi(h_a) = \lambda h_a$; ainsi λ est une valeur propre de ϕ.

Tout réel strictement positif est valeur propre de ϕ.

d) Soit λ un élément de $]1, +\infty[$ et f une fonction bornée de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $\phi(f) = \lambda f$.

Posons $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ (f est bornée sur $\mathbb{R}$).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\lambda f(x)| = |\phi(f)(x)| = \left|\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t)|\,dt \leq \int_{x-1}^{x} M\,dt = M$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda |f(x)| = |\lambda f(x)| \leq M$.

Alors $\lambda \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq M$; $\lambda M \leq M$; $0 \leq M(1-\lambda) \underset{\substack{M \geq 0 \quad 1-\lambda < 0}}{\leq} 0$; $M(1-\lambda) = 0$ et $(1-\lambda) \neq 0$.

Alors $M = 0$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 0$. f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Si λ est un réel strictement supérieur à 1, la seule fonction bornée appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

PARTIE II Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

Q1 a) Notons que $\forall x \in [0,1]$, $1-x \in [0,1]$ et $f_0(1-x) = -f_0(x)$.

Soit $x \in [0,1]$.

1er cas.. $x \in]0,1[$. Alors $1-x \in]0,1[$ et $f_0(1-x) = (1-x-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{(1-x)(1-x-1)}}$

$f_0(1-x) = -(x-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{x(x-1)}} = -f_0(x)$.

2e cas.. $x=0$. $1-x = 1 \in [0,1]$ et $f_0(1-x) = f_0(1) = 0 = -0 = -f_0(0) = -f_0(x)$

3e cas.. $x=1$. $1-x = 0 \in [0,1]$ et $f_0(1-x) = f_0(0) = 0 = -0 = -f_0(1) = -f_0(x)$.

$\forall x \in [0,1]$, $1-x \in [0,1]$ et $f_0(2(\frac{1}{2})-x) = f_0(1-x) = -f_0(x) = 2\times 0 - f_0(x)$.

<u>La courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point V de coordonnées $(1/2, 0)$.</u>

b). <u>f_0 est de classe C^1</u> sur $]0,1[$ comme produit de fonctions de classe C^1 sur $]0,1[$.

- $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}(x-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\frac{1}{x(x-1)} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}(x-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{x(x-1)}} = 0 = f_0(0)$.

  f_0 est continue en 0.

  $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}(x-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\frac{1}{x(x-1)} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}(x-\frac{1}{2})^{\frac{1}{x(x-1)}} = 0 = f_0(1)$.

  f_0 est continue en 1. Finalement <u>f_0 est continue sur $[0,1]$.</u>

- $\forall x \in]0,1[$, $f_0'(x) = e^{\frac{1}{x(x-1)}}\left[1 + (x-\frac{1}{2})\left(-\frac{2x-1}{(x(x-1))^2}\right)\right]$

$\forall x \in]0,1[$, $f_0'(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^2}\left((x(x-1))^2 - 2(x-\frac{1}{2})^2\right)$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\frac{1}{x(x-1)} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\mapsto -\infty}(X^2e^X) = 0$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x(x-1)}}}{(x(x-1))^2} = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left((x(x-1))^2 - 2(x-\frac{1}{2})^2\right) = -\frac{1}{2}$: <u>$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f_0'(x) = 0$.</u>

On montre de même que <u>$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f_0'(x) = 0$</u>.

f_0 est continue sur $[0,1]$, de classe C^1 sur $]0,1[$ et $f'_{0|]0,1[}$ admet une limite finie en 0 et 1 donc le théorème de la limite de la dérivée montre que <u>f_0 est de classe C^1 sur $[0,1]$.</u> Notons que <u>$f_0'(0) = f_0'(1) = 0$</u>.

Voir p le fait que $\int_0^1 f_0(t)\,dt = 0$.

Q2 a) Notons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$.

→ C'est vrai pour $n=0$ d'après Q1 b)

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

f_n est en particulier continue sur $[0,1]$; $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$ également. Ainsi $x \mapsto \int_0^x f_n(t)e^{-t}dt$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ car c'est la primitive de $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$ sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0.

$x \mapsto e^x$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, $x \mapsto f_n(1)e^x$ et $x \mapsto e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t}dt$ le sont également.

Alors f_{n+1} est de classe C^1 sur $[0,1]$ comme différence de deux fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. La récurrence s'achève.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = f_n(1)e^x - e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t}dt$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $f'_{n+1}(x) = f_n(1)e^x - e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t}dt - e^x f_n(x)e^{-x} = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1} = f_{n+1} - f_n$.</u>

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 f'_{n+1}(t)dt = \int_0^1 (f_{n+1} - f_n)(t)\,dt$.</u>

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(0) = f_n(1)e^0 - e^0 \int_0^0 f_n(t)e^{-t}dt = f_n(1)$. <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(0) = f_n(1)$.</u>

Notons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = \int_0^1 f_n(t)dt$

→ $f_0(1) = 0 = \int_0^1 f_0(t)dt$; la propriété est vraie pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))\,dt \underset{HR}{=} \int_0^1 f_{n+1}(t)dt - f_n(1) \underset{f_n(1) = f_{n+1}(0)}{=} \int_0^1 f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(0).$$

$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(0)$; $f_{n+1}(1) = \int_0^1 f_{n+1}(t)dt$ et la récurrence s'achève.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in[0,1]$.

$$f_{n+1}(x)=\left(f_{n+1}(x)-f_{n+1}(0)\right)+f_{n+1}(0)\overset{f_{n+1}(0)=f_n(1)}{=}\int_0^x f'_{n+1}(t)\,dt+f_n(1)\overset{f_n(1)=\int_0^1 f_n(t)dt \text{ et } f'_{n+1}=h_{n+1}-h_n}{=}\int_0^x (h_{n+1}-h_n)(t)\,dt+\int_0^1 h_n(t)\,dt$$

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x h_{n+1}(t)\,dt-\int_0^x h_n(t)\,dt+\int_0^1 h_n(t)\,dt=\int_0^x h_{n+1}(t)\,dt+\int_x^1 h_n(t)\,dt.$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ f_{n+1}(x)=\int_0^x h_{n+1}(t)\,dt+\int_x^1 h_n(t)\,dt.$

d) Soit $n\in\mathbb{N}$. $f(n+1)=f_{n+1}(n+1-(n+1))=f_{n+1}(0)=f_n(1)=f_n(n+1-n)$.

Ainsi $\forall x\in[n,n+1[,\ f(x)=f_n(x-n)$ et $f(n+1)=f_n(n+1-n)$.

Alors $\forall x\in[n,n+1],\ f(x)=f_n(x-n)$.

- f_n est continue sur $[0,1]$
- $x\mapsto x-n$ est continue sur $[n,n+1]$
- $\forall x\in[n,n+1],\ x-n\in[0,1]$

Alors, par composition f est continue sur $[n,n+1]$ donc
→ f est continue en tout point de $[n,n+1[$
→ f est continue à droite en n
→ f est continue à gauche en $n+1$

ceci étant vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$ on peut dire que f est continue sur $[0,+\infty[$ car une fonction continue à droite et à gauche en un point est continue en ce point.

Soit $x\in[1,+\infty[$. Posons $n=E(x-1)$. $n\leq x-1<n+1 \Rightarrow n+1\leq x<n+2$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_{x-1}^x f(t)\,dt=\int_{x-1}^{n+1} f(t)\,dt+\int_{n+1}^{x} f(t)\,dt=\underbrace{\int_{x-1}^{n+1} f_n(t-n)\,dt}_{(1)}+\underbrace{\int_{n+1}^{x} f_{n+1}(t-n-1)\,dt}_{(2)}.$$

$$\int_{x-1}^x f(t)\,dt\underset{\substack{u=t-n \text{ dans }(1)\\ u=t-n-1 \text{ dans }(2)}}{=}\int_{x-n-1}^{1} h_n(u)\,du+\int_0^{x-n-1} h_{n+1}(u)\,du\underset{c)}{=}f_{n+1}(x-(n+1))\underset{x\in[n+1,n+2[}{=}f(x).$$

Ainsi $\forall x\in[1,+\infty[,\ f(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt.$

Q3 Montrons que f est continue sur $[-1,+\infty[$. f est déjà continue sur $[0,$
il suffit de prouver que f est continue sur $[-1,0]$.

Justifions d'abord la définition de f sur $[-1,0[$.

f est continue sur $[0,+\infty[$. Soit F une primitive de f sur $[0,+\infty[$. F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. $\forall x\in[1,+\infty[$, $f(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = F(x)-F(x-1)$.

- F est C^1 sur $[0,+\infty[$
- $\forall x\in[1,+\infty[$, $x-1\in[0,+\infty[$
- $x\mapsto x-1$ est C^1 sur $[1,+\infty[$

Alors f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. En particulier f est dérivable en tout point de $]1,+\infty[$ et dérivable à droite en 1.

$\forall x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=f(x)-f(x-1)$ et $f'_d(1)=f(1)-f(0)=0$.

$\forall x\in[0,1]$, $f(x)=f_0(x)$ $\qquad \forall x\in[0,1]$, $f(x)=f_0(x)$

donc f est C^1 sur $[0,1]$; en particulier f est dérivable en tout point de $]0,1[$, dérivable à droite en 0, à gauche en 1, $f'_d(0)=f'_0(0)=0$ et $f'_g(1)=f'_0(1)=0$.

$f'_d(1)=f'_g(1)=0$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$.
Finalement f est dérivable sur $[0,+\infty[$; mieux f est C^1 sur $[0,+\infty[$ (car $\forall x\in[0,1]$, $f'(x)=f'_0(x)$ et $\forall x\in[1,+\infty[$, $f'(x)=f(x)-f(x-1)$

Notons que $\forall x\in[1,+\infty[$, $f(x-1)=f(x)-f'(x)$

donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)=f(x+1)-f'(x+1)$. Ainsi

1/ Il est naturel de poser $\forall x\in[-1,0[$, $f(x)=f(x+1)-f'(x+1)$

2/ ceci a un sens... ou presque car f' existe sur $]0,+\infty[$ et $f'_d(0)$ existe.

- $x\mapsto x+1$ est continue sur $[-1,0[$
- $\forall x\in[-1,0[$, $x+1\in[0,1[\subset[0,+\infty[$
- f et f' sont continues sur $[0,+\infty[$

Alors $x\mapsto f(x+1)-f'(x+1)$ est continue sur $[-1,0[$.
f est continue sur $[-1,0[$ et sur $[0,+\infty[$.

Ne reste plus qu'à prouver que f est continue à gauche en 0.

soit à montrer que $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(0)$. $\qquad f'(1)=0$

f est C^1 sur $[0,+\infty[$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(1) - f'(1) \overset{\downarrow}{=} f(1)$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = f(1) = f_0(1) = 0 = f_0(0) = f(0)$.

Ceci achève de montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.

PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$.

Q1 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. f est continue sur $[n,n+1]$. Comme $[n,n+1]$ est un segment f_n possède un maximum M_n sur $[n,n+1]$ et $\exists\, x_n\in[n,n+1],\ f(x_n)=M_n$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

→ Supposons que $x_n\in\,]n,n+1[$.

$\forall x\in\,]n,x_n[,\ \dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\geqslant 0$; $\lim\limits_{x\mapsto x_n^-}\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\geqslant 0$; $f_g'(x_n)\geqslant 0$; $f'(x_n)\geqslant 0$.

$\forall x\in\,]x_n,n+1[,\ \dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\leqslant 0$; $\lim\limits_{x\mapsto x_n^+}\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\leqslant 0$; $f_d'(x_n)\leqslant 0$; $f'(x_n)\leqslant 0$.

Finalement $f'(x_n)=0$.

$\phi(f)=f$; $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$. De plus f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(x)-f(x-1)$.

Alors $0=f'(x_n)=f(x_n)-f(x_n-1)$. Ainsi $f(x_n-1)=f(x_n)$.

→ Supposons que $x_n=n+1$. $\forall t\in[n,n+1],\ f(t)\leqslant f(n+1)$.

$\forall t\in[n,n+1],\ f(t)-f(n+1)\leqslant 0$ $\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = f(x)$

Ainsi $0\geqslant \int_n^{n+1}(f(t)-f(n+1))\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n+1) \overset{\downarrow}{=} f(n+1)-f(n+1)=0$.

donc $\int_n^{n+1} (f(t)-f(n+1))\,dt = 0$. Comme $t \mapsto f(t)-f(n+1)$ est continue et négative

sur $[n,n+1]$: $\forall t \in [n,n+1]$, $f(t) - f(n+1)=0$. $\forall t \in [n,n+1]$, $f(t)=f(n+1)$.

Si $x_n = n+1$: f est constante sur $[n,n+1]$

En particulier $f(n)=f(n+1)$ donc on a encore $f(x_n-1)=f(x_n)$.

Montrons que dans tous les cas $M_{n-1} \geq M_n$.

1er cas.. $x_n = n$. Alors $M_n = f(x_n) = f(n) \leq \max\limits_{t\in[n-1,n]} f(t) = M_{n-1}$; $M_n \leq M_{n-1}$.

2ème cas.. $x_n > n$. Nous avons alors vu que $f(x_n) = f(x_n-1)$

Notons que $x_n - 1 \in [n-1,n]$. Donc $M_n = f(x_n) = f(x_n-1) \leq \max\limits_{t\in[n-1,n]} f(t) = M_{n-1}$; $M_n \leq M_{n-1}$

Dans les deux cas : $M_n \leq M_{n-1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur le segment $[n,n+1]$ donc f possède sur $[n,n+1]$ un minimum m_n et $\exists y_n \in [n,n+1]$, $f(y_n)=m_n$.

Supposons $n \in \mathbb{N}^*$.

1er cas.. $y_n = n$. Alors $m_n = f(y_n) = f(n) \geq \min\limits_{t\in[n-1,n]} f(t) = m_{n-1}$; $m_n \geq m_{n-1}$

2ième cas.. $y_n \in]n,n+1[$. Une démonstration identique à celle faite dans b) donne $f'(y_n)=0$.

Alors $0 = f'(y_n) = f(y_n) - f(y_n - 1)$;

$m_n = f(y_n) = f(y_n-1) \underset{\substack{\uparrow \\ y_n-1\in[n-1,n]}}{\geq} \min\limits_{t\in[n-1,n]} f(t) = m_{n-1}$; $m_n \geq m_{n-1}$.

3ième cas.. $y_n = n+1$. $\forall t \in [n,n+1]$, $f(t) - f(n+1) \geq 0$.

$0 \leq \int_n^{n+1} (f(t)-f(n+1))\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n+1) = 0$

Alors $\int_n^{n+1}(f(t)-f(n+1))dt=0$. Comme $t\mapsto f(t)-f(n+1)$ est continue et positive sur $[n,n+1]$,

$\forall t\in[n,n+1]$, $f(t)-f(n+1)=0$. $\forall t\in[n,n+1]$, $f(t)=f(n+1)$.

En particulier $m_n=f(n+1)=f(n)\geqslant \underset{t\in[n-1,n]}{\min} f(t)=m_{n-1}$; $m_n\geqslant m_{n-1}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m_n\geqslant m_{n-1}$.

$(M_n)_{n\geqslant0}$ est décroissante et $(m_n)_{n\geqslant0}$ est croissante.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $m_n\leqslant M_n\leqslant M_0$; $(m_n)_{n\geqslant0}$ est majorée... et croissante donc convergente.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $m_0\leqslant m_n\leqslant M_n$; $(M_n)_{n\geqslant0}$ est minorée... et décroissante donc convergente.

Les suites $(M_n)_{n\geqslant0}$ et $(m_n)_{n\geqslant0}$ convergent.

(Q2) a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_x^{x+1}f(t)dt=F(x+1)-F(x)$. $x\mapsto x+1$ et $x\mapsto F(x)$ étant C^1 sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\int_x^{x+1}f(t)dt$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x\mapsto f(x+1)-f(x)$.

On montre de même que $x\mapsto\int_x^{x+1}t f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x\mapsto(x+1)f(x+1)-x f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\int_x^{x+1}t f(t)dt-x\int_x^{x+1}f(t)dt$. Ce qui précède permet alors d'affirmer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=(x+1)f(x+1)-x f(x)-\int_x^{x+1}f(t)dt-x(f(x+1)-f(x))$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=f(x+1)-\int_x^{x+1}f(t)dt=0$ car $f\in E_1(\phi)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$. g est alors constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(0)=L/2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [n,+\infty[$.

Soit $y \in [n,+\infty[$. Montrons que $f(y) \leq M_n$.

Posons $y = E(r)$. $r \in \mathbb{N}$ et $r \leq y \leq r+1$. Alors $f(y) \leq M_r = \max_{t\in[r,r+1]} f(t)$.

$y \geq n$ donc $r = E(y) \geq n$; $M_r \leq M_n$; $f(y) \leq M_n$.

$\uparrow$ $(M_i)_{i\geq 0}$ est décroissante.

$\forall y \in [n,+\infty[$, $f(y) \leq M_n$.

$x \geq n$ donc $\forall t \in [x,x+1]$, $f(t) \leq M_n$.

$\forall t \in [x,x+1]$, $0 \leq f(t)-M_n$ et $0 \leq (t-x)$; $\forall t \in [x,x+1]$, $0 \leq (t-x)(M_n - f(t))$.

Alors $0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))\,dt$.

$\forall t \in [x,x+1]$, $0 \leq t-x \leq 1$ et $0 \leq M_n - f(t)$.

$\forall t \in [x,x+1]$, $(t-x)(M_n - f(t)) \leq M_n - f(t)$. $\int_x^{x+1} (t-x)(M_n-f(t))\,dt \leq \int_x^{x+1} (M_n - f(t))\,dt$

Or $\int_x^{x+1} (M_n - f(t))\,dt = M_n - \int_x^{x+1} f(t)\,dt = M_n - f(x+1)$; donc $\int_x^{x+1} (t-x)(M_n-f(t))\,dt \leq M_n - f(x+1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n,+\infty[$, $0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))\,dt \leq M_n - f(x+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit x_{n+1} un élément de $[n+1,n+2]$ tel que $f(x_{n+1}) = M_{n+1}$.

Posons $x = x_{n+1} - 1$; $x \in [n,n+1]$; $x \in [n,+\infty[$!

Alors $0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))\,dt \leq M_n - f(x+1) = M_n - f(x_{n+1}) = M_n - M_{n+1}$.

$$\int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))\,dt = M_n \int_x^{x+1} (t-x)\,dt - g(x) = M_n \left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_x^{x+1} - \frac{L}{2} = M_n \times \frac{1}{2} - \frac{L}{2} = \frac{M_n - L}{2}$$

Alors $0 \leq \dfrac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $x\in[n,+\infty[$.

Soit $y\in[n,+\infty[$. Posons $r=E(y)$. $r\geq n$ et $r\leq y<r+1$.

Alors $f(y)\geq m_r\geq m_n$. Ainsi $\forall y\in[n,+\infty[$, $f(y)-m_n\geq 0$.

$\forall t\in[x,x+1]$, $0\leq f(t)-m_n$ et $t-x\geq 0$ (car $x\geq n$).

$\forall t\in[x,x+1]$, $0\leq (t-x)(f(t)-m_n)$

En intégrant il vient : $0\leq\int_x^{x+1}(t-x)(f(t)-m_n)\,dt = g(x)-m_n\int_x^{x+1}(t-x)\,dt$

$$0\leq\int_x^{x+1}(t-x)(f(t)-m_n)\,dt=\frac{L}{2}-m_n\left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_x^{x+1}=\frac{L}{2}-\frac{m_n}{2}=\frac{L-m_n}{2}.$$

$\forall t\in[x,x+1]$, $0\leq t-x\leq 1$ et $f(t)-m_n\geq 0$.

$\forall t\in[x,x+1]$, $(t-x)(f(t)-m_n)\leq f(t)-m_n$. En intégrant ($x\leq x+1$) il vient :

$$\int_x^{x+1}(t-x)(f(t)-m_n)\,dt\leq\int_x^{x+1}(f(t)-m_n)\,dt=\int_x^{x+1}f(t)\,dt-m_n=f(x+1)-m_n$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[n,+\infty[,\ 0\leq\int_x^{x+1}(t-x)(f(t)-m_n)\,dt=\frac{L-m_n}{2}\leq f(x+1)-m_n.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\exists\hat{x}_{n+1}\in[n+1,n+2]$, $f(\hat{x}_{n+1})=m_{n+1}$. Posons $x=\hat{x}_{n+1}-1$.

Alors $x\in[n,+\infty[$ donc $0\leq\frac{L-m_n}{2}\leq f(x+1)-m_n=f(\hat{x}_{n+1})-m_n=m_{n+1}-m_n$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq\frac{L-m_n}{2}\leq m_{n+1}-m_n.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(M_{n+1}-M_n)=0=\lim\limits_{n\to+\infty}(m_{n+1}-m_n)$ car les suites $(M_n)_{n\geq 0}$ et $(m_n)_{n\geq 0}$ convergent

Alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{L-M_n}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{L-m_n}{2}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n=\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=L$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n,n+1]$, $m_n\leq f(x)\leq M_n$ donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $m_{E(x)}\leq f(x)\leq M_{E(x)}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}E(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}m_{E(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}M_{E(x)}=L$.

Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$.

PARTIE IV

(Q1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $u_0(x) = \int_{x-1}^{x} (f(t))^2 dt - 2f(x)\int_{x-1}^{x} f(t)dt + (f(x))^2\int_{x-1}^{x} dt$.

Comme $f \in E_1(\phi)$: $u_0(x) = \phi(f^2)(x) - 2f(x)f(x) + (f(x))^2 \times 1 = (\phi(f^2) - f^2)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = (\phi(f^2) - f^2)(x)$. $\underline{\underline{u_0 = \phi(f^2) - f^2}}$.

b) $f \in E_1(\phi)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$; f^2 également (I Q4 a...)

f^2 étant continue sur $\mathbb{R}$, $\phi(f^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f^2)'(x) = f^2(x) - f^2(x-1)$

Ainsi u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = \phi(f^2)(x) - (f(x))^2 \overset{f \in E_1(\phi)}{=} \phi(f^2)(x) - (\phi(f)(x))^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0'(x) = f^2(x) - f^2(x-1) - 2(f(x) - f(x-1))\,\phi(f)(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0'(x) = f^2(x) - f^2(x-1) - 2(f(x) - f(x-1))\,f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u_0'(x) = (f(x) - f(x-1))(f(x) + f(x-1) - 2f(x)) = -(f(x) - f(x-1))^2 \leq 0$.

$\underline{\underline{u_0 \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}}$

(Q2) a) Montrons par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

- C'est clair pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

  $u_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $u_{n+1} = \phi(u_n)$ existe et appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

  Comme $u_{n+1} = \phi(u_n)$ et comme u_n est décroissante sur $\mathbb{R}$, d'après I Q1 c) u_{n+1} est décroissante sur $\mathbb{R}$. Ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est définie, continue et décroissante sur } \mathbb{R}.}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in [x-1, x]$, $u_n(t) \geqslant u_n(x)$; $\int_{x-1}^{x} u_n(t)\,dt \geqslant \int_{x-1}^{x} u_n(x)\,dt = u_n(x)$.

Alors $u_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} u_n(t)\,dt \geqslant u_n(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(u_n(x))_{n \geqslant 0}$ est croissante.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \varphi(u_{n-1})$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varphi^n(u_0)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varphi^n(\varphi(f^2) - f^2) = \varphi^{n+1}(f^2) - \varphi^n(f^2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (\varphi^{k+1}(f^2) - \varphi^k(f^2)) = \varphi^{n+1}(f^2) - \varphi^0(f^2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \varphi^{n+1}(f^2) - f^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \geqslant u_0(x) \geqslant 0$ $((u_n(x))_{n \geqslant 0}$ est croissante pour tout x dans $\mathbb{R}$).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \geqslant 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)(x) \geqslant 0$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^n(f^2)(x) \leqslant M^2$.

- $\varphi^0(f^2) = f^2$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^0(f^2)(x) = f^2(x) \leqslant M^2$ car $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{n+1}(f)(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi^n(f)(t)\,dt \underset{x-1 \leqslant x}{\leqslant} \int_{x-1}^{x} M^2\,dt = M^2$. Ainsi s'achève la récurrence.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^n(f^2)(x) \leqslant M^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)(x) = \varphi^{n+1}(f^2)(x) - f^2(x) \leqslant \varphi^{n+1}(f^2)(x) \leqslant M^2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leqslant M^2$.

d] Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n(x)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par π^2. Elle est par conséquent convergente et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(u_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et converge vers 0 donc

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n(x) \leq 0$. Or nous avons vu que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n(x) \geq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = 0$. En particulier $u_0(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ u_0(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \displaystyle\int_{x-1}^{x} (f(t) - f(x))^2 \, dt = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto (f(t) - f(x))^2$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $x \neq x-1$ et $\displaystyle\int_{x-1}^{x} (f(t) - f(x))^2 \, dt = 0$.

Alors $\forall t \in [x-1, x], \ (f(t) - f(x))^2 = 0$. $\forall t \in [x-1, x], \ f(t) = f(x)$.

ceci signifie que f est constante sur $[x-1, x]$.

f est constante sur $[x-1, x]$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$. (*).

f est constante sur $\mathbb{R}$.

(*) Les mécréants pourront faire la démonstration suivante.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0,1], \ f(t) = \lambda$ (f est constante sur $[0,1]$).

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [n, n+1], f(t) = \lambda$ et $\forall t \in [-n-1, -n], \ f(t) = \lambda$. Alors tout est dit !

Tiens c'est déjà fini ! Dommage cela commençait à devenir intéressant.