PARTIE I

(Q1) On suppose ici que U est un segment. On rappelle que f est continue sur U.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est continue sur le segment U comme différence de deux fonctions continues sur le segment U donc F_y possède un maximum sur U ; ainsi $y \in U(f)$.

Finalement $U(f) = \mathbb{R}$ et f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

<u>Si U est un segment (et si f est continue sur U) f^* est définie sur $\mathbb{R}$.</u>

(Q2) et (Q3) a) <u>$U = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\dfrac{x^2}{2}$ avec $a \in \mathbb{R}^*_+$.</u>

Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$. f est même dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_y(x) = y - f'(x) = y - ax$.

F'_y est positive sur $]-\infty, \frac{y}{a}]$ et négative sur $[\frac{y}{a}, +\infty[$.

F_y est croissante sur $]-\infty, \frac{y}{a}]$ et décroissante sur $[\frac{y}{a}, +\infty[$.

Alors F_y possède un maximum sur U qui vaut $F_y\left(\frac{y}{a}\right) = y\frac{y}{a} - a\frac{(y/a)^2}{2} = \frac{y^2}{a} - \frac{y^2}{2a} = \frac{y^2}{2a}$.

Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \in U(f)$. Par conséquent $U(f) = \mathbb{R}$.

De plus $\forall y \in U(f)$, $f^*(y) = \max\limits_{x \in U} F_y(x) = \dfrac{y^2}{2a}$.

<u>$U(f) = \mathbb{R}$ et $\forall y \in U(f)$, $f^*(y) = \dfrac{y^2}{2a}$.</u>

Posons $a' = \frac{1}{a}$. f^* est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^*(y) = a'\dfrac{y^2}{2}$. Observons que $a' > 0$.

Alors d'après ce qui vient d'être fait : $U(f^*) = \mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{R}$, $(f^*)^*(z) = \dfrac{z^2}{2a'}$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}$, $f^{**}(z) = \dfrac{z^2}{2a'} = a\dfrac{z^2}{2} = f(z)$. Ainsi <u>$f^{**} = f$.</u>

b) <u>$U = \mathbb{R}^*_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ avec $\alpha \in]1, +\infty[$.</u>

Notons que f est continue et même dérivable sur $U = \mathbb{R}^*_+$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_y'(x) = y - f'(x) = y - \frac{1}{\alpha}\alpha x^{\alpha-1} = y - x^{\alpha-1}$.

<u>1er cas</u> : $y \leq 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_y'(x) = y - x^{\alpha-1} < 0$. F_y est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. F_y définit donc une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim_{x\to+\infty} F_y(x), \lim_{x\to 0^+} F_y(x)\right[\underset{\alpha>1}{=}]-\infty, 0[$. Ainsi F_y ne possède pas de maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$; $y \notin U(f)$.

<u>2ème cas</u> : $y > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $F_y'(x) \geq 0 \iff y \geq x^{\alpha-1} \overset{\alpha>1}{\iff} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq x$

$F_y'(x) \leq 0 \iff y \leq x^{\alpha-1} \iff y^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq x$.

Ainsi F_y est croissante sur $]0, y^{\frac{1}{\alpha-1}}]$ et décroissante sur $[y^{\frac{1}{\alpha-1}}, +\infty[$.

F_y possède un maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$ qui vaut $F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}})$.

$$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y\, y^{\frac{1}{\alpha-1}} - f(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}(y^{\frac{1}{\alpha-1}})^{\alpha} = y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Donc $y \in U(f)$ et $f^*(y) = \max_{x \in U} F_y(x) = \dfrac{y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Ce qui précède montre que $\underline{U(f) = \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall y \in U(f),\ f^*(y) = \frac{y^\beta}{\beta} \text{ avec } \beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

<u>Remarque</u> : $\beta - 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1} - 1 = \frac{1}{\alpha-1} > 0$; $\underline{\beta > 1}$.

Notons aussi que $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}$ donc $\underline{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1}$.

Comme $\beta > 1$ ce qui précède montre que $U(f^*) = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall z \in U(f^*)$, $f^{**}(z) = \frac{z^\gamma}{\gamma}$ avec $\gamma = \frac{\beta}{\beta-1}$. On a également $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$. Ainsi $\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$ donc $\gamma = \alpha$.

Alors $\underline{f^{**} = f}$.

c) $U = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

f est convexe sur $U = \mathbb{R}$ et même dérivable. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_y(x) = y - e^x$

1er cas $y \leq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_y(x) \leq 0$. F_y est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

donc définit une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x \to +\infty} F_y(x), \lim_{x \to -\infty} F_y(x)[$.

F_y ne possède pas de maximum sur $U = \mathbb{R}$ donc $y \notin U(f)$.

2ème cas $y > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F'_y(x) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq e^x \Leftrightarrow \ln y \geq x$
$F'_y(x) \leq 0 \Leftrightarrow y \leq e^x \Leftrightarrow \ln y \leq x$

F_y est croissante sur $]-\infty, \ln y]$ et décroissante sur $[\ln y, +\infty[$.

Ainsi F_y possède un maximum sur $\mathbb{R}$ qui vaut $F_y(\ln y)$.

Alors $y \in U(f)$ et $f^*(y) = F_y(\ln y) = (\ln y) y - e^{\ln y} = y \ln y - y$.

Il résulte de ce qui précède que : $U(f) = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $f^*(y) = y \ln y - y$.

Posons $V = U(f) = \mathbb{R}_+^*$. Soit $z \in \mathbb{R}$. Posons $\forall y \in V$, $G_z(y) = yz - f^*(y) = yz - y\ln y + y$

f^* est convexe sur V et même dérivable.

Alors G_z est dérivable sur $V = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall y \in V$, $G'_z(y) = z - \ln y - y\frac{1}{y} + 1 = z - \ln y$.

Soit $y \in V = \mathbb{R}_+^*$. $G'_z(y) \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \ln y \Leftrightarrow y \leq e^z$;
$G'_z(y) \leq 0 \Leftrightarrow z \leq \ln y \Leftrightarrow y \geq e^z$.

Alors G_z est croissante sur $]0, e^z]$ et décroissante sur $[e^z, +\infty[$. Ainsi :

G_z possède un maximum sur $V = \mathbb{R}_+^*$ qui vaut $G_z(e^z)$.

Alors $z \in V(f^*)$ et $(f^*)^*(z) = G_z(e^z) = e^z z - e^z \ln e^z + e^z = e^z$.

Finalement $(f^*)^*$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{R}$, $(f^*)^*(z) = f(z)$.

Pour la troisième fois $f^{**} = f$.

(Q4) Ici : $V=\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{B}^2$ sur $\mathbb{R}$, $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)>0$.

a] f étant de classe $\mathcal{B}^2$ sur $\mathbb{R}$, f' est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
f' est même dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f')'(x)=f''(x)>0$; f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
f' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. f' définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
Or $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ par hypothèse. Alors f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b] Soit $y\in\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_y(x)=xy-f(x)$.
F_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'_y(x)=y-f'(x)$.
Notons que $g=(f')^{-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. $F'_y(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow y\geqslant f'(x) \Leftrightarrow g(y)\geqslant x$;
$F'_y(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow y\leqslant f'(x) \Leftrightarrow g(y)\leqslant x$

F_y est alors croissante sur $]-\infty, g(y)]$ et décroissante sur $[g(y),+\infty[$.
Ainsi F_y admet un maximum en $g(y)$ qui vaut $F_y(g(y))$.

Alors $y\in V(f)$ et $f^*(y)=F_y(g(y))=g(y)\,y-f(g(y))$.

$V(f)=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^*(x)=x\,g(x)-f(g(x))$ où $g=(f')^{-1}$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ainsi $g=(f')^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors $x\mapsto xg(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Finalement f^* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(f^*)'(x)=g(x)+x\,g'(x)-g'(x)\underbrace{f'(g(x))}_{x}=g(x)$. $(f^*)'=g$.

c) Notons que f^* est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $G_y : x \mapsto xy - f^*(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G'_y(x) = y - (f^*)'(x) = y - g(x)$. Rappelons que g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que $g^{-1} = f'$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $G'_y(x) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq g(x) \Leftrightarrow f'(y) \geq x$;

$G'_y(x) \leq 0 \Leftrightarrow y \leq g(x) \Leftrightarrow f'(y) \leq x$.

Alors G_y est croissante sur $]-\infty, y]$ et décroissante sur $[y, +\infty[$.

Ainsi G_y possède un maximum en y qui vaut $G_y(f'(y))$.

Alors f^{**} est définie en y et $f^{**}(y) = G_y(f'(y)) = f'(y)y - f^*(f'(y))$.

$$f^{**}(y) = y f'(y) - [f'(y)\underbrace{g(f'(y))}_{y} - f(\underbrace{g(f'(y))}_{y})] = f(y).$$

Pour la quatrième fois $\underline{\underline{(f^*)^* = f}}$.

__Remarque__. Retrouvons ce résultat en montrant que f^* a les mêmes qualités que f.

- f^* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f^*)'(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- $(f^*)' = g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f^*)'' = g' = ((f')^{-1})' = \dfrac{1}{f'' o (f')^{-1}} = \dfrac{1}{f'' o g}$.

Alors $(f^*)''$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive (g est continue sur $\mathbb{R}$ et f'' est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$).

f^* a donc toutes les qualités de f. Ainsi $(f^*)^*$ est définie sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^*)^*(x) = x\,h(x) - f^*(h(x))$ où h est la réciproque de $(f^*)' = g = (f')^{-1}$.

Alors $h = f'$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^*)^*(x) = x f'(x) - f^*(f'(x)) = \underbrace{x f'(x) - [f'(x)\underbrace{g(f'(x))}_{x} - f(\underbrace{g(f'(x))}_{x})]}_{f(x)}$

En retrouvant alors $(f^*)^* = f$.

PARTIE II

Q1 a) $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}^n$. $F_y(ty) = \langle ty, y\rangle - \|ty\| = t\|y\|^2 - |t|\|y\| = t\|y\|[\|y\|-1]$

Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} F_y(ty) = \begin{cases} +\infty \text{ si } & \|y\|>1 \\ -\infty \text{ si } & 0<\|y\|<1 \\ 0 \text{ si } & \|y\|=0 \text{ ou } 1 \end{cases}$.

Si $\|y\|>1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F_y(ty) = +\infty$ donc F_y ne peut posséder de maximum sur $V=\mathbb{R}^n$.

Si $\|y\|>1$, $y \notin U(f)$. Ainsi $U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| \leq 1$. $\begin{cases}\|x\| \geq 0 \\ \|y\| \leq 1\end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F_y(x) = \langle x, y\rangle - \|x\| \leq |\langle x,y\rangle| - \|x\| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\|\|y\| - \|x\| \leq \|x\| - \|x\| = 0 = F_y(0)$

Ainsi F_y possède un maximum sur $\mathbb{R}^n$ qui vaut 0.

Alors $y \in U(f)$ et $f^*(y) = 0$.

Finalement $U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$ et $\forall y \in U(f), f^*(y) = 0$.

c) Posons $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$. Soit $z \in \mathbb{R}^n$. Posons $\forall y \in V$, $G_z(y) = \langle y, z\rangle - f^*(y)$.

$\forall y \in V$, $G_z(y) = \langle y, z\rangle - 0 = \langle y, z\rangle \leq |\langle y, z\rangle| \leq \|y\|\|z\| \leq \|z\|$.

1er cas : $z \neq 0$.

Notons que $\frac{1}{\|z\|} z$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 donc $\frac{1}{\|z\|} z \in V$.

De plus $G_z(\frac{1}{\|z\|} z) = \langle \frac{1}{\|z\|} z, z\rangle = \frac{1}{\|z\|}\langle z, z\rangle = \frac{\|z\|^2}{\|z\|} = \|z\|$.

donc $\frac{1}{\|z\|} z \in V$ et $\forall y \in V$, $G_z(y) \leq \|z\| = G_z(\frac{1}{\|z\|} z)$.

Alors G_z possède un maximum sur V qui vaut $\|z\|$.

Donc $(f^*)^*$ est définie en z et $(f^*)^*(z) = \|z\|$.

$2^{\text{ème}}$ cas.. $z = 0_{\mathbb{R}^n}$. $\forall y \in V$, $G_z(y) = \langle y, z \rangle = \langle y, 0_{\mathbb{R}^n} \rangle = 0 = G_z(0_{\mathbb{R}^n})$

donc G_z possède un maximum sur V qui vaut 0.

Ainsi $(f^*)^*$ est définie en $z = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $(f^*)^*(z) = 0 = \|z\|$.

Finalement $(f^*)^*$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $(f^*)^*(z) = \|z\| = f(z)$.

Alors $\underline{\underline{(f^*)^* = f}}$.

Q2 a) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (une telle base existe car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique).

Les valeurs propres de A sont strictement positives donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_\ell > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell u_\ell$.

$Ax = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell A u_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \lambda_\ell u_\ell$.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$: $\|x\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2$ et $\langle x, Ax \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \alpha_\ell \lambda_\ell$

$\|x\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2$ et $\langle x, Ax \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 \lambda_\ell$.

$\lambda = \min_{1 \le i \le n} \lambda_i$ et $\mu = \max_{1 \le i \le n} \lambda_i$

$\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \le \lambda_\ell \le \mu$ et $\alpha_\ell^2 \ge 0$

donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \alpha_\ell^2 \le \alpha_\ell^2 \lambda_\ell \le \mu \alpha_\ell^2$.

Ainsi $\lambda \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 \le \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 \lambda_\ell \le \mu \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2$ ou $\lambda \|x\|^2 \le \langle x, Ax \rangle \le \mu \|x\|^2$

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \|x\| \le \langle x, Ax \rangle \le \mu \|x\|}}$ où $\underline{\underline{\lambda = \min_{\lambda' \in \mathrm{Sp} A} \lambda' \text{ et } \mu = \max_{\mu' \in \mathrm{Sp} A} \mu'}}$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$F_y(x+h) = \langle x+h, y \rangle - \dfrac{\langle x+h, A(x+h) \rangle}{2} = \langle x, y \rangle + \langle h, y \rangle - \frac{1}{2} [\langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle +$ $\langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle]$. Notons alors que $\langle x, Ah \rangle = \langle Ax, h \rangle = \langle h, Ax \rangle$.

Alors $F_y(x+h) = \langle x,y\rangle + \langle h,y\rangle - \frac{1}{2}[\langle x,Ax\rangle + 2\langle h,Ax\rangle + \langle h,Ah\rangle]$

$$F_y(x+h) = \underbrace{\langle x,y\rangle - \frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle}_{F_y(x)} + \langle h,y\rangle - \langle h,Ax\rangle - \frac{1}{2}\langle h,Ah\rangle$$

Alors $F_y(x+h) - F_y(x) = \langle h, y-Ax\rangle - \frac{1}{2}\langle h,Ah\rangle$.

$\forall (y,x,h) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ F_y(x+h) - F_y(x) = \langle h,y-Ax\rangle - \frac{1}{2}\langle h,Ah\rangle$.

Soit $(y,x,h) \in (\mathbb{R}^n)^3$. $\langle h,Ah\rangle \geqslant \lambda \|h\|^2 \geqslant 0$
$\lambda > 0$ et $\|h\|^2 \geqslant 0$.

Alors $-\frac{1}{2}\langle h,Ah\rangle \leqslant 0$ donc $F_y(x+h) - F_y(x) \leqslant \langle h, y-Ax\rangle$.

$\forall (y,x,h) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ F_y(x+h) - F_y(x) \leqslant \langle h, y-Ax\rangle$.

c) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. 0 n'est pas valeur propre de A car toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Alors A est inversible. Posons $x = A^{-1}y$. $x \in \mathbb{R}^n$ et $Ax = y$!

$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ F_y(x+h) - F_y(x) \leqslant \langle h, y-Ax\rangle = \langle h, 0_{\mathbb{R}^n}\rangle = 0$.

$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ F_y(x+h) \leqslant F_y(x)$ ou $\forall z \in \mathbb{R}^n,\ F_y(z) \leqslant F_y(x)$.

Alors F_y possède un maximum sur $\mathbb{R}^n$ qui vaut $F_y(x)$.

Donc $y \in U(f)$ et $f^*(y) = F_y(x) = \langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle$.

$f^*(y) = \langle y, A^{-1}y\rangle - \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, AA^{-1}y\rangle = \frac{1}{2}\langle y, A^{-1}y\rangle$.

f^* est définie sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ f^*(y) = \frac{1}{2}\langle y, A^{-1}y\rangle$. $U(f) = \mathbb{R}^n$.

Si nous montrons que A^{-1} est symétrique à valeurs propres strictement positives nous pouvons dire que $(f^*)^*$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ et que

$\forall z \in \mathbb{R}^n,\ (f^*)^*(z) = \frac{1}{2}\langle z, (A^{-1})^{-1}z\rangle = \frac{1}{2}\langle z, Az\rangle = f(z)$; nous aurons alors $(f^*)^* = f$.

${}^tA^{-1} = ({}^tA)^{-1} = A^{-1}$ donc A^{-1} est symétrique.

Soit γ une valeur propre de A^{-1}. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $A^{-1}x = \gamma x$.

Alors $x = \gamma A x$ donc $Ax = \frac{1}{\gamma} x$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; $\frac{1}{\gamma}$ est une valeur propre de A.

$\gamma \neq 0$ car $\gamma = 0 \Rightarrow x = \gamma A x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

ou $\Rightarrow A^{-1}$ non inversible !

Alors $\frac{1}{\gamma} > 0$ donc $\gamma > 0$

A^{-1} est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

D'après ce que nous avons dit plus haut on peut affirmer que $(f^*)^* = f$.

Q3 a). Soit $y \in \mathbb{R}^n$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F_y(x) = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, Ax\rangle}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F_y(x) \leq |\langle x, y\rangle| - \frac{1}{2}\lambda \|x\|^2 \leq \|x\|\,\|y\| - \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 = \|x\| \left[\|y\| - \frac{\lambda}{2}\|x\|\right]$

$\lim_{\|x\| \to +\infty} \|x\| = +\infty$ et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \left[\|y\| - \frac{\lambda}{2}\|x\|\right] \underset{\lambda > 0}{=} -\infty$.

Alors $\lim_{\|x\| \to +\infty} \left(\|x\|\left[\|y\| - \frac{\lambda}{2}\|x\|\right]\right) = -\infty$ donc $\lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty$.

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty$.

Soit $x_0 \in U$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. $\lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty$ alors

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > A \Rightarrow F_y(x) < -A$.

Posons $A = \max(1, -F_y(x_0))$. $A \geq 1$ et $A \geq -F_y(x_0)$. En particulier $A \in \mathbb{R}_+^*$ (...c'est l'objet du 1).

$\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < -\max(1, -F_y(x_0)) \leq F_y(x_0)$.

$\forall x_0 \in U$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0)$.

- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon r c'est donc un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Alors $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est un fermé comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^n$.

De plus, $\forall x \in U_0$, $\|x\| \leq r$. Ainsi U_0 est borné.

Uo est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

Soit y un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrons que F_y possède un maximum sur U.
Fixons un élément x_0 dans U.
$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0)$.

Posons $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$. U_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Observons que $x_0 \in U_0$ car $x_0 \in U$ et $\|x_0\| \leq r$ ($\|x_0\| > r \Rightarrow F_y(x_0) < F_y(x_0)$!!).

Alors U_0 est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$.

Notons que F_y est continue sur $\mathbb{R}^n$ car F_y est une fonction polynômiale (OK ?).

F_y est donc continue sur U_0 qui est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$.

Alors F_y possède un maximum sur U_0. $\exists a \in U_0, \forall x \in U_0, F_y(x) \leq F_y(a)$.

Observons que $a \in U$. Montrons alors que $\forall x \in U, F_y(x) \leq F_y(a)$.

Soit $x \in U$. Si $x \in U_0$ alors $F_y(x) \leq F_y(a)$. Supposons que $x \notin U_0$.

Comme $x \in U$ alors $\|x\| > r$. Ainsi $F_y(x) \leq F_y(x_0) \underset{x_0 \in U}{\leq} F_y(a)$.

Par conséquent $\forall x \in U, F_y(x) \leq F_y(a)$ et $a \in U$.

Ainsi F_y possède un maximum sur U et ceci pour tout y dans $\mathbb{R}^n$. Donc $U(f) = \mathbb{R}^n$.

b) • $(x, x') \in U^2$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) = \left\langle \frac{x+x'}{2}, y \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{x+x'}{2}, A\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\langle x, y\rangle + \frac{1}{2}\langle x', y\rangle - \frac{1}{8}\langle x, Ax\rangle - \frac{1}{8}\langle x, Ax'\rangle$$

$$- \frac{1}{8}\langle x', Ax\rangle - \frac{1}{8}\langle x', Ax'\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle\right] + \frac{1}{2}\left[\langle x', y\rangle - \frac{1}{2}\langle x', Ax'\rangle\right] + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\langle x, Ax\rangle$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\langle x', Ax'\rangle - \frac{1}{8}\langle x, Ax'\rangle - \frac{1}{8}\langle x', Ax\rangle.$$

Alors $F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{1}{2}F_y(x) - \frac{1}{2}F_y(x') = \frac{1}{8}\left[\langle x, Ax\rangle + \langle x', Ax'\rangle - \langle x, Ax'\rangle - \langle x', Ax\rangle\right]$.

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{1}{2}F_y(x) - \frac{1}{2}F_y(x') = \frac{1}{8}\langle x - x', Ax - Ax'\rangle.$$

Finalement $\forall x \in U, \forall x' \in U, \forall y \in \mathbb{R}, F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{1}{8}\langle x - x', A(x - x')\rangle$.

• Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts de U qui réalisent le maximum $f(y)$ de F_y sur U.

$$\frac{\langle \bar{x}-\bar{x}', A(\bar{x}-\bar{x}')\rangle}{8} \geqslant \lambda \|\bar{x}-\bar{x}'\| > 0 \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } \bar{x}-\bar{x}' \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Alors $F_y\left(\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right) - \frac{F_y(\bar{x})}{2} - \frac{F_y(\bar{x}')}{2} > 0$

donc $F_y\left(\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right) > \frac{F_y(\bar{x})}{2} + \frac{F_y(\bar{x}')}{2} = \frac{1}{2} f(y^*) + \frac{1}{2} f(y^*) = f(y^*)$.

$f(y^*) < F_y\left(\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right)$.

Or $\bar{x} \in U$, $\bar{x}' \in U$ et U est convexe donc $\frac{1}{2}\bar{x} + (1-\frac{1}{2})\bar{x}' \in U$.

Ainsi $\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2} \in U$. Alors $\max_{x \in U} F_y(x) = f(y^*) \geqslant F_y\left(\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right)$.

donc $f(y^*) < F_y\left(\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right) \leqslant f(y^*)$. Alors $f(y^*) < f(y^*)$!

Si $y \in \mathbb{R}^n$, $\exists! \bar{x} \in U$, $f(y^*) = \max_{x \in U} F_y(x) = F_y(\bar{x})$.

PARTIE III

Q1 a) $\forall (x,x') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x, Bx'\rangle = {}^t x (Bx') = {}^t x\, {}^t({}^t B)\, x' = {}^t({}^t B x) x' = \langle {}^t B x, x'\rangle$.

$\forall (x,x') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x, Bx'\rangle = \langle {}^t B x, x'\rangle$.

Soit $y \in \operatorname{Im} {}^t B$. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $y = {}^t B x$.

$\forall z \in \operatorname{Ker} B$, $\langle y, z\rangle = \langle {}^t B x, z\rangle = \langle x, Bz\rangle = \langle x, 0_{\mathbb{R}^n}\rangle = 0$.

$\forall z \in \operatorname{Ker} B$, $\langle y, z\rangle = 0$. $y \in (\operatorname{Ker} B)^\perp$.

Ainsi $\operatorname{Im} {}^t B \subset (\operatorname{Ker} B)^\perp$.

$\dim \operatorname{Im} {}^tB = \operatorname{rg} {}^tB = \operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Im} B = n - \dim \operatorname{Ker} B = \dim (\operatorname{Ker} B)^\perp$

$\underline{\dim \operatorname{Im} {}^tB = \dim (\operatorname{Ker} B)^\perp}$

$\operatorname{Im} {}^tB \subset (\operatorname{Ker} B)^\perp$ et $\dim \operatorname{Im} {}^tB = \dim (\operatorname{Ker} B)^\perp < +\infty$ donc $\underline{\operatorname{Im} {}^tB = (\operatorname{Ker} B)^\perp}$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. $\bar{x}$ est l'unique élément de U tel que $F_y(\bar{x}) = \max_{x \in U} F_y(x)$.
Soit $h \in \operatorname{Ker} B$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = \langle \bar{x}+th, y\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{x}+th, A(\bar{x}+th)\rangle - \langle \bar{x}, y\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{x}, A\bar{x}\rangle$.

$F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = \langle \bar{x}, y\rangle + t\langle h, y\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{x}, A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}t\langle \bar{x}, \quad - \frac{1}{2}t\langle h, A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle$
$- \langle \bar{x}, y\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{x}, A\bar{x}\rangle$.

$F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = t\langle h, y\rangle - \frac{1}{2}t\langle \bar{x}, Ah\rangle - \frac{1}{2}t\langle h, A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle$.

Or $\langle \bar{x}, Ah\rangle = \langle A\bar{x}, h\rangle = \langle h, A\bar{x}\rangle$.

Ainsi $F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = t\langle h, y\rangle - t\langle h, A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle$.

$F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = t\langle h, y - A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle h, Ah\rangle$.

$\underline{\forall h \in \operatorname{Ker} B, \forall t \in \mathbb{R}, F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) = t\langle y - A\bar{x}, h\rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah\rangle}{2}}$.

$\bar{x} \in U$ donc $B\bar{x} = c$.

Soit $h \in \operatorname{Ker} B$. $\forall t \in \mathbb{R}, th \in \operatorname{Ker} B$. $\forall t \in \mathbb{R}, B(\bar{x}+th) = B\bar{x} + tBh = B\bar{x} = c$.
$\forall t \in \mathbb{R}, \bar{x}+th \in U$. Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, F_y(\bar{x}+th) - F_y(\bar{x}) \leq 0$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, t\langle y - A\bar{x}, h\rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah\rangle}{2} \leq 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \langle y - A\bar{x}, h\rangle - t\frac{\langle h, Ah\rangle}{2} \leq 0$ (1)

et $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$ $\langle y - A\bar{x}, h\rangle - t\frac{\langle h, Ah\rangle}{2} \geq 0$ (2)

En faisant tendre t vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans (1) (resp. (2)) il vient $\langle y - A\bar{x}, h\rangle \leq 0$ (resp. $\langle y - A\bar{x}, h\rangle \geq 0$).

Alors $\langle y-A\bar{x},\ell\rangle \leq 0$ et $\langle y-A\bar{x},\ell\rangle \geq 0$; donc $\langle y-A\bar{x},\ell\rangle = 0$.

$\forall \ell \in \operatorname{Ker} B$, $\langle y-A\bar{x},\ell\rangle = 0$; $y-A\bar{x} \in (\operatorname{Ker} B)^{\perp} = \operatorname{Im}{}^tB$.

$\exists \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $y-A\bar{x} = {}^tB\bar{z}$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Si $\bar{x}$ est l'élément de U réalisant le maximum de F_y alors $\begin{cases} B\bar{x} = c \\ \exists \bar{z} \in \mathbb{R}^n,\ y-A\bar{x} = {}^tB\bar{z} \end{cases}$.

Montrons la réciproque. Soit $y \in \mathbb{R}^n$.
Soit $\bar{x}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\begin{cases} B\bar{x} = c \\ \exists \bar{z} \in \mathbb{R}^n,\ y-A\bar{x} = {}^tB\bar{z} \end{cases}$

$\bar{x} \in U$ car $B\bar{x} = c$. Montrons alors que $\forall x \in U$, $F_y(x) \leq F_y(\bar{x})$.

Soit $x \in U$. $Bx = c = B\bar{x}$; $B(x-\bar{x}) = 0$; $x-\bar{x} \in \operatorname{Ker} B$.
Posons $h = x-\bar{x}$. $x = \bar{x}+h$ et $h \in \operatorname{Ker} B$.

$F_y(x) = F_y(\bar{x}+h) = \langle \bar{x}+h, y\rangle - \frac{1}{2}\langle A(\bar{x}+h), \bar{x}+h\rangle$.

$F_y(x) = F_y(\bar{x}+h) = \langle \bar{x},y\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x},\bar{x}\rangle + \langle h,y\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x},h\rangle - \frac{1}{2}\langle Ah,\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle$.

$F_y(x) = F_y(\bar{x}) + \langle h,y\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x},h\rangle - \frac{1}{2}\langle h,A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle$.

$F_y(x) = F_y(\bar{x}) + \langle h, y-A\bar{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle$.

Or $y-A\bar{x} = {}^tB\bar{z}$ donc $y-A\bar{x} \in \operatorname{Im}{}^tB = (\operatorname{Ker} B)^{\perp}$. Ainsi $\langle h, y-A\bar{x}\rangle = 0$.

Alors $F_y(x) - F_y(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle \leq -\frac{1}{2}\lambda \|h\|^2 \leq 0$.

$\bar{x} \in U$ et $\forall x \in U$, $F_y(x) \leq F_y(\bar{x})$. $\bar{x}$ réalise le maximum de F_y sur U.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. $\begin{cases} \bar{x} \in U \\ \text{et} \\ F_y(\bar{x}) = \max\limits_{x\in U} F_y(x) \end{cases} \iff \begin{cases} B\bar{x} = c \\ \exists \bar{z} \in \mathbb{R}^n,\ y-A\bar{x} = {}^tB\bar{z} \end{cases}$

Q2 a) Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que les égalités $\forall p \in \mathbb{N}, Ax_p - y + {}^tBz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$ définissent entièrement les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Rappelons que A est inversible.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}, Ax_p - y + Bz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c) \Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N}, x_p = A^{-1}(y - Bz_p)$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$

Montrons alors que les égalités $\forall p \in \mathbb{N}, x_p = A^{-1}(y - Bz_p)$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$ définissent entièrement les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Montrons par récurrence que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, z_p et x_p sont définis.

→ z_0 est défini. Ainsi $A^{-1}(y - Bz_0)$ est défini donc x_0 est défini.

→ Supposons z_p et x_p définis pour p dans $\mathbb{N}$. Montrons alors que z_{p+1} et x_{p+1} sont définis.

$z_p + r(Bx_p - c)$ est défini donc z_{p+1} est défini.

$A^{-1}(y - Bz_{p+1})$ est alors défini donc x_{p+1} est défini. Ainsi s'achève la récurrence.

Les suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

Rappelons que $B\bar{x} = c$ et $y - A\bar{x} = {}^tB\bar{z}$.

$\forall p \in \mathbb{N}, A(x_p - \bar{x}) = Ax_p - A\bar{x} = y - {}^tBz_p - y + {}^tB\bar{z} = {}^tB(\bar{z} - z_p)$.

$\forall p \in \mathbb{N}, z_{p+1} - \bar{z} = z_p + r(Bx_p - c) - \bar{z} = z_p - \bar{z} + r(Bx_p - B\bar{x}) = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$.

$\forall p \in \mathbb{N}, A(x_p - \bar{x}) = {}^tB(\bar{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$.

$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 + 2\langle z_p - \bar{z}, rB(x_p - \bar{x})\rangle + \|rB(x_p - \bar{x})\|^2$

$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 + 2r\langle {}^tB(z_p - \bar{z}), x_p - \bar{x}\rangle + r^2\|B(x_p - \bar{x})\|^2$

Or ${}^tB(z_p - \bar{z}) = -{}^tB(\bar{z} - z_p) = -A(x_p - \bar{x})$.

Donc $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 + 2r\langle -A(x_p - \bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle + r^2\|B(x_p - \bar{x})\|^2$. Finalement :

$\forall p \in \mathbb{N}, \|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 - 2r\langle A(x_p - \bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle + r^2\|B(x_p - \bar{x})\|^2$.

c) • A est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$.

$D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ (c'est à dire $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & d_2 & \\ (0) & & \ddots \; d_n \end{pmatrix}$)

Le spectre de D est $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ et c'est également celui de A car les deux matrices sont semblables. Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_k > 0$.

Posons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$. $\Delta^2 = D$.

Posons $A^{1/2} = P\Delta P^{-1} = P\Delta\,{}^tP$.

$\underline{A^{1/2} \in M_n(\mathbb{R})}$. $(A^{1/2})^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$; $\underline{(A^{1/2})^2 = A}$.

${}^tA^{1/2} = {}^t(P\Delta\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = A^{1/2}$; $\underline{A^{1/2} \text{ est symétrique}}$.

$A^{1/2}$ est semblable à $\mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$; ainsi le spectre de $A^{1/2}$ est celui de Δ donc est $\{\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}\}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sqrt{d_i} > 0$ donc <u>les valeurs propres de $A^{1/2}$ sont strictement positives</u>.

<u>Il existe une matrice $A^{1/2}$ de $M_n(\mathbb{R})$, symétrique, à valeurs propres strictement positives et qui vérifie $(A^{1/2})^2 = A$.</u>

<u>Remarque</u> : On peut démontrer sans trop de difficultés que $A^{1/2}$ est unique.

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\|BA^{-1/2}x\|^2 = {}^t(BA^{-1/2}x)\,BA^{-1/2}x = {}^tx\,{}^tA^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x$

$$\|BA^{-1/2}x\|^2 = {}^tx\,({}^tA^{1/2})^{-1}\,{}^tBBA^{-1/2}x \underset{{}^tA^{1/2} = A^{1/2}}{\uparrow=} {}^tx\,A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x \rangle.$$

<u>$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x \rangle$.</u>

• ${}^t(A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}) = {}^t(A^{-1/2})\,{}^tB\,{}^t({}^tB)\,{}^t(A^{-1/2}) = A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$.

$\uparrow$ $A^{-1/2}$ est symétrique (${}^t(A^{-1/2}) = ({}^tA^{1/2})^{-1} = (A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$)

<u>${}^t(A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}) = A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ donc $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique.</u>

Pour faciliter les écritures posons $H = BA^{-1/2}$ et $L = A^{-1/2}\,{}^tB\,B\,A^{-1/2}$.

Montrons que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

Soit γ une valeur propre de L. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Lx = \gamma x$.

$\gamma \|x\|^2 = \gamma \langle x, x \rangle = \langle x, \gamma x \rangle = \langle x, Lx \rangle = \|BA^{-1/2}x\|^2 = \|Hx\|^2$.

Alors $\gamma = \dfrac{\|Hx\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.

Supposons que 0 soit la seule valeur propre de L.

Comme L est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$, L est diagonalisable.

Alors le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Lx = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Hx\|^2 = \langle x, Lx \rangle = \langle x, 0_{\mathbb{R}^n} \rangle = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Hx = 0_{\mathbb{R}^n}$; par conséquent : $H = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors $B = BA^{-1/2}A^{1/2} = HA^{1/2} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Ceci est contraire aux hypothèses du texte.

Il existe donc au moins une valeur propre de L qui est strictement positive.

<u>Ainsi la plus grande valeur propre α de $A^{-1/2}\,{}^tB\,B\,A^{-1/2}$ est strictement positive.</u>

- L est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ dont la plus grande des valeurs propres est α.

  En procédant comme dans II 2) a) on montre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, Lx \rangle \leqslant \alpha \|x\|^2$

  Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Hx\|^2 \leqslant \alpha \|x\|^2$.

  $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|BA^{-1/2}x\|^2 \leqslant \alpha \|x\|^2$ $\qquad$ $A^{1/2}$ est symétrique

  on remplace x par $A^{1/2}x$

  $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|BA^{-1/2}A^{1/2}x\|^2 \leqslant \alpha \|A^{1/2}x\|^2 = \alpha \langle A^{1/2}x, A^{1/2}x \rangle = \alpha \langle x, A^{1/2}A^{1/2}x \rangle$

  <u>Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Bx\|^2 \leqslant \alpha \langle x, Ax \rangle$.</u>

<u>d)</u> Soit $r \in \left]0, \frac{2}{\alpha}\right[$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\|\mathfrak{z}_{p+1} - \bar{\mathfrak{z}}\|^2 - \|\mathfrak{z}_p - \bar{\mathfrak{z}}\|^2 = -2r\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2 \|B(x_p - \bar{x})\|^2$.

$\|\mathfrak{z}_{p+1} - \bar{\mathfrak{z}}\|^2 - \|\mathfrak{z}_p - \bar{\mathfrak{z}}\|^2 \leqslant -2r\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2\alpha \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle$.

Donc $\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p - \bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle$

Or $r>0$, $r\alpha - 2 < 0$ et $\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x})\rangle \geqslant \lambda \|x_p - \bar{x}\|^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\|z_{p+1}-\bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p - \bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \leqslant 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

La suite $(\|z_p - \bar{z}\|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $r(r\alpha-2) \leqslant 0$ et $\langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x})\rangle \geqslant \lambda \|x_p - \bar{x}\|^2$.

Alors $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha-2)\langle x_p - \bar{x}, A(x_p-\bar{x})\rangle \leqslant r(r\alpha-2)\lambda\|x_p - \bar{x}\|^2 \leqslant 0$

Comme $(\|z_p - \bar{z}\|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ converge : $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2\right) = 0$.

Alors, par encadrement il vient $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(r(r\alpha-2)\lambda\|x_p - \bar{x}\|^2\right) = 0$.

Or $r(r\alpha-2)\lambda \neq 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\|x_p - \bar{x}\|^2\right) = 0$.

Par conséquent $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x_p - \bar{x}\| = 0$. Ainsi $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

Exercice : Montrer que $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = c\}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}$.