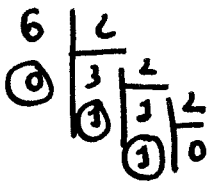
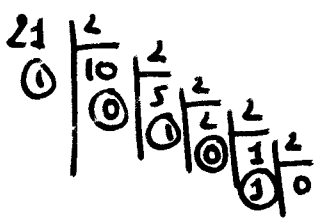


PARTIE I Introduction informatique

Q1 Rappelons que pour obtenir l'écriture binaire d'un entier n , de la droite vers la gauche il suffit de considérer la suite des q_k dans les divisions successives de n par 2 jusqu'à obtenir un quotient nul.



Alors $6 = \overline{110}^2$ donc bin(6) = (0, 0, 1, 1, 0).



$21 = \overline{10101}^2$ donc bin(21) = (1, 0, 1, 0, 1).

Q2 L'algorithme s'appuie sur le rappel propre dans la question 1.

```

Program essec03_M2;

type ecriture=array[1..5] of integer;
var n,k:integer;l:ecriture;

procedure bin(n:integer;var L:ecriture);
var i,q:integer;
begin
for i:=1 to 5 do l[i]:=0;
i:=6;q:=n;
repeat
i:=i-1;l[i]:= q mod 2;q:=q div 2;
until q=0;
end;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
bin(n,l);

for k:=1 to 5 do write(' ',l[k]);
end.
    
```

Q3 → bin(6) = (0, 0, 1, 1, 0).
 Alors L(1)=L(4)=L(5)=0 et L(3)=L(4)=1.
 $2L(3)+L(4)+1 = 1$ et $4L(3)+2L(4)+L(5)+1 = 7$
↑ famille ↑ salue
La carte n°6 est le roi de trèfle.
 → bin(1) = (0, 0, 0, 0, 1)
 Alors L(1)=L(4)=L(3)=L(4)=0 et L(5)=1.
 $2L(5)+L(4)+1 = 1$ et $4L(3)+L(4)+L(5)+1 = 2$
La carte n°3 est le huit de trèfle.
 → La carte n est la carte n° $\overline{0103}^4 + 1$
 de la famille n° $\overline{0203}^2 + 1$
 $n = \overline{4403020300}^2$. La dame de cœur est
 la carte n° $6 = 5 + 1 = \overline{102}^2 + 1$ de la
 famille n° $3 = 2 + 1 = \overline{10}^2 + 1$. Ainsi le
 numéro de cette carte est $\overline{10101}^4 = 21$!

PARTIE II Position du problème et recherche des fonctions solutions

- Q1
- $i_p(x) = \varphi(P(x)) = \varphi(1) = 0$ d'au (i).
 - Soit A un événement tel que $P(A) = P(\bar{A})$. Alors $P(A) = 1 - P(A)$ d'ac $P(A) = \frac{1}{2}$.
 $i_p(A) = \varphi(P(A)) = \varphi(\frac{1}{2}) = 1$. Ça adève de manière (ii)
 - Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A \cap B) \neq 0$.
 Noter que $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ d'ac $0 < P(A \cap B) \leq P(A)$ et $0 < P(A \cap B) \leq P(B)$
 Par conséquent $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
 $i_p(A \cap B) = \varphi(P(A \cap B)) = \varphi(P(A)P(B)) = \varphi(P(A)) + \varphi(P(B)) = i_p(A) + i_p(B)$ d'au (iii).
 - Soient A et B deux événements tels que $P(A) = P(B) \neq 0$.
 Alors $i_p(A) = \varphi(P(A)) = \varphi(P(B)) = i_p(B)$ d'au (iv).
- Alors i_p vérifie (i), (ii), (iii) et (iv).

Q2 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_{\alpha, \beta} \text{ vérifie (i) et (ii)} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ln 1 + \beta = 0 \\ \alpha \ln \frac{1}{2} + \beta = 1 \\ \forall (p, q) \in]0, 1]^2, \alpha \ln(pq) + \beta = \alpha \ln p + \beta + \alpha \ln q + \beta \end{cases}$$

$$\varphi_{\alpha, \beta} \text{ vérifie (i) et (ii)} \Leftrightarrow \beta = 0, \alpha = -\frac{1}{\ln 2}, \forall (p, q) \in]0, 1]^2, \alpha \ln p + \alpha \ln q + \beta = \alpha \ln p + \alpha \ln q + 2\beta$$

$$\varphi_{\alpha, \beta} \text{ vérifie (i) et (ii)} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\ln 2} \text{ et } \beta = 0.$$

Il existe un couple de réels (α, β) et un seul tel que $\varphi_{\alpha, \beta}$ vérifie (i) et (ii). ce couple est $(-\frac{1}{\ln 2}, 0)$

Q3) α doit p un élément de $]0, 1]$. considérer le changement de variable $q = \frac{t}{p}$.

$$\frac{1}{p} \int_{p/2}^p \varphi(t) dt = \frac{1}{p} \int_{1/2}^1 \varphi(pq) p dq = \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq = \int_{1/2}^1 (\varphi(p) + \varphi(q)) dq = (1 - \frac{1}{2}) \varphi(p) + \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq$$

$q = \frac{t}{p}; dt = p dq$

Ainsi $\forall p \in]0, 1]$, $\frac{1}{p} \int_{p/2}^p \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \varphi(p) + \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq$.

$$b) \forall p \in]0, 1[, \varphi(p) = \frac{2}{p} \int_{1/2}^p \varphi(t) dt - 2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq.$$

Soit ϕ une primitive de φ sur $]0, 1[$ (par continuité sur $]0, 1[$).

$$\forall p \in]0, 1[, \int_{1/2}^p \varphi(t) dt = \phi(p) - \phi(1/2). \quad \phi \text{ est dérivable sur }]0, 1[, \quad p \mapsto \frac{p}{2} \text{ est égal à}$$

à peut dire que $p \mapsto \int_{1/2}^p \varphi(t) dt$ est dérivable sur $]0, 1[$ car $\forall p \in]0, 1[, \frac{p}{2} \in]0, 1[$.

de plus $p \mapsto \frac{1}{p}$ est dérivable sur $]0, 1[$. Alors $p \mapsto \frac{2}{p} \int_{1/2}^p \varphi(t) dt$ est dérivable sur $]0, 1[$.

$p \mapsto -2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq$ est également dérivable sur $]0, 1[$ comme fonction constante.

Alors, par somme, φ est dérivable sur $]0, 1[$.

Notons que la dérivée de $p \mapsto \int_{1/2}^p \varphi(t) dt$ est $\varphi \rightarrow \phi'(p) - \frac{1}{2} \phi'(1/2)$ et que :

$$\forall p \in]0, 1[, \varphi'(p) = \varphi(p) - \frac{1}{2} \varphi(1/2) = \varphi(p) - \frac{1}{2} (\varphi(p) + \varphi(1/2)) = \frac{1}{2} \varphi(p) - \frac{1}{2} \varphi(1/2) = \frac{1}{2} \varphi(p) - \frac{1}{2}.$$

$$\forall p \in]0, 1[, p\varphi(p) = p \left[\frac{2}{p} \int_{1/2}^p \varphi(t) dt - 2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq \right] = 2 \int_{1/2}^p \varphi(t) dt - 2p \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq$$

$$\text{En dérivant d'un côté : } \forall p \in]0, 1[, p\varphi(p) \rightarrow p\varphi'(p) = 2 \left(\frac{1}{2} \varphi(p) - \frac{1}{2} \right) - 2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq$$

$$\text{Ainsi } \forall p \in]0, 1[, p\varphi'(p) = -1 - 2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq.$$

$$\text{Alors } \forall p \in]0, 1[, \underline{\underline{-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} p\varphi'(p) + \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq.}}$$

$$c) \forall p \in]0, 1[, \varphi'(p) = -\frac{1}{p} - \frac{2}{p} \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq. \quad \text{Posons } \alpha = -\left(1 + 2 \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq\right).$$

$$\text{Alors } \forall p \in]0, 1[, \varphi'(p) = \frac{\alpha}{p}. \quad \text{Donc } \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall p \in]0, 1[, \varphi(p) = \alpha \ln |p| + \beta.$$

$$\text{donc } \forall p \in]0, 1[, \varphi(p) = \alpha \ln p + \beta. \quad \varphi = \varphi_{\alpha, \beta}.$$

$$\text{Ainsi } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi = \varphi_{\alpha, \beta}. \quad \text{Plusieurs } \varphi = \varphi_{-\frac{1}{2}, 0} \text{ (d'après Q2)}$$

Q4) Q2 et Q3 montre qu'il existe une application continue de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} et une seule qui vérifie (1) et (2). Cette application est $\varphi_{-\frac{1}{2}, 0}$.

$$\textcircled{Q1} \quad \underline{\underline{P(A) = \frac{1}{32}}}. \quad \underline{\underline{i(A) = \varphi(P(A)) = -\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{32} = -\frac{1}{\ln 2} \ln 2^{-5} = 5}}. \quad \underline{\underline{i(A) = 5}}.$$

$$\textcircled{Q2} \quad \underline{\underline{\text{card } E = 2^n}}. \quad \underline{\underline{P(A) = \frac{1}{2^n}}}. \quad \underline{\underline{i(A) = -\frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{1}{2^n}\right) = n}}. \quad \underline{\underline{i(A) = n}}.$$

$$\textcircled{Q3} \quad A \subset B \text{ d'ac } P(A) \leq P(B). \quad \ln(P(A)) \leq \ln(P(B)). \quad -\frac{1}{\ln 2} \ln(P(A)) \geq -\frac{1}{\ln 2} \ln(P(B)).$$

$$\underline{\underline{\forall (A, B) \in \mathcal{E}, A \subset B \text{ et } P(A) \neq 0 \Rightarrow i(B) \leq i(A)}}.$$

$$\textcircled{Q4} \quad \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} \ln x\right) = +\infty}}. \quad \text{Rappel que } \forall A \in \mathcal{E}, P(A) \neq 0 \Rightarrow i(A) = \varphi(P(A)).$$

Ainsi plus la probabilité d'un événement est petite plus sa incertitude est grande.

PARTIE IV Incertitude d'une variable aléatoire discrète

$$\textcircled{Q1} \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, P(U_n = k) = \frac{1}{n}. \quad H(U_n) = \sum_{k=1}^n h\left(\frac{1}{n}\right) = n h\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(-\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{H(U_n) = \frac{\ln n}{\ln 2}}}.$$

$$\textcircled{Q2} \quad H(\gamma) = h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \left(-\frac{1}{4} \frac{\ln(1/4)}{\ln 2}\right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln(1/2)}{\ln 2}\right).$$

$$H(\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\ln 2^2}{\ln 2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \underline{\underline{H(\gamma) = \frac{3}{2}}}.$$

$$\underline{\underline{H(U_2) = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1}}; \quad \underline{\underline{H(U_3) = \frac{\ln 3}{\ln 2}}}$$
 et $H(\gamma) = \frac{3}{2}$.

$$\ln 9 > \ln 8 \text{ d'ac } \ln 3^2 > \ln 2^3; \quad 2 \ln 3 > 3 \ln 2; \quad \frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{3}{2}. \quad H(\gamma) < H(U_3).$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{H(U_2) < H(\gamma) < H(U_3)}}.$$

$$\textcircled{Q3} \quad x \mapsto -x \frac{\ln x}{\ln 2} \text{ et continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ d'ac } h \text{ et continue sur }]0, 1[.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x \frac{\ln x}{\ln 2}\right) = 0 = h(0) \text{ d'ac } h \text{ et continue (à droite) à } 0.$$

h est continue sur $[0, 1]$.

$h(0) = 0 \geq 0$ et $\forall x \in]0, 1[, h(x) = -x \frac{h(x)}{h(x)} \geq 0$. h est positive sur $[0, 1]$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \frac{h(x)}{h(x)} \right) = +\infty$. h n'est pas dérivable en 0.

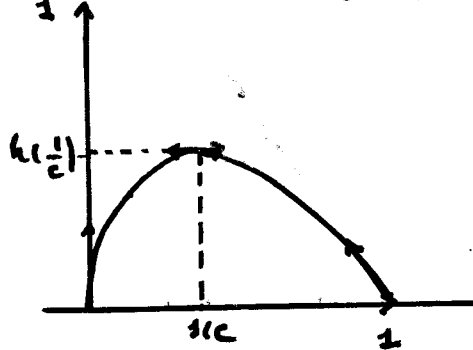
$\forall x \in]0, 1[, h'(x) = - \frac{1}{h(x)} (h(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = - \frac{1}{h(x)} (h(x) + 1) = \frac{1}{h(x)} (h(\frac{1}{e}) - h(x))$.

$\forall x \in]0, \frac{1}{e}[, h'(x) > 0$; $h'(\frac{1}{e}) = 0$; $\forall x \in]\frac{1}{e}, 1[, h'(x) < 0$.

Comme h est continue sur $[0, 1]$, ceci suffit pour dire que h est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{e}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$.

Notons que $h(1) = 0$ et que $h'(\frac{1}{e}) = - \frac{1}{h(\frac{1}{e})}$. $h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e h(\frac{1}{e})}$. $h'(\frac{1}{e}) = - \frac{1}{e h(\frac{1}{e})}$.

| | | | |
|---------|---|------------------------------|---|
| x | 0 | $\frac{1}{e}$ | 1 |
| $h'(x)$ | | + | - |
| $h(x)$ | 0 | $\frac{1}{e h(\frac{1}{e})}$ | 0 |



Q4) Supposons que $X(\omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec x_1, x_2, \dots, x_n deux à deux distincts. Posons $\forall k \in \{1, n\}, p_k = P(X = k)$.

$H(X) = \sum_{k=1}^n h(p_k) \geq 0$ (h est positive sur $[0, 1]$).

Notons que l'étude précédente permet de dire que $\forall x \in [0, 1], h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$ car $h(0) = h(1) = 0$, h est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{e}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$.

Supposons que $H(X) = 0$. Alors $\sum_{k=1}^n h(p_k) = 0$. h est positive sur $[0, 1]$:

$\forall k \in \{1, n\}, h(p_k) = 0$; $\forall k \in \{1, n\}, p_k \in \{0, 1\}$.

$\forall k \in \{1, n\}$, $P_k \in (0, 1)$ et $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$.

Alors il existe un élément k_0 de $\{1, n\}$ et un réel tel que $P_{k_0} = 1$.

Donc $P_{k_0} = 1$ et $\forall k \in \{1, n\}$, $k \neq k_0 \Rightarrow P_k = 0$.

Pour conclure $P(X = x_{k_0}) = 1$ et $\forall k \in \{1, n\} - \{k_0\}$, $P(X = x_k) = 0$.

X est donc une variable quasi-certaine et $H(X) = 0$.

Réciproquement supposons X quasi-certaine. Alors $\exists k_0 \in \{1, n\}$, $P(X = x_{k_0}) = 1$

et $\forall k \in \{1, n\} - \{k_0\}$, $P(X = x_k) = 0$.

Pour conclure $H(X) = \sum_{k=1}^n h_k(P(X = x_k)) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^n h_k(0) + h_{k_0}(1) = 0$; $H(X) = 0$.

Alors X est une variable quasi-certaine si et seulement si $H(X) = 0$

QS a) $\forall x \in [0, 1]$, $h_2(x) = h(1-x)$ ou $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $h_2(\frac{1}{2} + x) = h_2(\frac{1}{2} - x)$

ce qui signifie que la courbe représentative de h_2 admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie (courbe représentative dans un repère ortho normal...)

b) $x \mapsto 1-x$ est continue sur $[0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$ $1-x \in [0, 1]$ et h est continue sur $[0, 1]$ donc h_2 est continue sur $[0, 1]$.

$x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0, 1[$, $\forall x \in]0, 1[$, $1-x \in]0, 1[$ et h est dérivable sur $]0, 1[$

Ainsi h_2 est dérivable sur $]0, 1[$.

$$\forall x \in]0, 1[, h_2'(x) = h'(x) - h'(1-x) = -\frac{1}{h_2} [h(x+1)] + \frac{1}{h_2} [h(1-x) + 1]$$

$$\forall x \in]0, 1[, h_2'(x) = \frac{1}{h_2} [h(1-x) - h(x)].$$

h est continue sur $[0, 1]$, $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$, $h_2'(x) > 0$, $h_2'(\frac{1}{2}) = 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[$, $h_2'(x) < 0$.

Alors h_2 est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

$$h_2(0) = h_2(1) = 0. \quad h_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} \frac{h'(1/2)}{h_2}\right) = 1.$$

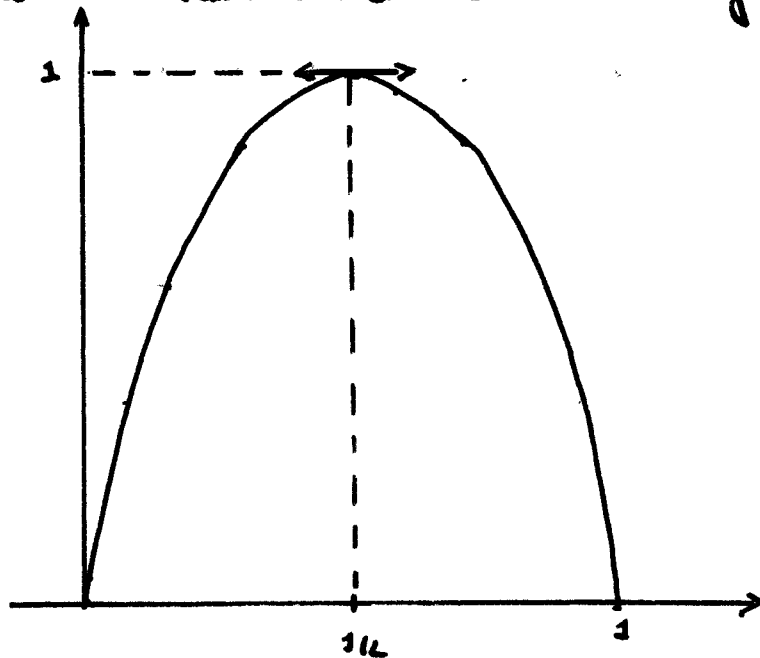
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_2(x) - h_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x)}{x - 0} - \frac{h(1-x) - h(1)}{(1-x) - 1} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 0}{x - 0} = +\infty \text{ et } h(0) = h(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(1-x) - h(1)}{(1-x) - 1} \right) = h'(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h_2(x) - h_2(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} - \frac{h(1-x) - h(0)}{(1-x) - 0} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(1-x) - h(0)}{(1-x) - 0} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{h(\beta) - h(0)}{\beta - 0} = +\infty.$$

h_2 n'est ni dérivable en 0 ni dérivable en 1 mais sa courbe représentative dans un repère cartésien a pour tangente en 0 et en 1 une demi-tangente verticale.



$$\square \quad H(x) = h(p(x=0)) + h(1(x=1)) = h(1-p) + h(p) = h_2(p) \leq 1.$$

Rappelons que h_2 est strictement concave sur $[0, \frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et $h_2(\frac{1}{2}) = 1$. Alors $\forall x \in (0, 1), h_2(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } H(x) = 1 \Leftrightarrow h_2(p) = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

$H(x) \leq 1$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

$$\textcircled{Q6} \quad P(Z=1) = P("X_1 + X_2 \text{ 'at' impair} ") = P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=1\}) \cup (\{X_1=1\} \cap \{X_2=0\})$$

Pour incompatibilité il vient : $P(Z=1) = P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=1\}) + P(\{X_1=1\} \cap \{X_2=0\})$

Pour indépendance a dit est : $P(Z=1) = P(X_1=0)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=0) = (1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2)$.

$$P(Z=1) = p_1 + p_2 - 2p_1p_2 \quad P(Z=0) = 1 - p_1 - p_2 + 2p_1p_2 \quad E(Z) = p_1 + p_2 - 2p_1p_2$$

$$1 - 2p = 1 - 2P(Z=1) = 1 - 2(p_1 + p_2 - 2p_1p_2) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2 = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$$

$$\text{Si } p = P(Z=1) : 1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$$

$\textcircled{Q7}$ Prouver la récurrence par récurrence sur n .

$\rightarrow n=1$. X suit une loi binomiale de paramètres 1 et p .

$$P(Z_1=1) = P("X \text{ 'at' impair} ") = P(X=1) = p \quad 1 - 2P(Z_1=1) = 1 - 2p = (1 - 2p)^1$$

La propriété est vraie pour $n=1$.

\rightarrow Supposons la propriété vraie pour n dans \mathbb{N}^* et montrons la pour $n+1$.

Soit X une variable aléatoire sur $(1, \mathcal{B}, p)$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n+1$ et p .

Soient X_1, X_2, \dots, X_n $n+1$ variables aléatoires de Bernoulli sur $(1, \mathcal{B}, p)$, indépendantes et de même paramètre p . $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a même loi que X . Posons $Y = X_1 + \dots + X_n$, $Y \in \mathcal{B}(n, p)$.

Posons $p' = P("Y \text{ 'at' impair} ")$. L'hypothèse de récurrence indique que $2p' - 1 = (2p - 1)^n$.

$$\text{Alors } P("X \text{ 'at' impair} ") = P("Y + X_{n+1} \text{ 'at' impair} ") = P(("Y \text{ 'at' impair} " \cap \{X_{n+1}=1\}) \cup ("Y \text{ 'at' impair} " \cap \{X_{n+1}=0\})) = P("Y \text{ 'at' impair} " \cap \{X_{n+1}=1\}) + P("Y \text{ 'at' impair} " \cap \{X_{n+1}=0\})$$

$X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes donc Y et X_{n+1} le sont également.

$$\text{Alors } P("X \text{ 'at' impair} ") = P("Y \text{ 'at' impair} ") P(X_{n+1}=1) + P("Y \text{ 'at' impair} ") P(X_{n+1}=0)$$

$$P("X \text{ 'at' impair} ") = (1 - p')p + p'(1 - p) \quad P(Z_{n+1}=1) = p + p' - 2pp'$$

$$\text{Alors } 1 - 2P(Z_{n+1}=1) = 1 - 2p - 2p' + 4pp' = (1 - 2p)(1 - 2p') = (1 - 2p)(1 - 2p)^n = (1 - 2p)^{n+1}$$

Ceci achève la récurrence.

$$\underline{\underline{" \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - 2P(Z_n=1) = (1 - 2p)^n "}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H(Z_n) \leq 1 \Leftrightarrow$ ou Z_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1-(1-p)^n}{2}$ et $\frac{1-(1-p)^n}{2} \in]0, 1[$.

Or par Q5 : $H(Z_n) = 1 \Leftrightarrow \frac{1-(1-p)^n}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-p)^n = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(Z_n) \leq 1$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

PARTIE IV Maximalité de l'entropie.

Q1) Posons $\forall k \in \{1, n-1\}$, $\forall (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, $u_k(p_1, \dots, p_{n-1}) = p_k$

Posons $\forall (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, $u_n(p_1, \dots, p_{n-1}) = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1}$

• Pour tout k dans $\{1, n-1\}$, u_k est de classe \mathcal{B}' sur \mathcal{O} et u_k est de classe \mathcal{B}' sur \mathcal{O} (fonctions polynomiales).

• u_n est de classe \mathcal{B}' sur $]0, 1[$.

• $\forall k \in \{1, n-1\}$, $\forall (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, $u_k(p_1, \dots, p_{n-1}) = p_k \in]0, 1[$

$\forall (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, $u_n(p_1, \dots, p_{n-1}) = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1} \in]0, 1[$

Alors par compacité, pour tout $k \in \{1, n-1\}$, u_k est de classe \mathcal{B}' sur \mathcal{O} et u_n est de classe \mathcal{B}' sur \mathcal{O} .

Alors $h_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n$ est de classe \mathcal{B}' sur \mathcal{O}

Soit $T = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ un élément de \mathcal{O}

$$\forall i \in \{1, n-1\}, \frac{\partial h_n}{\partial p_i}(T) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u_k}{\partial p_i}(T) \ell'(u_k(T)) + \frac{\partial u_n}{\partial p_i}(T) \ell'(u_n(T))$$

$$\forall i \in \{1, n-1\}, \frac{\partial h_n}{\partial p_i}(T) = \ell'(u_i(T)) - \ell'(u_n(T)) = \ell'(p_i) - \ell'(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1})$$

$$\text{Tout point critique de } h_n \Leftrightarrow \forall i \in \{1, n-1\}, \ell'(p_i) = \ell'(1 - p_1 - \dots - p_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \ell'(p_1) = \ell'(p_2) = \dots = \ell'(p_{n-1}) = \ell'(1 - p_1 - \dots - p_{n-1})$$

Rappelons que $\forall x \in]0, 1[$, $\ell'(x) = -\frac{1}{x \ln 2} (\ln x + 1)$.

Ainsi $\forall (x, y) \in]0, 1[$, $\ell'(x) = \ell'(y) \Leftrightarrow \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Ainsi } T \text{ point critique de } h_n \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} \\ \text{or} \\ p_1 = 1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} \\ p_1 = 1 - (n-1)p_1 \end{cases}$$

$$T \text{ point critique de } h_n \Leftrightarrow \forall k \in \{1, n-1\}, p_k = \frac{1}{n} \Leftrightarrow T = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Or on voit que si $\forall k \in \{1, n-1\}, p_k = \frac{1}{n}$ alors $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$

h_n admet un unique point critique sur \mathcal{O} : $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

Si h_n admet un admet un extremum en un point T de l'ouvert \mathcal{O} alors T est un point critique de h_n donc $T = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

Ainsi h_n admet au plus un extremum sur \mathcal{O} .

b) h est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} (h(x+1))$.

h est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$, $h''(x) = -\frac{1}{x^3} < 0$.

Ainsi - h est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et sa dérivée seconde est positive.

Alors - h est concave sur $]0, 1[$.

Soit $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in]0, 1[^n$ tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

$h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(p_k)$ car - h est concave sur $]0, 1[$.

Alors $h\left(\frac{1}{n} \times 1\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(p_k)$; $\sum_{k=1}^n h(p_k) \leq n h\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(-\frac{1}{n^2} \frac{h'(1/n)}{h''(1/n)}\right)$

$$\sum_{k=1}^n h(p_k) \leq -\frac{h'(1/n)}{h''(1/n)} = \frac{h''(1/n)}{h''(1/n)}.$$

$$\forall (p_1, p_2, \dots, p_n) \in]0, 1[^n, p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n h(p_k) \leq \frac{h''(1/n)}{h''(1/n)}.$$

c) Posons $\forall k \in \{1, n\}, p_k = P(X = x_k)$. $\forall k \in \{1, n\}, p_k \in [0, 1]$ et $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

* V1.. On suppose que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, p_k \neq 0$.

Alors $(p_1, \dots, p_n) \in]0, 1]^n$ et $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Ainsi $\sum_{k=1}^n h(p_k) \leq \frac{h(n)}{h_2}$.

Donc $H(X) \leq \frac{h(n)}{h_2}$.

* V2 Soit r le nombre d'éléments de $\{k \in \{1, \dots, n\} \mid p_k \neq 0\} = K$

$\sum_{k=1}^n h(p_k) = \sum_{k \in K} h(p_k)$. A $(p_k)_{k \in K}$ et une famille de d'éléments

de $]0, 1]$ de cardinal r et $\sum_{k \in K} p_k = 1$.

En appliquant V1 avec r à part due que $\sum_{k \in K} h(p_k) \leq \frac{h(r)}{h_2}$

Ainsi $\sum_{k=1}^n h(p_k) = \sum_{k \in K} h(p_k) \leq \frac{h(r)}{h_2} \leq \frac{h(n)}{h_2}$; $H(X) \leq \frac{h(n)}{h_2}$.

Finalement dans tous les cas $H(X) \leq \frac{h(n)}{h_2}$.

• Supposons que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$\forall k \in \{1, \dots, n\}, p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

$$H(X) = \sum_{k=1}^n h(p_k) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{p_k}{h_2} \log p_k \right) = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{n} \right) = n \frac{1}{n} \log n = \frac{h(n)}{h_2}.$$

Si X suit une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $H(X) = \frac{h(n)}{h_2}$.

• Réciproquement supposons que $H(X) = \frac{h(n)}{h_2}$.

Posons $K = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid p_k \neq 0\}$ et $r = \text{card} K$. $H(X) \leq \frac{h(r)}{h_2}$; $\frac{h(n)}{h_2} \leq \frac{h(r)}{h_2}$.

Alors $r \geq n$. Mais $K \subset \{1, \dots, n\}$ donc $r = \text{card} K \leq n$.

Ainsi $r = n$. $\forall k \in \{1, \dots, n\}, p_k \neq 0$.

Donc $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in]0, 1]^n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ et $\sum_{k=1}^n h(p_k) = \frac{h(n)}{h_2}$.

ceci permet d'affirmer la fonction $\psi : (q_1, \dots, q_n) \rightarrow \sum_{k=1}^n h(q_k)$ admet

un maximum sur $\hat{\Theta} = \{(q_1, q_2, \dots, q_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_{k=1}^n q_k = 1\}$, que ce maximum

est $\frac{h(1)}{h_2}$ et que'il est atteint en (p_1, p_2, \dots, p_n) .

Soit $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \hat{\Theta}$. $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} q_k$. Ainsi $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $q_k \in]0, 1[$ et

$1 - \sum_{k=1}^{n-1} q_k > 0$; d'où $(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) \in \Theta$.

Soit $(q_1, \dots, q_{n-1}) \in \Theta$. Posons $q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} q_k$.

$$h_n(q_1, \dots, q_{n-1}) = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n) \leq \psi(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Notons que $p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k > 0$ et $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in]0, 1[^{n-1}$; $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Theta$.

$$\text{Alors } h_n(q_1, \dots, q_{n-1}) \leq \psi(p_1, p_2, \dots, p_n) = h_n(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Ainsi h_n possède un maximum atteint en $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$. Or $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$

est un point critique de h_n ; d'où $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ car

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ est le seul point critique de h_n .

$$\text{Par conséquent } p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = \frac{1}{n} \text{ et } p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Soit $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. X suit donc une loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Finalment $h(X) \leq \frac{h(1)}{h_2}$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme

sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$$\textcircled{QL} \quad \underline{\underline{a)}} \quad m = \frac{1}{p}. \quad \forall k \in \mathbb{N}^n, p_k = k! = k! = p q^{k-1} \text{ avec } q = 1-p.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^n, h(p_k) = -\frac{1}{h_2} p q^{k-1} h(p q^{k-1})$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^n, h(p_k) = -\frac{1}{h_2} [(h(p) p_k + (h(q) (k-1) p_k)] = -\frac{1}{h_2} [h(p) p_k + (h(q) k p_k)].$$

La série de terme général p_k converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

La série de terme général $h p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} h p_k = \frac{1}{p}$ ($E(G) = \frac{1}{p}$!)

Ainsi la série de terme général $h(p_k) = -\frac{1}{h-2} \left[h \frac{p}{q} p_k + (h-1) h p_k \right]$ converge

et $\sum_{k=1}^{+\infty} h(p_k) = -\frac{1}{h-2} \left[h \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k + (h-1) \sum_{k=1}^{+\infty} h p_k \right] = -\frac{1}{h-2} \left[h \frac{p}{q} + \frac{h-1}{p} \right]$.

Donc $H(G) \leq \frac{1}{h-2}$ et $H(G) = -\frac{1}{h-2} \left[h \frac{p}{q} + \frac{h-1}{p} \right] = -\frac{1}{h-2} \left[h \left(\frac{p}{1-p} \right) + \frac{h-1}{p} \right]$.

b) Posons $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x-1-hx$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

f est continue sur $]0, +\infty[$, $\forall x \in]0, 1[, f'(x) < 0$, $f'(1) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$.

Comme $f(1) = 0 = \forall x \in]0, 1[, f(x) > f(1) = 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) > f(1) = 0$.

Alors $f(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[- \{1\}$, $f(x) = x-1-hx > 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, hx \leq x-1$ avec égalité si et seulement si $x=1$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \in]0, +\infty[$ et $q_k \in]0, +\infty[$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $h(p_k) - h(q_k) = h\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \leq \frac{p_k}{q_k} - 1$

(avec égalité si $\frac{p_k}{q_k} = 1$ ou $p_k = q_k$).

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q_k (h(p_k) - h(q_k)) \leq q_k \left(\frac{p_k}{q_k} - 1\right) = p_k - q_k$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{q_k}{h-2} (h(p_k) - h(q_k)) \leq \frac{1}{h-2} (p_k - q_k)$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $h(q_k) + \frac{1}{h-2} q_k h(p_k) \leq \frac{1}{h-2} (p_k - q_k)$ avec égalité si $p_k = q_k$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^p, q_k \ln p_k = q_k \ln(p q^{l-1}) = q_k \ln p + (l-1)q_k \ln q = \ln \frac{p}{q} q_k + (l-1)q_k \ln q.$$

$$\sum_{k=1}^m q_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^m l q_k = m \text{ donc } \sum_{k=1}^m q_k \ln p_k = \ln \frac{p}{q} + (l-1) \ln q$$

$$m = \frac{1}{p} \text{ donc } \sum_{k=1}^m q_k \ln p_k = \ln \frac{p}{q} + \frac{\ln q}{p}; \quad \frac{1}{l-1} \sum_{k=1}^m q_k \ln q_k = -H(G).$$

$$\text{Rappelons que } \forall k \in \mathbb{N}^m, h(q_k) + \frac{1}{l-1} q_k \ln p_k \leq \frac{1}{l-1} (l-1)q_k \ln q, \text{ que}$$

$$\sum_{k=1}^m p_k = \sum_{k=1}^m q_k = 1 \text{ et que } \sum_{k=1}^m h(q_k) = H(X).$$

$$\text{"En passant (*)" de s à t on a : } H(X) - H(G) \leq \frac{1}{l-1} \sum_{k=1}^m (l-1)q_k \ln q = 0.$$

$$\text{donc } H(X) - H(G)$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{H(X) \leq H(G)}}.$$

$$\text{Pour } \forall k \in \mathbb{N}^p, u_k = h(q_k) + \frac{1}{l-1} q_k \ln p_k \text{ et } v_k = \frac{1}{l-1} (l-1)q_k \ln q.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^p, u_k \leq v_k, \sum_{k=1}^m u_k = H(X) - H(G) \text{ et } \sum_{k=1}^m v_k = 0.$$

$$\text{Alors } H(X) = H(G) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m u_k = \sum_{k=1}^m v_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^p, u_k = v_k$$

\uparrow
 $\forall k \in \mathbb{N}^p, u_k \leq v_k$

$$H(X) = H(G) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^p, h(q_k) + \frac{1}{l-1} q_k \ln p_k \leq \frac{1}{l-1} (l-1)q_k \ln q.$$

$$H(X) = H(G) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^p, p_k = q_k \text{ (fa de la page 13)}.$$

$H(X) \leq H(G)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G .

PARTIE VI Incertitude d'une variable aléatoire continue.

Q1 a) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$; \hat{f} est une densité de X_0 .

Observons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(f(t)) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \frac{1}{h_2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right) = -\frac{1}{h_2} \left[-\ln \sqrt{2\pi} - \frac{t^2}{2}\right] f(t).$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_1 f(t) = \left(\frac{1}{2} \frac{h_1(2\pi)}{h_2} + \frac{1}{2} t^2\right) f(t) = \frac{1}{2} \frac{h_1(2\pi)}{h_2} f(t) + \frac{1}{2} t^2 f(t).$$

On $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut 1. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ existe et vaut 1.

car $E(X_0^2)$ existe et vaut $V(X_0) + (E(X_0))^2 = 1 + 0^2 = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t)) dt$ existe et vaut $\frac{1}{2} \frac{h_1(2\pi)}{h_2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$.

$H(X_0)$ existe et vaut $\frac{h_1(2\pi) + 1}{2 h_2}$.

b) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; \hat{f} est une densité de Y .

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(\hat{f}(t)) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \hat{f}(t) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{h_2} \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \hat{f}(t) + \frac{1}{h_2} \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \hat{f}(t).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) dt$ existe et vaut 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 \hat{f}(t) dt$ existe et vaut $E((Y-E(Y))^2) = V(Y) = \sigma^2$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\hat{f}(t)) dt = \frac{1}{h_2} \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \times 1 + \frac{1}{h_2} \frac{1}{2\sigma^2} \times \sigma^2 = \frac{2 \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + 1}{2 h_2}$

Ainsi $H(Y)$ existe et vaut $\frac{2 \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + 1}{2 h_2}$.

$$\textcircled{a)} \text{ pour } \forall t \in \mathbb{R}, f_0(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \in [0, +\infty[\\ 0 & t \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

fonction qui est nulle sur la partie de l'axe des ordonnées à l'origine.

$$\forall t \in]-\infty, 0[, h(f_0(t)) = 0 \text{ et } \forall t \in [0, +\infty[, h(f_0(t)) = -\frac{1}{h\lambda} [h(\lambda e^{-\lambda t})] f_0(t).$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, h(f_0(t)) = -\frac{1}{h\lambda} [h\lambda - \lambda t] f_0(t) = \left(-\frac{h\lambda}{h\lambda} + \frac{\lambda}{h\lambda} t \right) f_0(t)$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, h(f_0(t)) = -\frac{h\lambda}{h\lambda} f_0(t) + \frac{\lambda}{h\lambda} t f_0(t).$$

$$\text{Nous avons } \forall t \in \mathbb{R}, h(f_0(t)) = -\frac{h\lambda}{h\lambda} f_0(t) + \frac{\lambda}{h\lambda} t f_0(t) !$$

$$\int_0^{+\infty} f_0(t) dt \text{ existe et vaut } 1. \int_0^{+\infty} t f_0(t) dt \text{ existe et vaut } H(x_0) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} h(f_0(t)) dt \text{ existe et vaut } -\frac{h\lambda}{h\lambda} + \frac{\lambda}{h\lambda} \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Alors } \underline{\underline{H(x_0) \text{ existe et vaut } \frac{1-h\lambda}{h\lambda}}}.$$

$$\text{b)} \forall x \in [0, +\infty[, f(x) h(f_0(x)) = f(x) h(\lambda e^{-\lambda x}) = f(x) h\lambda + f(x)(-\lambda x)$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) h(f_0(x)) = (h\lambda) f(x) - \lambda x f(x).$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ existe et vaut } 1 \text{ et } \int_0^{+\infty} x f(x) dx \text{ existe et vaut } \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Alors } \int_0^{+\infty} f(x) h(f_0(x)) dx \text{ existe et vaut } h\lambda - \lambda \times \frac{1}{\lambda} = -(1-h\lambda).$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{h\lambda} \int_0^{+\infty} f(x) h(f_0(x)) dx \text{ existe et vaut } \frac{1-h\lambda}{h\lambda} = H(x_0).$$

$$H(x) = \int_0^{+\infty} h(f(x)) dx = \int_0^{+\infty} h(f(x)) dx \text{ car } f \text{ est nulle sur }]-\infty, 0[\text{ privé d'un}$$

ensemble fini de points et $h(0) = 0$

$$H(x_0) - H(x) = -\frac{1}{h_2} \int_0^{+\infty} f(u) h(f_0(u)) du - \int_0^{+\infty} h(f(u)) du$$

$$H(x_0) - H(x) = -\frac{1}{h_2} \left[\int_0^{+\infty} (f(u) h(f_0(u)) + h_2 h(f(u))) du \right]$$

Pour montrer que $H(x_0) \geq H(x)$ il suffit de prouver que cette dernière est intégrale et négative.

Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) h(f_0(x)) + h_2 h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

1^{er} cas... $f(x) = 0$. Alors $f(x) h(f_0(x)) + h_2 h(f(x)) = 0 \stackrel{h(0)=0}{\leq} f_0(x) = f_0(x) - f(x)$.

2^{es} cas... $f(x) > 0$.

$$f(x) h(f_0(x)) + h_2 h(f(x)) = f(x) h(f_0(x)) - f(x) h(f(x)) = f(x) h\left(\frac{f_0(x)}{f(x)}\right) \leq f(x) \left(\frac{f_0(x)}{f(x)} - 1\right)$$

Donc $f(x) h(f_0(x)) + h_2 h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) h(f_0(x)) + h_2 h(f(x)) \leq f_0(x) - f(x)$.

Alors $\int_0^{+\infty} [f(u) h(f_0(u)) + h_2 h(f(u))] du \leq \int_0^{+\infty} f_0(u) du - \int_0^{+\infty} f(u) du = 0$ (toute la

intégrale est positive)

$$\text{Alors } H(x_0) - H(x) = -\frac{1}{h_2} \int_0^{+\infty} (f(u) h(f_0(u)) + h_2 h(f(u))) du \geq 0$$

Par conséquent $H(x) \leq H(x_0)$.

Exercice... Examiner le cas d'égalité.