

Quelques remarques pour une bonne pratique du texte.

- R1 Plus généralement si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est un ensemble fini ayant n éléments on appelle dérangement de F toute permutation σ de F sans point fixe c'est à dire telle que $\forall i \in \{1, n\}, \sigma(a_i) \neq a_i$.
- R2 Par convention $d_{0,0} = 1$.
- R3 Pour n dans \mathbb{N}^* et pour k dans $\{0, n\}$, $d_{n,k}$ est le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n , ayant k points fixes.
- R4 Dans II nous étudions la définition de $X_n (n \geq 1)$ à X_1 et par convention nous définissons X_0 comme la variable aléatoire sur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ constante et égale à 1.
- R5 Dans I 3 il est préférable de définir \tilde{w}_j à partir de j dans $\{1, n\}$ et d'une permutation quelconque w de \mathbb{Z}_n . On suppose alors que dans a) w est un dérangement et dans b) w admet un point fixe et un seul j .
- R6 Dans I 4 nous définissons un point u dans \mathbb{N}^* et v un point u dans \mathbb{N} .
- de plus possible nous optimiser la validation des résultats.

PARTIE 5

Q1) $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \mathcal{S}_n$.

• Si I est l'ensemble des points fixes de ω : $\exists \omega|_I = \text{Id}_I$
 $\exists \omega|_{E_n \setminus I}$ et un dérangement de $E_n \setminus I$

• Réciproquement, si J est une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\exists \omega|_J = \text{Id}_J$
 $\exists \omega|_{E_n \setminus J}$ et un dérangement de $E_n \setminus J$
 alors J est l'ensemble des points fixes de ω .

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ce qui précède permet alors d'écrire que :

$$D_{n,k} = \{ \omega \in \mathcal{S}_n \mid \exists J \in \mathcal{P}(E_n), \text{card } J = k, \omega|_J = \text{Id}_J, \omega|_{E_n \setminus J} \text{ et un dérangement de } E_n \setminus J \}$$

$$\text{Alors } D_{n,k} = \bigcup_{\substack{J \subset E_n \\ \text{card } J = k}} \{ \omega \in \mathcal{S}_n \mid \omega|_J = \text{Id}_J, \omega|_{E_n \setminus J} \text{ et un dérangement de } E_n \setminus J \}.$$

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

l'énoncé précédent é est constitué d'ensemble de ω à deux disjoints :

$$\text{card } (D_{n,k}) = \sum_{\substack{J \subset E_n \\ \text{card } J = k}} \text{card } \{ \omega \in \mathcal{S}_n \mid \omega|_J = \text{Id}_J, \omega|_{E_n \setminus J} \text{ et un dérangement de } E_n \setminus J \}.$$

Soit J une partie de E_n telle que $\text{card } J = k$. Supposons $k < n$.

Pour $\mathcal{S}_J = \{ \omega \in \mathcal{S}_n \mid \omega|_J = \text{Id}_J \text{ et } \omega|_{E_n \setminus J} \text{ et un dérangement de } E_n \setminus J \}$.

Construire un élément de \mathcal{S}_J revient à construire sa restriction à $E_n \setminus J$ donc à construire un dérangement de $E_n \setminus J$.

Comme $\text{card } (E_n \setminus J) = n - k$, $\text{card } \mathcal{S}_J = d_{n-k, 0}$; ceci vaut encore pour $k = n$ car

$$\mathcal{S}_J = \{ \text{Id}_{E_n} \} \text{ et } d_{0, 0} = 1.$$

$$\text{Alors } \text{card } (D_{n,k}) = \sum_{\substack{J \subset E_n \\ \text{card } J = k}} d_{n-k, 0}.$$

↑
 coefficient de x^k

le nombre de parties I de E_n telles que $\text{card}(I) = k$ est $\binom{n}{k}$.

Ainsi $\text{card } D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, n], d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}, 0$

rien $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [0, n], d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}, 0$. ($d_{0,0} = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$).

Dans cette question nous nous

Q3) on doit ω un dérangement de E_n . Montrons que $\tilde{\omega}_j$ est un dérangement de E_{n+1} .

• ω est une application de $[1, n]$ dans $[1, n]$ donc $\tilde{\omega}_j$ est une application de $[1, n+1]$ dans $[1, n+1]$.

• $\tilde{\omega}_j([1, n+1]) = \tilde{\omega}_j([1, n] - \{j\} \cup \{j, n+1\}) = \tilde{\omega}_j([1, n] - \{j\}) \cup \tilde{\omega}_j(\{j, n+1\})$.

$\tilde{\omega}_j([1, n+1]) = \omega([1, n] - \{j\}) \cup \{\omega(j), n+1\}$.

ω est une bijection de $[1, n]$ sur $[1, n]$ telle que $\omega(j) \neq j$ (ω est un dérangement) donc $\omega([1, n] - \{j\}) = [1, n] - \{\omega(j)\}$.

Alors $\tilde{\omega}_j([1, n+1]) = ([1, n] - \{\omega(j)\}) \cup \{\omega(j), n+1\} = [1, n+1]$.

$\tilde{\omega}_j$ est donc une surjection de $[1, n+1]$ sur $[1, n+1]$ donc $\tilde{\omega}_j$ est une bijection de $[1, n+1]$ sur $[1, n+1]$ ($[1, n+1]$ est fini...) donc une permutation de $[1, n+1]$.

• Supposons que $\tilde{\omega}_j$ possède un point fixe k . $k \in [1, n+1]$ et $\tilde{\omega}_j(k) = k$.

Par définition de $\tilde{\omega}_j$, k n'est ni j ni $n+1$.

Alors $k \in [1, n] - \{j\}$ et $\omega(k) = \tilde{\omega}_j(k) = k$; k est un point fixe du

dérangement ω !

Alors $\tilde{\omega}_j$ n'a pas de point fixe.

Ainsi ω_j est un dérangement de E_{n+1} .

b) w est un élément de \mathcal{S} ayant un point fixe j et un réel.

- \tilde{w}_j est toujours une application de $[[1, n+1]]$ dans $[[1, n+1]]$.

- $\tilde{w}_j([[1, n+1]]) = w([[1, n]] - \{j\}) \cup \{n+1, w(j)\} = w([[1, n]] - \{j\}) \cup \{n+1, j\}$

car $w(j) = j$ et w est une bijection de $[[1, n]]$ sur $[[1, n]]$. Ainsi $w([[1, n]] - \{j\}) = [[1, n]] - \{j\}$.

Ainsi $\tilde{w}_j([[1, n+1]]) = ([[1, n]] - \{j\}) \cup \{n+1, j\} = [[1, n+1]]$.

\tilde{w}_j est aussi une application surjective de $[[1, n+1]]$ sur $[[1, n+1]]$ donc une bijection de $[[1, n+1]]$ sur $[[1, n+1]]$ car $[[1, n+1]]$ est un ensemble fini.

- Supposons que : $\exists k \in [[1, n+1]], \tilde{w}_j(k) = k$.

par construction $k \neq j$ et $k \neq n+1$ donc $k \in [[1, n]] - \{j\}$.

mais alors $k \neq j$ et $w(k) = \tilde{w}_j(k) = k$! ce qui est impossible car j est le seul point fixe de w .

Ainsi \tilde{w}_j n'a pas de point fixe.

\tilde{w}_j est un dérangement de $[[1, n+1]]$.

c) Pour un point i fixé j dans $[[1, n]]$, $\mathcal{S}_j^i = \{\tilde{w}_j; w \in D_{n,0}\}$ et

$\mathcal{S}_2^j = \{\tilde{w}_j; w \in D_{n,1} \text{ et } w(j) = j\}$. Par conséquent $\mathcal{S}_1 = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{S}_j^i$ et $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{S}_2^j$

ce qui précède indique que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \subset D_{n+1,0}$.

- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. $\exists (j, j') \in [[1, n]]^2, \exists w \in D_{n,0}, \exists w' \in D_{n,1}$,

$w'(j') = j'$ et $\sigma = \tilde{w}_j = \tilde{w}'_{j'}$.

$\sigma(n+1) = \tilde{w}_j(n+1) = w(j)$ et $\sigma(n+1) = \tilde{w}'_{j'}(n+1) = j'$; $w(j) = j'$ donc $j' \neq j$ car w est un dérangement.

Alors $\sigma(j') = \tilde{\omega}_j(j') = \omega(j')$ et $\sigma(j') = \tilde{\omega}'_{j'}(j') = n+1$; $\omega(j') = n+1$; ce qui est impossible car $\omega(j') \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

• Soit $\sigma \in \mathcal{S}_1^j \cap \mathcal{S}_2^{j'}$ avec $(j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $j \neq j'$. Repère deux dérangements ω et ω' de E_n tels que: $\sigma = \tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}'_{j'}$.

$\sigma(j) = \tilde{\omega}_j(j) = n+1$ et $\sigma(j') = \tilde{\omega}'_{j'}(j') = n+1$; $\sigma(j) \neq \sigma(j')$ donc $j \neq j'!!$

Ainsi $\forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $j \neq j' \Rightarrow \mathcal{S}_1^j \cap \mathcal{S}_2^{j'} = \emptyset$.

• Au même titre de nous que: $\forall (i, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $j \neq j' \Rightarrow \mathcal{S}_2^j \cap \mathcal{S}_2^{j'} = \emptyset$.

• Montrons enfin que $D_{n+1, 0} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

Soit $\sigma \in D_{n+1, 0}$. $\exists! j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\sigma(j) = n+1$. $\sigma(n+1) \neq n+1$ donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Envisageons deux cas.

cas 1 - $\sigma(n+1) \neq j$ Posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{si } k \neq j \\ \sigma(n+1) & \text{si } k = j \end{cases}$

ω est une application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$\omega(\llbracket 1, n \rrbracket) = \sigma(\llbracket 1, n \rrbracket - \{j\}) \cup \{\sigma(n+1)\} = (\sigma(\llbracket 1, n \rrbracket) - \{\sigma(j)\}) \cup \{\sigma(n+1)\}$

$\omega(\llbracket 1, n \rrbracket) = \sigma(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) - \{\sigma(j)\} = \llbracket 1, n+1 \rrbracket - \{n+1\} = \llbracket 1, n \rrbracket$.

ω est une application surjective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrons que ω est un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Supposons que: $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega(k) = k$.

Si $k \neq j$: $k = \omega(k) = \sigma(k)$; $k = \sigma(k)!$

Si $k = j$: $j = k = \omega(k) = \sigma(n+1)$ ce qui est impossible.

ω est un dérangement de E_n et par définition de ω : $\tilde{\omega}_j = \sigma$; $\sigma \in \mathcal{S}_1$.

2^{ème} cas.. $\sigma(n+1) = j$ pour $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k \neq j \\ j & k = j \end{cases}$.

$$\omega(\llbracket 1, n \rrbracket) = (\sigma(\llbracket 1, n \rrbracket) - \{j\}) \cup \{j\} = (\sigma(\llbracket 1, n \rrbracket) - \{\sigma(j)\}) \cup \{j\} \\ = ((\llbracket 1, n+1 \rrbracket - \{j\}) - \{n+1\}) \cup \{j\} = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

ω est alors une application surjective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. ω est une permutation de E_n . Noter que j est le seul point fixe de ω .

soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{j\}$ tel que $\omega(k) = k$. Alors $\sigma(k) = \omega(k) = k$!

ω est une permutation de E_n ayant j comme seul point fixe ;

k est donc que $\tilde{\omega}_j = \sigma$ par construction de ω .

Alors $\sigma \in \mathcal{S}_2$.

Ainsi $D_{n+1,0} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Réciproquement $D_{n+1,0} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

les dérangements de E_{n+1} construit dans 3.a) et 3.b) sont distincts et

tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.

$$d) \quad d_{n+1,0} = \text{card } D_{n+1,0} = \text{card } \mathcal{S}_1 + \text{card } \mathcal{S}_2 = \sum_{i=1}^n \text{card } \mathcal{S}_1^i + \sum_{i=1}^n \text{card } \mathcal{S}_2^i$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{card } \mathcal{S}_1^i = \text{card } D_{n,0}$ ($\omega \mapsto \tilde{\omega}_j$ est une bijection de $D_{n,0}$ sur \mathcal{S}_1^i).

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{card } \mathcal{S}_2^i = \text{card } D_{n-1,0}$ (il y a autant d'éléments dans \mathcal{S}_2^i que de permutations de E_n ayant j pour seul point fixe).

$$\text{Alors } d_{n+1,0} = \sum_{i=1}^n \text{card } D_{n,0} + \sum_{i=1}^n \text{card } D_{n-1,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n+1,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}).$$

Q4) Prouver $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = d_{n,0} - n d_{n-1,0}$

a) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} = d_{n+1,0} - (n+1)d_{n,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}) - (n+1)d_{n,0}$

$$u_{n+1} = n d_{n-1,0} - d_{n,0} = -u_n ; (u_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite géométrique}$$

de raison -1 et de premier terme $u_1 = d_{1,0} - 1 \times d_{0,0} = 0 - 1 \times 1 = -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^{n-1} u_1 = (-1)^n. \quad \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n.}}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n,0} - n d_{n-1,0} = (-1)^n$.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n,0} = n d_{n-1,0} + (-1)^n.}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{d_{n,0}}{n!} = \frac{d_{n-1,0}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} = v_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k - v_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad \bullet \quad v_n - v_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} + v_0 \quad \& \quad v_0 = \frac{d_{0,0}}{0!} = 1.$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$; mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

PARTIE II

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ avec la convention $d_{0,0} = 1$
 Par convention X_0 désigne la variable certaine égale à 1.

Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{\text{card} \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{card } D_{n,k}}{\text{card } \Omega} = \frac{d_{n,k}}{n!}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k,0}}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n!} d_{n-k,0} = \frac{1}{k!(n-k)!} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}. \text{ ceci vaut encore pour } n=0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$b) \forall \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1 \text{ donc } \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \right) = 1.$$

$$1 = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq i \leq n-k}} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq n-i}} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$1 = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!}.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1.$$

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \stackrel{k \rightarrow k+1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = 1$$

↑
E en appliquant Q3 b) à "n-1"

$E(X_n) = 1$. ceci vaut encore pour $n=0$.

si $n=1$. $X_n(X_{n-1})$ (n=1) donc $V(X_n(X_{n-1})) = 0$.

Supposons $n \geq 2$.

$$E(X_n(X_{n-1})) = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \stackrel{k \rightarrow k+2}{=} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k-2} \frac{(-1)^i}{i!}$$

En appliquant de nouveau Q3 b) cette fois pour "n-2" en entier :

$$E(X_n(X_{n-1})) = 1. \text{ Alors } V(X_n) = E(X_n(X_{n-1})) + E(X_{n-1}) - (E(X_n))^2 = 1 + 1 - 1^2 = 1.$$

$V(X_n) = 1$.

si $n=1$. $V(X_n) = E(X_n(X_{n-1})) + E(X_{n-1}) - (E(X_n))^2 = 0 + 1 - 1 = 0.$

$V(X_0) = V(X_1) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, V(X_n) = 1$.

Q3 a) soit $x \in \mathbb{N}^*$

si X_n prend la valeur k , c'est dire qu'il y a nb euros et a dépensé kB , le coût est alors de $nb - kB$ euros.

Ainsi $C_n = nb - BX_n$

$E(C_n) = nb - B E(X_n) = nb - B.$

$E(C_n) = nb - B.$

$\sigma(C_n) = \sqrt{V(C_n)} = \sqrt{V(nb - BX_n)} = \sqrt{B^2 V(X_n)} = B \sigma(X_n).$

$\sigma(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ B & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

b) sans doute via les concepteurs du jeu !

Q4 Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si l'acheteur a acquis un produit (au hasard) qui lui a permis de gagner et 0 sinon.

$(X_n = k)_{k \in \{0,1\}}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne : $P(X_n = 1) = \sum_{k=0}^n P(X_n = 1 | X_n = k) P(X_n = k)$

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} P(X_n = k) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n}.$$

$$\underline{\underline{P(X_n = 1) = \frac{1}{n}}}$$

si X_n prend la valeur 1 (resp. 0) le gain de l'acheteur est $B - b$ (resp. $-b$)

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{G_n = BX_n - b}}$$

$$E(G_n) = B E(X_n) - b ; \quad \underline{\underline{E(G_n) = \frac{1}{n} B - b}}$$

PARTIE III

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \cap]k, +\infty[, P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{k!} e^{-1}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{k!} e^{-1}. \quad \underline{\underline{(X_n) converge à la loi d'une variable}}$$

aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$
 Q2) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$|P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!}| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!}| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|.$$

Q3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $r \in \llbracket m+1, +\infty \llbracket$.

$$\sum_{i=m}^r \frac{1}{i!} = \frac{1}{m!} \left[\sum_{i=m}^r \frac{m!}{i!} \right] = \frac{1}{m!} \left[1 + \sum_{i=m+1}^r \frac{m!}{i!} \right].$$

$$\text{Soit } i \in \llbracket m+1, r \rrbracket. \quad i! = m! \prod_{k=m+1}^i k \geq m! \prod_{k=m+1}^i (m+1) = m! (m+1)^{i-m} > 0$$

$$\text{Dac } \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m! (m+1)^{i-m}}; \quad \frac{m!}{i!} \leq \frac{1}{(m+1)^{i-m}}.$$

$$\text{Alors } \sum_{i=m}^r \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \left[1 + \sum_{i=m+1}^r \frac{1}{(m+1)^{i-m}} \right] = \frac{1}{m!} \sum_{i=m}^r \frac{1}{(m+1)^{i-m}} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{r-m} \frac{1}{(m+1)^k}$$

$\left| \frac{1}{m+1} \right| < 1$ car $m+1 > 1$, et dac la série de terme général $\frac{1}{(m+1)^k}$ converge.

$$\text{Alors, en faisant tendre } r \text{ vers } +\infty \text{ d'après : } \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k}$$

$$\text{et } \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m} \leq 2.$$

$$\text{Alors } \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leq \frac{2}{m!}.$$

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [0, n]$.

Notons que $n - k + 1 \geq 1$. Donc $\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{2}{(n-k+1)!}$.

$$\forall r \in [n-k+1, +\infty[, \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^r \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^r \left| \frac{(-1)^i}{i!} \right| = \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^r \frac{1}{i!}$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{2}{k!(n-k+1)!}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{2}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{2(k+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \leq \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{2}{(n+1)!} \times 2^{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \dots \text{ ceci vaut encore pour } n = 0.$$

Q5) a) un passage dans le haube donne \bar{a} & la valeur $2 \times (2/2) = \frac{2^2}{2!}$

deux passage dans le haube donne \bar{a} & la valeur $\frac{2^2}{2!} \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^3}{3!} \dots$

donc j passages dans le haube donne \bar{a} & la valeur $\frac{2^{j+1}}{(j+1)!}$.

ce que peut donner ca finira une récence simple ... mais hier parée.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{2}{n+2} u_n \leq u_n$; $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante & minorée par 0 donc convergente.

Notons l sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n+2} u_n$ donc en faisant tendre n

vers $+\infty$ on voit : $l = 0 \times l$; $l = 0$. $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente & a pour limite 0.

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \text{ Alors } \exists p \in \mathbb{N}^p, \forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{0,00001}{2}$$

$\{j \in \mathbb{N}^p \mid \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} \leq \frac{0,00001}{2}\}$ et une partie non vide de \mathbb{N}^p qui possède

donc un plus petit élément j_0 . $j_0 \geq 2$ car $\frac{2^2}{2!} > \frac{0,00001}{2}$.

$$\forall j \in \llbracket 2, j_0 \rrbracket, \frac{2^{j+1}}{(j+1)!} > \frac{0,00001}{2} \text{ et } \frac{2^{j_0+1}}{(j_0+1)!} \leq \frac{0,00001}{2}.$$

Alors la hauteur white se termine après j_0 "passages" dans la hauteur.

d) En fait la valeur affichée par la dernière ligne est 14 !!

Elle représente le plus petit élément n de \mathbb{N}^p tel que $\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{0,00001}{2}$

ou le plus petit élément n de \mathbb{N}^p tel que $\frac{2^n}{(n-1)!} \leq 0,00001$.

PARTIE IV

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^p$ et soit $k \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket$. $k-1 \geq n$.

rappelons que $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Alors l'une des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_{k-1} prend la valeur 0.

Donc $(X_1(X_{k-1}) \dots (X_{k-1}))(\Omega) = \{0\}$.

$$\text{Ainsi } E(X_1(X_{k-1}) \dots (X_{k-1})) = 0; \quad m_k(X_{k-1}) = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}^p, \forall k \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket, m_k(X_{k-1}) = 0$. Si $n=0 \forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, m_k(X_n) = 0$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^p$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$m_k(X_{k-1}) = \sum_{i=0}^n i(i-1)\dots(i-k+1) P(X_{k-1}=i) = \sum_{i=0}^n \frac{i!}{(i-k)!} P(X_{k-1}=i)$$

$$m_k(X_{k-1}) = \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} \frac{1}{i!} \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^{n-k-j} \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k}=j)$$

$$m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k}=j) = 1.$$

Ceci vaut encore pour $n=0$ car $m_0(X_0) = 1 = \sum_{j=0}^{0-0} P(X_{0-0}=j)!$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k}=j) = 1.$$

Q3) Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $m_0(Z) = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}$

$$i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i) = i(i-1)\dots(i-k+1) \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \\ \frac{1}{(i-k)!} \lambda^i e^{-\lambda} & \text{si } i \in \llbracket k, +\infty \rrbracket \end{cases}$$

$$\forall i \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i) = \lambda^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!}$$

La série de terme général $i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i)$ est absolument convergente car

la série de terme général $\frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!}$ converge. Ainsi la série de terme

général $i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i)$ est absolument convergente car elle a

à terme positif. Donc $\sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i)$ existe ; $m_k(Z)$ existe.

$$m_k(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\dots(i-k+1) P(Z=i) = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} \lambda^i e^{-\lambda} = \lambda^k e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$m_k(Z) = \lambda^k e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^k e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^k. \quad m_k(Z) = \lambda^k \dots \text{ce qui vaut}$$

pour $k=0$.

$\forall k \in \mathbb{N}, m_k(Z) = \lambda^k.$

soit $n \in \mathbb{N}$.

Q4) \mathcal{P} . (P) $\{a_k\}_{k \leq n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$

• $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$; (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille

d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés donc cette famille est libre.

Alors (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille libre de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(P_0, P_1, \dots, P_k) est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ donc $\exists (\hat{a}_{0,k}, \hat{a}_{1,k}, \dots, \hat{a}_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel

que $X^k = \sum_{j=0}^k \hat{a}_{j,k} P_j(X)$ car $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$

Pour $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $a_{j,k} = j! \hat{a}_{j,k}$. Alors $X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \exists ((a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}, X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}$.

Q6) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{P_0(i)}{0!} = 1$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{P_j(i)}{j!} = \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{i!}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{P_j(i)}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \binom{i}{j} & \text{si } i \geq j \end{cases} \quad \text{Notons que ceci vaut pour } j=0!$$

b) Soit $k \in \mathbb{N} (!!)$. $\exists n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket !!$

$$\text{Ainsi } X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}$$

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, i^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(i)}{i!} = \sum_{j=0}^i a_{j,k} \binom{i}{j}$$

$$\forall r \in \mathbb{U}, k \in \mathbb{I}, i^k = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_{jk} \quad (*)$$

c) soit $k \in \mathbb{N}^*$. (*) implique que

$$\begin{cases} a_{0,k} = 0^k \\ \binom{1}{0} a_{0,k} + \binom{1}{1} a_{1,k} = 1^k \\ \dots \\ \binom{i}{0} a_{0,k} + \binom{i}{1} a_{1,k} + \dots + \binom{i}{i} a_{i,k} = i^k \\ \dots \\ \binom{k}{0} a_{0,k} + \binom{k}{1} a_{1,k} + \dots + \binom{k}{k} a_{k,k} = k^k \end{cases}$$

la matrice de ce système est
c'est à dire $A_k = (b_{ij})$ avec

$$\forall (i,j) \in \mathbb{U}, k \in \mathbb{I}, b_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ | & | & & \\ \binom{i}{0} & \binom{i}{1} & \dots & \binom{i}{i} \\ | & | & & 0 \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{k} \end{pmatrix}$$

notons que ce ci vaut encore pour $k=0$.

$$\underline{\underline{d) {}^k A_k = A_k^T = (c_{ij}) \text{ avec } \forall (i,j) \in \mathbb{U}, k \in \mathbb{I}, c_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}}}$$

soit φ_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ de matrice A_k^T dans la base

$$\mathcal{B}_k = (1, X, \dots, X^k).$$

$$\forall j \in \mathbb{U}, k \in \mathbb{I}, \varphi_k(X^j) = \sum_{i=0}^k c_{ij} X^i = \sum_{i=0}^k b_{ji} X^i = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i = (X+1)^j.$$

Pour $\forall P \in \mathbb{R}_k[X]$, $\varphi_k(P) = P(X+1)$. φ_k est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$. φ_k coïncide avec φ_k sur la base \mathcal{B}_k de $\mathbb{R}_k[X]$ donc $\varphi_k = \varphi_k$.

A_k^T et la matrice dans la base $B_k = (1, x, \dots, x^k)$ de l'endomorphisme φ_k de

$\mathbb{R}_k[x]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_k[x], \varphi_k(P) = P(x+1)$.

e) Posons $\forall P \in \mathbb{R}_k[x], \hat{\varphi}_k(P) = P(x-1)$. $\hat{\varphi}_k$ est une application de $\mathbb{R}_k[x]$ dans

$\mathbb{R}_k[x]$ telle que: $\forall P \in \mathbb{R}_k[x], (\varphi_k \circ \hat{\varphi}_k)(P) = \varphi_k(P(x-1)) = P(x-1+1) = P(x) = P$ et

$(\hat{\varphi}_k \circ \varphi_k)(P) = \hat{\varphi}_k(\varphi_k(P)) = \hat{\varphi}_k(P(x+1)) = P(x+1-1) = P(x) = P$.

$\varphi_k \circ \hat{\varphi}_k = \hat{\varphi}_k \circ \varphi_k = \text{Id}_{\mathbb{R}_k[x]}$. Ainsi φ_k est bijective et $\varphi_k^{-1} = \hat{\varphi}_k$.

Ceci montre en particulier que $\hat{\varphi}_k$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_k[x]$ dans $\mathbb{R}_k[x]$.

φ_k est un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[x]$ dont la matrice A_k^T est inversible et

$(A_k^T)^{-1}$ est la matrice de $\hat{\varphi}_k$ dans la base B_k .

$\forall j \in \{1, k\}, \hat{\varphi}_k(x^j) = (x-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} x^i$.

Ainsi $(A_k^T)^{-1} = (a_{ij})$ avec $\forall (i, j) \in \{0, k\}^2, a_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$.

e) $A_k^T (A_k^T)^{-1} = I_k$ d'ac

$(A_k^T (A_k^T)^{-1})^T = I_k^T = I_k; ((A_k^T)^{-1})^T A_k = I_k$.

Ainsi A_k est inversible et A_k^{-1} est la transposée de $(A_k^T)^{-1}$.

$A_k^{-1} = (e_{ij})$ avec $\forall (i, j) \in \{0, k\}^2, e_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$A_k \begin{pmatrix} a_{0,k} \\ a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^k \\ 1^k \\ \vdots \\ k^k \end{pmatrix}; \quad A_k^{-1} \begin{pmatrix} 0^k \\ 1^k \\ \vdots \\ k^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,k} \\ a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, a_{i,k} = \sum_{j=0}^k e_{i,j} j^k = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^k.$$

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, a_{i,k} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^k \quad \text{ou}$$

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, a_{j,k} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i^k.$$

g) soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $x^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(x)}{j!}$; $x_n^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(x_n)}{j!}$.

$$E(x_n^k) = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{1}{j!} E(P_j(x_n)).$$

$$E(x_n^k) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{j,k}}{j!} x_n^j = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i^k.$$

PARTIE V

Ici $e \in \llbracket 1, n \rrbracket !!$

Q1) doit $e \in \llbracket 1, e \rrbracket$. $1_{A_{jk}}$ vaut 1 si l'échantillon "j" est gagnant et 0 dans le cas contraire car $A_{jk} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(j) = j\}$.

Ainsi $1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \dots + 1_{A_{j_e}} \rightarrow 1_{A_{j_e}}$ et le nombre d'échantillons gagnants du produit parmi les e acquis par l'acheteur.

$$Y_n^e = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \dots + 1_{A_{j_e}}$$

$$E(Y_n^e) = E\left(\sum_{k=1}^e 1_{A_{j_k}}\right) = \sum_{k=1}^e E(1_{A_{j_k}}) = \sum_{k=1}^e P(A_{j_k}) = \sum_{k=1}^e \frac{1}{n} = \frac{e}{n}$$

Q2) Rappelons que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r, (t_1 + t_2 + \dots + t_r)^2 =$

$$\sum_{i=1}^r t_i^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq r}} t_i t_j = \sum_{i=1}^r t_i^2 + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \\ i \neq j}} t_i t_j$$

$$\text{Alors } (Y_n^e)^2 = \left(\sum_{i=1}^e 1_{A_{j_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^e 1_{A_{j_i}}^2 + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, e \rrbracket^2 \\ i \neq j}} 1_{A_{j_i}} 1_{A_{j_j}}$$

$$\text{Or } \forall i \in \llbracket 1, e \rrbracket, 1_{A_{j_i}}^2 = 1_{A_{j_i}} 1_{A_{j_i}} = 1_{A_{j_i} \cap A_{j_i}} = 1_{A_{j_i}} \quad \&$$

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, e \rrbracket^2, 1_{A_{j_i}} \cap 1_{A_{j_j}} = 1_{A_{j_i} \cap A_{j_j}}$$

$$\text{Alors } (Y_n^e)^2 = \sum_{i=1}^e 1_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, e \rrbracket^2 \\ i \neq j}} 1_{A_{j_i} \cap A_{j_j}}$$

$$b) E((Y_n^e)^2) = \sum_{i=1}^e E(1_{A_{j_i}}) + \sum_{1 \leq i \neq l \leq e} E(1_{A_{j_i} \cap A_{j_l}})$$

$$E((Y_n^e)^2) = \sum_{i=1}^e P(A_{j_i}) + \sum_{1 \leq i \neq l \leq e} P(A_{j_i} \cap A_{j_l}).$$

$\forall i \in \{1, \dots, e\}$, $P(A_{j_i}) = \frac{1}{n}$. Soit $(j_i, j_l) \in \{1, \dots, e\}^2$, $i \neq l$.

$$A_{j_i} \cap A_{j_l} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(j_i) = j_i \text{ et } \omega(j_l) = j_l\}.$$

$$P(A_{j_i} \cap A_{j_l}) \stackrel{j_i \neq j_l}{=} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

$$E((Y_n^e)^2) = \sum_{i=1}^e \frac{1}{n} + \sum_{1 \leq i \neq l \leq e} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{e}{n} + \frac{e^2 - e}{n(n-1)} = \frac{e}{n} \left[1 + \frac{e-1}{n-1} \right]$$

$$E((Y_n^e)^2) = \frac{e}{n(n-1)} (n+e-1).$$

$$V(Y_n) = E((Y_n^e)^2) - (E(Y_n^e))^2 = \frac{e}{n(n-1)} (n+e-1) - \frac{e^2}{n^2} = \frac{e}{n^2(n-1)} (n^2 + ne - n - e^2)$$

$$V(Y_n) = \frac{n^2 - 2n + e}{n^2(n-1)}.$$

Q3) a) Si Y_n^e prend la valeur j , "le gain" de l'acheteur est $B_j - b e$.

$$\text{Ainsi: } \underline{G_n = B Y_n^e - b e}.$$

$$b) E(G_n) = B E(Y_n^e) - b e = B \cdot \frac{e}{n} - b e = e \left(\frac{B}{n} - b \right).$$

$$\underline{E(G_n) = e \left(\frac{B}{n} - b \right)}.$$

$$V(G_n) = V(B Y_n^e - b e) = B^2 V(Y_n^e); \quad \underline{V(G_n) = B^2 \frac{n^2 - 2n + e}{n^2(n-1)}}.$$

$$\sigma(G_n) = B \sqrt{\frac{n^2 - 2n + e}{n^2(n-1)}}.$$