R.

ESSEC M II 2005 S

L'énoncé original contient un certain nombre d'erreurs que nous signalerons.

Préliminaires

Q1 L'énoncé du programme... On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes (ou 2 à 2 indépendantes...) ayant une espérance commune m et une variance commune σ^2.

Alors la suite $\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers m, c'est à dire $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Q2 Ici nous supposerons δ? que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses du résultat précédent et A est un borélien de $\mathbb{R}$.

$]m-\delta, m+\delta[\subset \bar{A}$ donc $A \subset]-\infty, m-\delta] \cup [m+\delta, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors l'événement $\{\frac{S_n}{n} \in A\}$ est contenu dans l'événement $\{\frac{S_n}{n} \in]-\infty, m-\delta] \cup [m+\delta, +\infty[\}$

Ainsi $0 \leq P(\frac{S_n}{n} \in A) \leq P(\frac{S_n}{n} \in]-\infty, m-\delta] \cup [m+\delta, +\infty[) = P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \delta)$ car P est croissante.

D'après Q1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \delta) = 0$. Par encadrement on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\frac{S_n}{n} \in A) = 0$.

Partie I : Un premier exemple. Le cas gaussien.

Q1 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ S_n suit une loi normale.
C'est clair pour $n=1$ car $S_1 = X_1$.
Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Par hypothèse $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi normale ; X_{n+1} également. $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ étant indépendantes S_n et X_{n+1} le sont aussi.
Le cours nous permet alors de dire que $S_n + X_{n+1}$ suit une loi normale.
Ainsi S_{n+1} suit une loi normale et la récurrence s'achève.
Le cours dit que si Z est une variable aléatoire qui suit une loi normale et si $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $aZ+b$ suit une loi normale.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S_n suit une loi normale donc $\frac{1}{n} S_n$ suit une loi normale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n}{n}$ suit une loi normale.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$ $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$.

Par indépendance : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n}{n}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$\frac{S_n}{n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ (programme HEC 2005)

Q2 ⚠ dans la suite je pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$!

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \frac{1}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{(t-0)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}}$.

Alors f_n est une densité de $\frac{S_n}{n}$. Notons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{nt^2}{2}}$.

$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = P\left(\left\{\frac{S_n}{n} \geq \delta\right\} \cup \left\{\frac{S_n}{n} \leq -\delta\right\}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \leq -\delta\right)$ car les deux événements sont disjoints.

Alors $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = \int_{-\infty}^{-\delta} f_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 2\int_{\delta}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 2\,P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right)$ car f_n est paire. Ainsi $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = 2\,P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) = 2\int_{\delta}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt$

$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = 2\,P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) = 2\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\geqslant\delta\right)=2P\left(\frac{S_n}{n}\geqslant\delta\right)=\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\int_\delta^{+\infty}e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt.$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\delta^x e^{-\frac{nt^2}{2}}dt = \int_0^{n(x-\delta)} e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{u}{n}+\delta\right)^2}\frac{1}{n}\,du=\frac{1}{n}\int_0^{n(x-\delta)}e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{u^2}{n^2}+\frac{2u\delta}{n}+\delta^2\right)}du.$$

$u=n(t-\delta)$ ou $t=\frac{u}{n}+\delta$ et $t\mapsto n(t-\delta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_\delta^x e^{-\frac{nt^2}{2}}dt=\frac{1}{n}e^{-\frac{n\delta^2}{2}}\int_0^{n(x-\delta)}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}du.$$

$\int_\delta^{+\infty}e^{-\frac{nt^2}{2}}dt$ converge et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(n(x-\delta))=+\infty$. Ainsi $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}du$ converge et

$$\int_\delta^{+\infty}e^{-\frac{nt^2}{2}}dt=\frac{1}{n}e^{-\frac{n\delta^2}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}du.$$

Notons également que $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2n}{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$. Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\geqslant\delta\right)=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,e^{-\frac{n\delta^2}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}du.$$

Q3 a) $x\mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y=e^0(x-0)+e^0=x+1$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ x+1\leqslant e^x$. Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ -x+1\leqslant e^{-x}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ 1-e^{-x}\leqslant x$. $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ e^{-x}\leqslant 1$; $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant 1-e^{-x}$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 0\leqslant 1-e^{-x}\leqslant x$.

b) Posons $\forall u\in\mathbb{R},\ g(u)=\begin{cases}\delta e^{-u\delta} & \text{si } u\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

g est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre δ. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)du$ existe et vaut 1.

Alors $\int_0^{+\infty} g(u)\,du$ existe et vaut 1. $\int_0^{+\infty} \delta e^{-u\delta}\,du$ existe et vaut 1.

Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-u\delta}\,du$ existe et vaut $\frac{1}{\delta}$.

<u>Remarque</u>.. On peut également obtenir ce résultat à 1 ligne par simple intégration mais l'introduction de g est utile pour la suite ...

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0, +\infty[$.

$\frac{u^2}{2n} \in [0, +\infty[$ donc $0 \leq 1 - e^{-\frac{u^2}{2n}} \leq \frac{u^2}{2n}$. Or $e^{-u\delta} \geq 0$, ainsi :

$0 \leq e^{-u\delta}\left(1 - e^{-\frac{u^2}{2n}}\right) \leq \frac{1}{2n} u^2 e^{-u\delta}$.

$\forall u \in [0, +\infty[, \; 0 \leq e^{-u\delta} - e^{-\frac{u^2}{2n} - u\delta} \leq \frac{1}{2n} u^2 e^{-u\delta}$ (*)

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre δ.
$E(Z)$ existe et vaut $\frac{1}{\delta}$; $V(Z)$ existe et vaut $\frac{1}{\delta^2}$. g est une densité de Z.
Alors $E(Z^2)$ existe. Le théorème de transfert donne la convergence de $\int_0^{+\infty} u^2 g(u)\,du$ (le mode c'est l'inverse !). Notons que $E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = \frac{2}{\delta^2}$.

Donc $\int_0^{+\infty} u^2 \delta e^{-u\delta}\,du$ converge ; il en est de même de $\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u\delta}\,du$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-u\delta}\,du$, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n} - u\delta}\,du$ et $\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u\delta}\,du$ sont trois intégrales convergentes.

(*) donne alors $0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-u\delta}\,du - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n} - u\delta}\,du \leq \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u\delta}\,du$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u\delta}\,du \right) = 0$. Le théorème d'encadrement donne alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u\delta}\,du - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n} - u\delta}\,du \right) = 0 .$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u\delta}\,du = \frac{1}{\delta} \neq 0$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\delta}$.

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-n\frac{\delta^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}-u\delta}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-n\frac{\delta^2}{2}}\,\frac{1}{\delta}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-n\frac{\delta^2}{2}}.$$

Remarquons.. rappelons que $E\left(\frac{S_n}{n}\right)=0$ et $V\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

Alors Bienaymé-Tchebychev fournit :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|\geq\delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2}\times\frac{1}{n}$. L'équivalent obtenu souligne la grande médiocrité de cette majoration.

PARTIE II Quelques résultats généraux

(Q1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $s\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(s)=E(e^{sX})$ existe.

$\left(e^{\frac{s}{n}X}\right)^n = e^{sX}$ et $E(e^{sX})$ existe ainsi $e^{\frac{s}{n}X}$ possède un moment d'ordre n donc un moment d'ordre 1. Ainsi $\varphi\left(\frac{s}{n}\right)=E\left(e^{\frac{s}{n}X}\right)$ existe.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $e^{\frac{s}{n}X_1}, e^{\frac{s}{n}X_2}, \dots, e^{\frac{s}{n}X_n}$ le sont également et possèdent une espérance. Alors $e^{\frac{s}{n}X_1}\times e^{\frac{s}{n}X_2}\times\dots\times e^{\frac{s}{n}X_n}$ possède une espérance qui vaut $E(e^{\frac{s}{n}X_1})\,E(e^{\frac{s}{n}X_2})\dots E(e^{\frac{s}{n}X_n})$ ou $\left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$.

Alors $e^{\frac{s}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)}$ possède une espérance qui vaut $\left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$.

Finalement $e^{s\frac{S_n}{n}}$ possède une espérance qui vaut $\left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$.

(Q2) a) Soit $\omega \in \Omega$.

<u>1er cas</u> $Y(\omega) \geqslant a$. Alors $s(Y(\omega)-a) \overset{s>0}{\geqslant} 0$. $e^{s(Y(\omega)-a)} \geqslant 1 = \mathbb{1}_{\{Y \geqslant a\}}(\omega)$.

<u>2ème cas</u> $Y(\omega) < a$ alors $e^{s(Y(\omega)-a)} \geqslant 0 = \mathbb{1}_{\{Y \geqslant a\}}(\omega)$.

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{\{Y \geqslant a\}}(\omega) \leqslant e^{s(Y(\omega)-a)}$.

Alors $\mathbb{1}_{\{Y \geqslant a\}} \leqslant e^{s(Y-a)}$.

b) $\mathbb{1}_{\{Y \geqslant a\}}$ possède une espérance qui vaut $P(Y \geqslant a)$.

$e^{s(Y-a)} = e^{-as} e^{sY}$ et $E(e^{sY})$ existe, alors $E(e^{s(Y-a)})$ existe et vaut $e^{-as} E(e^{sY})$.

La croissance de l'espérance donne alors $P(Y \geqslant a) \leqslant e^{-as} E(e^{sY})$.

<u>Remarque</u>.. On peut obtenir ce résultat plus rapidement en remarquant que $P(Y \geqslant a) \underset{s>0}{=} P(e^{sY} \geqslant e^{as})$ et en utilisant l'inégalité de Markov.

c) On suppose pour toute ici que $s > 0$ et que $\varphi(s)$ existe.

Alors $E(e^{s\frac{S_n}{n}})$ existe et vaut $(\varphi(s/n))^n$.

En appliquant b) à $\frac{S_n}{n}$ il vient : $P(\frac{S_n}{n} \geqslant a) \leqslant e^{-as}(\varphi(s/n))^n$.

Si $s \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\varphi(s) = E(e^{sX})$ existe : $P(\frac{S_n}{n} \geqslant a) \leqslant e^{-as}(\varphi(s/n))^n$.

(Q3) a) Soit $\omega \in \Omega$.

<u>1er cas</u>.. $Y(\omega) \leqslant a$. $s(Y(\omega)-a) \overset{s<0}{\geqslant} 0$. $e^{s(Y(\omega)-a)} \geqslant 1 = \mathbb{1}_{\{Y \leqslant a\}}(\omega)$.

<u>2e cas</u>.. $Y(\omega) > a$. $e^{s(Y(\omega)-a)} \geqslant 0 = \mathbb{1}_{\{Y \leqslant a\}}(\omega)$.

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{\{Y \leqslant a\}}(\omega) \leqslant e^{s(Y(\omega)-a)}$. $\mathbb{1}_{\{Y \leqslant a\}} \leqslant e^{s(Y-a)}$.

b) $e^{s(Y-a)} = e^{-as} e^{sY}$ possède une espérance qui vaut $e^{-as} E(e^{sY})$ car $E(e^{sY})$ existe.

$\mathbb{1}_{\{Y \leq a\}}$ possède une espérance qui vaut $P(Y \leq a)$.

la croissance de l'espérance donne alors $\underline{\underline{P(Y \leq a) \leq e^{-as} E(e^{sY})}}$.

En supposant que $\varphi(s)$ existe et en appliquant cette inégalité à $\frac{S_n}{n}$ on obtient : $P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{-as} E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = e^{-as}(\varphi(s/n))^n$.

donc si $s < 0$ et si $\varphi(s) = E(e^{sX})$ existe alors : $P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{-as}(\varphi(s/n))^n$.

Partie III : Un second exemple. Le cas binomiale.

Q1) Soit $s \in \mathbb{R}$. $e^{sX_1}(\Omega) = \{1, e^s\}$. e^{sX_1} est une variable discrète finie donc e^{sX_1} possède une espérance. $E(e^{sX_1}) = 1 \times P(X_1 = 0) + e^{s \times 1} P(X_1 = 1)$ d'après le théorème de transfert ! $E(e^{sX_1}) = 1 - p + pe^s = q + pe^s$.

Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall s \in \mathbb{R},\ \varphi(s) = 1 - p + pe^s = q + pe^s}}$.

En fait ici il n'y a pas de pb de X donc pas de pb de φ !!

Q2) $\underline{\underline{\text{Ici } a \in]p, 1[. \text{ et } n \in \mathbb{N}^*}}$.

a) $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\ell_a(s) = as - \ln \varphi(s) = as - \ln(q + pe^s)$.

ℓ_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\ell'_a(s) = a - \frac{pe^s}{q + pe^s}$.

$\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\ell'_a(s) = \frac{1}{q + pe^s}[p(a-1)e^s + aq] = \frac{p(1-a)}{q + pe^s}\left[\frac{aq}{p(1-a)} - e^s\right]$.

$\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\ell'_a(s) > 0 \iff \frac{aq}{p(1-a)} > e^s \iff s < \ln \frac{aq}{p(1-a)}$ $\left(\frac{aq}{p(1-a)} > 0\right)$.

$\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\ell'_a(s) < 0 \iff s > \ln \frac{aq}{p(1-a)}$.

$\frac{aq}{p(1-a)} - 1 = \frac{1}{p(1-a)}[aq - p + ap] = \frac{a-p}{p(1-a)} > 0$, $\frac{aq}{p(1-a)} > 1$.

Ainsi $\ln\left(\frac{aq}{p(1-a)}\right) > 0$.

Finalement ℓ_a est strictement croissante sur $\left[0, \ln \frac{aq}{p(1-a)}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\ln \frac{aq}{p(1-a)}, +\infty\right[$.

b) Il résulte de ce qui précède que ℓ_a possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$ atteint en le seul point $\ln \frac{aq}{p(1-a)}$.

Observons que $\ell_a(0) = 0$ et que ℓ_a est strictement croissante sur $\left[0, \ln \frac{aq}{p(1-a)}\right]$.

Ainsi ℓ_a possède un maximum strictement positif sur $\mathbb{R}_+$ qui vaut $\ell_a\left(\ln \frac{aq}{p(1-a)}\right)$.

$$\ell_a\left(\ln \frac{aq}{p(1-a)}\right) = a \ln \frac{aq}{p(1-a)} - \ln\left(q + p\, e^{\ln \frac{aq}{p(1-a)}}\right)$$

$$\ell_a\left(\ln \frac{aq}{p(1-a)}\right) = a \ln \frac{aq}{p(1-a)} - \ln\left(q + p \frac{aq}{p(1-a)}\right) = a \ln \frac{aq}{p(1-a)} - \ln \frac{q}{1-a}.$$

Le maximum de ℓ_a sur $\mathbb{R}_+$ est $h(a,p) = a \ln \frac{aq}{p(1-a)} - \ln \frac{q}{1-a} = a \ln \frac{a(1-p)}{p(1-a)} - \ln \frac{1-p}{1-a}$.

c) $\forall s \in \mathbb{R}_+^*$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as}\left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = e^{-\left[as - n \ln \varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right]}$

$\forall s \in \mathbb{R}_+^*$, $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\left[a\frac{s}{n} - \ln \varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right]} = e^{-n\,\ell_a\left(\frac{s}{n}\right)}$.

Posons alors $s = n \ln \frac{aq}{p(1-a)}$; $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell_a\left(\frac{s}{n}\right) = \ell_a\left(\ln \frac{aq}{p(1-a)}\right)$.

Donc $\ell_a\left(\frac{s}{n}\right) = \max_{t \in \mathbb{R}_+} \ell_a(t) = \max_{t \in \mathbb{R}_+}\left(at - \ln(\varphi(t))\right) = h(a,p)$.

Ainsi $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\,\ell_a\left(\frac{s}{n}\right)} = e^{-n \max_{t \in \mathbb{R}_+}(at - \ln \varphi(t))} = e^{-n\,h(a,p)}$.

Ainsi $P(\frac{S_n}{n} \geqslant a) \leqslant e^{-n \max_{t\in\mathbb{R}_+}(at - \ln(\varphi(t)))} = e^{-n \sup_{t\in\mathbb{R}_+}(at-\ln(\varphi(t)))} = e^{-nh(a,p)}$.

(Q3) Ici $a \in]0,p[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et sont indépendantes.

Alors $1-X_1, 1-X_2, \dots, 1-X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$ et sont indépendantes.

Alors $\sum_{\ell=1}^{n}(1-X_\ell)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

Donc $n - S_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

b) $P(\frac{S_n}{n} \leqslant a) = P(1 - \frac{S_n}{n} \geqslant 1-a) = P(\frac{n-S_n}{n} \geqslant 1-a)$.

Notons que $1-a > 1-p$ et $1-a \in]0,1[$.

On peut donc appliquer Q2 en remplaçant p par $1-p$, a par $1-a$ et S_n par $n-S_n$.

On obtient alors $P(\frac{S_n}{n} \leqslant a) \leqslant e^{-nh(1-a,1-p)}$.

(*) Dans la suite h est définie par $\forall a \in]0,1[, \forall p \in]0,1[, h(a,p) = a \ln \frac{a(1-p)}{p(1-a)} - \ln \frac{1-p}{1-a}$

(et non plus simplement pour $p \in]0,1[$ et $a \in]p,1[$ ...)

$h(1-a,1-p) = (1-a) \ln \frac{(1-a)p}{(1-p)a} - \ln \frac{p}{a} = \ln \frac{(1-a)p}{(1-p)a} + \ln \frac{a}{p} - a \ln \frac{(1-a)p}{(1-p)a}$.

$h(1-a,1-p) = \ln\left[\frac{(1-a)p}{(1-p)a} \times \frac{a}{p}\right] + a \ln \frac{(1-p)a}{(1-a)p} = a \ln \frac{a(1-p)}{p(1-a)} - \ln \frac{1-p}{1-a} = h(a,p)$.

Ainsi $P(\frac{S_n}{n} \leqslant a) \leqslant e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$.

(*) Notons que $h(a,p)$ n'a été défini que dans Q2 et que dans Q2 $a > p$!!

Q4 Nous supposons ici $\varepsilon \in]0, \min(p,q)[$. Ainsi $\varepsilon>0$, $\varepsilon<p$ et $\varepsilon<q$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|\frac{S_n}{n}-p| \geq \varepsilon) = P(\{\frac{S_n}{n}-p \geq \varepsilon\} \cup \{\frac{S_n}{n}-p \leq -\varepsilon\})$.

$P(|\frac{S_n}{n}-p| \geq \varepsilon) = P(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon) + P(\frac{S_n}{n} \leq p-\varepsilon)$ (les événements sont incompatibles).

$p+\varepsilon \in]p,1[$ (car $\varepsilon>0$ et $\varepsilon<q$) donc Q2 donne $P(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon) \leq e^{-nh(p+\varepsilon,p)}$.

$p-\varepsilon \in]0,p[$ (car $\varepsilon>0$ et $\varepsilon<p$) donc Q3 donne $P(\frac{S_n}{n} \leq p-\varepsilon) \leq e^{-nh(p-\varepsilon,p)}$.

Alors $P(|\frac{S_n}{n}-p| \geq \varepsilon) \leq e^{-nh(p+\varepsilon,p)} + e^{-nh(p-\varepsilon,p)} \underset{\uparrow}{\leq} 2e^{-n\min(h(p+\varepsilon,p),h(p-\varepsilon,p))}$

$$\begin{cases} -nh(p+\varepsilon,p) \leq -n\min(h(p+\varepsilon,p),h(p-\varepsilon,p)). \\ -nh(p-\varepsilon,p) \leq -n\min(h(p+\varepsilon,p),h(p-\varepsilon,p)). \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|\frac{S_n}{n}-p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\min(h(p+\varepsilon,p),\ h(p-\varepsilon,p))}$.

Q5 Posons $\forall a \in]0,1[,\ \psi(a) = h(a,p) = a\ln\left(\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right) - \ln\left(\frac{1-p}{1-a}\right)$.

$\forall a \in]0,1[,\ \psi(a) = a\ln a + a\ln(1-p) - a\ln p - a\ln(1-a) - \ln(1-p) + \ln(1-a)$.

$\forall a \in]0,1[,\ \psi(a) = a\ln a + a\ln(1-p) - a\ln p + (1-a)\ln(1-a) - \ln(1-p)$.

ψ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall a \in]0,1[,\ \psi'(a) = \ln a + 1 + \ln(1-p) - \ln p - \ln(1-a) +$ $(1-a)\left(\frac{-1}{1-a}\right) = \ln a - \ln(1-a) + \ln(1-p) - \ln p = \ln\frac{a}{1-a} - \ln\frac{p}{1-p}$. Soit $a \in]0,1[$.

$\psi'(a)>0 \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} > \frac{p}{1-p} \Leftrightarrow a(1-p) > p(1-a) \Leftrightarrow a>p$

De même $\psi'(a)<0 \Leftrightarrow a<p$.

ψ est strictement décroissante sur $]0,p]$ et strictement croissante sur $[p,1[$.

$\lim\limits_{a\to 0^+} \psi(a) = -\ln(1-p)$, $\lim\limits_{a\to 1^-} \psi(a) = -\ln p$ et $\psi(p)=0$.

a	0		p		1
$\psi'(a)$	‖	$-$		$+$	‖
$\psi(a)$	‖ $-\ln(1-p)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\ln p$ ‖

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall a\in]p,1[$, $P(\frac{S_n}{n}\geqslant a)\leqslant e^{-n\,h(a,p)}$

Si $a\in]p,1[$, pour avoir $P(\frac{S_n}{n}\geqslant a)\leqslant\frac{\alpha}{2}$ il suffit d'avoir $e^{-n\,h(a,p)}\leqslant\frac{\alpha}{2}$ c'est

à dire $h(a,p)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\alpha/2)$ ou $\psi(a)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$.

$\forall a\in]0,p[$, $P(\frac{S_n}{n}\leqslant a)\leqslant e^{-n\,h(a,p)}$

Si $a\in]0,p[$, pour avoir $P(\frac{S_n}{n}\leqslant a)\leqslant\frac{\alpha}{2}$ il suffit d'avoir $e^{-n\,h(a,p)}\leqslant\frac{\alpha}{2}$ c'est

à dire $h(a,p)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\alpha/2)$ ou $\psi(a)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})\right)=0$, $-\ln p>0$ et $-\ln(1-p)>0$.

Alors $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0<-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})<-\ln p$ et $0<-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})<-\ln(1-p)$

$\alpha\in]0,1[$

Fixons n dans $[\![n_0,+\infty[\![$.

Alors $-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})\in]0,-\ln p[$.

ψ est continue sur $]p,1[$ et $\psi(]p,1[)=]0,-\ln p[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'il existe $a_2\in]p,1[$

tel que $\psi(a_2)=-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$ donc tel que $\psi(a_2)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$ donc

tel que $P(\frac{S_n}{n}\geqslant a)\leqslant e^{-n\,h(a,p)}\leqslant\frac{\alpha}{2}$.

De même $-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})\in]0,-\ln(1-p)[$, ψ est continue sur $]0,p[$ et

$\psi(]0,p[)=]0,-\ln(1-p)[$.

Alors $\exists a_1\in]0,p[$, $\psi(a_1)=-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$.

$\psi(a_1)\geqslant-\frac{1}{n}\ln(\frac{\alpha}{2})$! Ainsi $P(\frac{S_n}{n}\leqslant a)\leqslant e^{-n\,h(a,p)}\leqslant\frac{\alpha}{2}$.

<u>Pour n assez grand</u> ($n>\frac{\ln(\alpha/2)}{\ln p}$ et $n>\frac{\ln(\alpha/2)}{\ln(1-p)}$) <u>on peut trouver deux</u>

<u>réels a_1 et a_2 tels que : $P(\frac{S_n}{n}\leqslant a_1)\leqslant\frac{\alpha}{2}$ et $P(\frac{S_n}{n}\geqslant a_2)\leqslant\frac{\alpha}{2}$.</u>

Q6 a) $E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell\right) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} E(X_\ell) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} p = p$

$F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p.

b) $r_n = E((F_n - p)^2) = E((F_n - E(F_n))^2) = V(F_n) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$

$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} pq = \frac{1}{n^2} n pq = \frac{1}{n} pq = \frac{1}{n} p(1-p)$.

$r_n = \frac{1}{n} p(1-p)$. et $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$.

Q7 a) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance p et de variance $p(1-p)$ $(p(1-p) > 0)$.
Alors le théorème de la limite centrée indique que la suite de terme général $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{nF_n - E(nF_n)}{\sqrt{V(nF_n)}} = \frac{nF_n - nE(F_n)}{\sqrt{n^2 V(F_n)}} = \frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

Ainsi $\left(\sqrt{n}\,\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

b) le cours propose $\left[F_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right]$ comme intervalle de confiance de p au niveau $1-\alpha$, non ?! Pourvu que l'on assimile $\sqrt{n}\,\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ à une loi normale centrée réduite.

PARTIE IV : Le cas général

Q1 a) Soit $u \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{(\delta u)^n}{n!}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\delta u)^n}{n!} = e^{\delta u}$ d'après le cours.

Alors $|e^{\delta u} - 1 - \delta u| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\delta u)^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\delta u|^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!}$.

$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!}$.

⚠ dans la suite nous supposerons f définie sur $\mathbb{R}$ ce qui n'a rien de restrictif.

b) Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$e^{tu} |e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq \left(e^{(t-\delta)u} + e^{(t+\delta)u}\right) f(u) \quad (1)$$

$$\Updownarrow \quad \longleftarrow e^{tu} > 0$$

$$|e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq \left(e^{-\delta u} + e^{\delta u}\right) f(u).$$

Or $f(u) \geqslant 0$. Ainsi pour montrer l'inégalité (1) il suffit de montrer que $|e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leq e^{-\delta u} + e^{\delta u}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow -(e^{-\delta u} + e^{\delta u}) \leq e^{\delta u} - 1 - \delta u \leq e^{-\delta u} + e^{\delta u}$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2e^{\delta u} + e^{-\delta u} - 1 - \delta u & (2a) \\ \text{et} & \\ 0 \leq e^{-\delta u} + 1 + \delta u & (2b) \end{cases}$.

Nous avons vu que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$ et $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Alors $2e^{\delta u} + e^{-\delta u} - 1 - \delta u \geqslant e^{\delta u} + e^{-\delta u} + 1 + \delta u - 1 - \delta u = e^{\delta u} + e^{-\delta u} > 0$.

$\uparrow \; 2e^{\delta u} = e^{\delta u} + e^{\delta u} \geqslant e^{\delta u} + \delta u + 1$

Ainsi (2a) est vérifiée.

$e^{-\delta u} + 1 + \delta u \geqslant 1 - \delta u + 1 + \delta u \geqslant 2 > 0$. Ainsi (2b) est vérifiée.

Ceci achève de montrer (2) donc (1).

$\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^{tu} |e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq \left(e^{(t-\delta)u} + e^{(t+\delta)u}\right) f(u)$.

Remarque. - a) donnait aussi : $|e^{\delta u} - 1 - u| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!} = e^{\delta |u|} \leq e^{-\delta u} + e^{\delta u}$

c) $\forall u\in\mathbb{R}$, $0\leq e^{tu}|e^{\delta u}-1-\delta u|f(u)\leq \left(e^{(t-\delta)u}+e^{(t+\delta)u}\right)f(u)$.

$t-\delta\in]\alpha,\beta[$ et $t+\delta\in]\alpha,\beta[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(t-\delta)u}f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(t+\delta)u}f(u)\,du$

convergent, alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{(t-\delta)u}+e^{(t+\delta)u}\right)f(u)\,du$ converge.

Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tu}|e^{\delta u}-1-\delta u|f(u)\,du$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tu}(e^{\delta u}-1-\delta u)f(u)\,du$ est absolument convergente donc convergente.

Or $\forall u\in\mathbb{R}$, $\delta u\, e^{tu}f(u)=-\,e^{tu}(e^{\delta u}-1-\delta u)f(u)+e^{(t+\delta)u}f(u)-e^{tu}f(u)$.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tu}(e^{\delta u}-1-\delta u)f(u)\,du$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(t+\delta)u}f(u)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tu}f(u)\,du$

convergent ($t+\delta\in]\alpha,\beta[$ et $t\in]\alpha,\beta[$) on peut alors dire que

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta u\, e^{tu}f(u)\,du$ converge. Ainsi $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}u\, e^{tu}f(u)\,du \text{ converge}}}$ $(\delta\neq 0\,!)$

$0\in]\alpha,\beta[$ et il existe $\delta'\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]0-\delta',0+\delta'[\subset]\alpha,\beta[$ car $]\alpha,\beta[$ est un ouvert. Ainsi $[0-\frac{\delta'}{2},0+\frac{\delta'}{2}]\subset]\alpha,\beta[$

En appliquant ce qui précède pour $t=0$ et $\delta=\frac{\delta'}{2}$ on obtient

la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}u f(u)\,du$. <u>Ainsi X possède une espérance.</u>

Q2 Nous supposerons $h\neq 0$!!

a) Comme dans Q1 c) on obtient : $|e^{hu}-1-hu|\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^n|u|^n}{n!}$

Alors $\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| f(u) = \dfrac{e^{tu}}{|h|}\left|e^{hu}-1-hu\right| f(u) \leq \dfrac{e^{tu}}{|h|}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{|h|^n|u|^n}{n!} f(u).$

$\begin{cases} f(u)\geq 0 \\ \dfrac{e^{tu}}{|h|}\geq 0\end{cases}$

Donc $\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| f(u) \leq |h| e^{tu}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{|h|^{n-2}|u|^n}{n!} f(u).$

Or $|h|\leq \delta$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\delta^{n-2}|u|^n}{n!}$ converge.

Ainsi $\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| f(u) \leq |h| e^{tu}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\delta^{n-2}|u|^n}{n!} f(u).$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\delta^n|u|^n}{n!}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\delta^n|u|^n}{n!} = e^{\delta|u|}.$

$\delta^2\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| \leq |h| e^{tu}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\delta^n|u|^n}{n!} f(u) \leq |h|e^{tu}e^{\delta|u|}f(u).$

b) $\forall u\in[0,+\infty[$, $\quad e^{tu}e^{\delta|u|}f(u) = e^{(t+\delta)u}f(u)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(t+\delta)u}f(u)\,du$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)\,du$ converge

$\forall u\in\,]-\infty,0]$, $\quad e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)=e^{(t-\delta)u}f(u)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{(t-\delta)u}f(u)\,du$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)\,du$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)\,du$ converge.

La dernière inégalité de a) et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| f(u)\,du$ converge

Ainsi 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2\left(\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right) f(u)\,du$ est absolument convergente

2°) $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2\left(\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right) f(u)\,du\right| \leq \delta^2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} - ue^{tu}\right| f(u)\,du \leq |h|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)\,du$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^c\left(\frac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h}-ue^{tu}\right) f(u)\,du = \delta^c\left(\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t+h)u} f(u)\,du - \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)\,du\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right)$$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^c\left(\frac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h}-ue^{tu}\right) f(u)\,du\right| = \delta^c\left|\frac{L_X(t+h)-L_X(t)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right|$

donc $\delta^c\left|\frac{L_X(t+h)-L_X(t)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right| \leq |h| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{\delta|u|} f(u)\,du$.

$$0 \leq \left|\frac{L_X(t+h)-L_X(t)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right| \leq \frac{|h|}{\delta^c}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{\delta|u|} f(u)\,du.$$

Or $\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{\delta^c}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{\delta|u|} f(u)\,du\right) = 0$ il vient par encadrement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{L_X(t+h)-L_X(t)}{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du.$$

Ainsi <u>L_X est dérivable en t et $L'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du$.</u>

Q3 a) L_X est définie sur $]\alpha,\beta[$. Soit $t \in]\alpha,\beta[$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $e^{tu} f(u) \geq 0$ donc $L_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)\,du \geq 0$.

Montrons que $L_X(t) > 0$. Notons que f n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$...

f est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est un ensemble fini.

Si $\forall u \in \mathbb{R}\setminus D$, $f(u) = 0$, f est nulle sauf en un nombre fini de points et alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 0$!!

Ainsi $\exists u_0 \in \mathbb{R}\setminus D$, $f(u_0) > 0$. Or f est continue en u_0 donc il existe un réel γ strictement tel que $[u_0-\gamma, u_0+\gamma] \subset \mathbb{R}\setminus D$ et tel que $\forall u \in [u_0-\gamma, u_0+\gamma]$, $f(u) > 0$.

$u \mapsto e^{tu} f(u)$ est alors continue, positive et non identiquement nulle sur $[u_0-\gamma, u_0+\gamma]$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)\,du \geq \int_{u_0-\gamma}^{u_0+\gamma} e^{tu} f(u)\,du > 0$. Par conséquent $L_X(t) > 0$.

L_X est défini sur $]\alpha,\beta[$ et $\forall t\in]\alpha,\beta[$, $L_X(t)>0$.

Par conséquent le domaine de définition de ψ est $]\alpha,\beta[$.

b) ψ est deux fois dérivable sur $]\alpha,\beta[$ car L_X est $\mathcal{C}^2$ sur $]\alpha,\beta[$, L_X est strictement positive sur $]\alpha,\beta[$ et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\psi'(t)=\dfrac{L'_X(t)}{L_X(t)}$ et $\psi''(t)=\dfrac{1}{(L_X(t))^2}\left[L''_X(t)\,L_X(t)-(L'_X(t))^2\right]$.

c) Soit $t\in]\alpha,\beta[$. Il s'agit de montrer que $L''_X(t)\,L_X(t)>(L'_X(t))^2$;

ou que $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{tu}f(u)\,du\right)^2<\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{tu}f(u)\,du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu}f(u)\,du$.

L'idée : $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{tu}f(u)\,du\right)^2\leq\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u|e^{tu}f(u)\,du\right)^2=\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u|e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)}\,e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)}\,du\right)^2$

" En utilisant Cauchy-Schwarz " on a :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{tu}f(u)\,du\right)^2\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|u|e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)}\right)^2du\int_{-\infty}\left(e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)}\right)^2du=L''_X(t)\,L_X(t).$$

Ne reste plus qu'à montrer qu'il n'y a pas égalité...

Le problème est que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales de notre programme porte sur des fonctions continues sur un segment.

Ici on intègre entre $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues sur $\mathbb{R}$.

Il convient donc de faire une démonstration complète de tout cela !!

Notons que $u\mapsto u\,e^{tu}f(u)$ garde un signe constant sur $[0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0]$

Ainsi, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{tu}f(u)\,du$ est convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{tu}f(u)\,du$ absolument convergente !!

De plus : $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u e^{tu} f(u)|\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| e^{tu} f(u)\,du$.

Ainsi $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u)\,du\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u| e^{tu} f(u)\,du\right)^2$ ou $\underline{\underline{(L'_X(t))^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u| e^{tu} f(u)\,du\right)^2}}$.

Posons $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(u) = e^{\frac{tu}{2}} \sqrt{f(u)}$ et $\varphi_2(u) = |u| e^{\frac{tu}{2}} \sqrt{f(u)}$

1) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_1^2(u) = e^{tu} f(u)$ et $\varphi_2^2(u) = u^2 e^{tu} f(u)$.

2) φ_1 et φ_2 sont continues sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est un ensemble fini de points.

3) φ_1 et φ_2 sont positives sur $\mathbb{R}$.

3) D'après ce qui précède : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$ ($L_X(t)$ et $L''_X(t)$ existent).

$\forall u \in \mathbb{R}$, $0 \leq (\varphi_1 \varphi_2)(u) \overset{\text{classique}}{\leq} \frac{1}{2}(\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u))$. La convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$ donnent alors la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u))\,dt$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du$ converge.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall u \in \mathbb{R}$, $(\lambda\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2 = \lambda^2 \varphi_1^2(u) + 2\lambda\varphi_1(u)\varphi_2(u) + \varphi_2^2(u)$. Ce qui précède montre que

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2\,du$ converge ($\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$ convergent).

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2\,du = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$.

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2\,du$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $(\lambda\varphi_1(u) + \varphi_2(u))^2 \geq 0$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $H(\lambda) \geq 0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)\,du = L_X(t)$ et $L_X(t) > 0$ comme nous l'avons vu p 16.

Ainsi H est un polynôme de degré 2 ne prenant que des valeurs positives ou nulles.

Alors son discriminant est négatif ou nul.

Alors $\left(2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du\right)^2 - 4\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du \leq 0$.

Donc $\underline{\underline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du}}$.

Montrons que cette inégalité est stricte en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$.

Alors le discriminant de H est nul. Ainsi H admet au moins un zéro λ_0 dans $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_0\varphi_1(u)+\varphi_2(u))^2\,dt = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}\setminus D$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $(\lambda_0\varphi_1(u)+\varphi_2(u))^2 = \left(\lambda_0 e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)} + |u|\, e^{\frac{tu}{2}}\sqrt{f(u)}\right)^2$.

Alors $(\lambda_0\varphi_1+\varphi_2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus D$ et D est fini.

Ainsi $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $(\lambda_0\varphi_1+\varphi_2)^2$ est continue sur $[a-\eta, a+\eta]$.

Par conséquent : $0 \leq \int_{a-\eta}^{a+\eta} (\lambda_0\varphi(u)+\varphi_2(u))^2\,du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_0\varphi_1(u)+\varphi_2(u))^2\,du = 0$

Donc $\int_{a-\eta}^{a+\eta} (\lambda_0\varphi_1(u)+\varphi_2(u))^2\,du = 0$. Comme $(\lambda_0\varphi_1+\varphi_2)^2$ est continue et positive

sur $[a-\eta, a+\eta]$: $\forall u \in [a-\eta, a+\eta]$, $(\lambda_0\varphi_1(u)+\varphi_2(u))^2 = 0$.

En particulier $(\lambda_0\varphi_1(a)+\varphi_2(a))^2 = 0$; $\lambda_0\varphi_1(a)+\varphi_2(a) = 0$.

Par conséquent : $\forall a \in \mathbb{R}\setminus D$, $0 = \lambda_0\varphi_1(a)+\varphi_2(a) = \lambda_0 e^{\frac{ta}{2}}\sqrt{f(a)} + |a|\, e^{\frac{ta}{2}}\sqrt{f(a)}$.

$\forall a \in \mathbb{R}\setminus D$, $(\lambda_0+|a|)\sqrt{f(a)} = 0$; $\underline{\forall a \in \mathbb{R}\setminus D,\ (\lambda_0+|a|)\ f(a) = 0}$!

Posons $D' = \{a \in \mathbb{R} \mid \lambda_0+|a| = 0\}$. D' est fini et $\forall a \in \mathbb{R}\setminus(D\cup D')$, $f(a) = 0$.

f est donc nulle sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 0$!! fait une densité !

Ceci achève de montrer que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du\right)^2 < \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$.

Alors $(L'_X(t))^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u|\, e^{tu} f(u)\,du\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u)\varphi_2(u)\,du\right)^2 < \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2(u)\,du \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^2(u)\,du$.

Donc $(L'_X(t))^2 < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)\,du \times \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{tu} f(u)\,du = L_X(t)\, L''_X(t)$.

$\forall t \in]\alpha, \beta[$, $(L'_X(t))^2 < L_X(t)\, L''_X(t)$.

Donc $\forall t \in]\alpha, \beta[$, $\psi''(t) = \dfrac{L''_X(t)\, L_X(t) - (L_X'(t))^2}{(L_X(t))^2} > 0$.

Ainsi $\underline{\psi' \text{ est strictement croissante sur }]\alpha, \beta[}$.

Rappelons que toute fonction numérique monotone sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ possède une limite, finie ou infinie, à droite en a et à gauche en b (théorème de la limite monotone).

ψ' étant (strictement) croissante sur $]\alpha,\beta[$, <u>ψ' admet en α et en β une limite (finie ou infinie).</u>

$$\psi'(0) = \frac{L'_X(0)}{L_X(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u\, f(u)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du} = \frac{E(X)}{1} \; ; \quad \underline{\underline{\psi'(0) = E(X).}}$$

d) ψ' est continue et strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$.

<u>1er cas</u>.. ψ' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$. Alors ψ' est strictement positive ou strictement négative sur $]\alpha,\beta[$. Ainsi L_X est strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$. Alors ψ admet une limite finie ou infinie en α et en β.

<u>2ème cas</u>.. ψ' s'annule sur $]\alpha,\beta[$. ψ' étant strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$:
$\exists!\, t_0 \in]\alpha,\beta[, \ \psi'(t_0) = 0$.

Alors $\forall t \in]\alpha, t_0[, \ \psi'(t) < 0$ et $\forall t \in]t_0, \beta[, \ \psi'(t) > 0$.

ψ est donc strictement décroissante sur $]\alpha, t_0[$ et strictement croissante sur $]t_0, \beta[$.

Le théorème de la limite monotone donne à ψ une limite finie ou infinie en α et β... en l'appliquant à $]\alpha, t_0[$ et à $]t_0, \beta[$.

<u>ψ admet une limite finie ou infinie en α et en β.</u>

Q4 a) ℓ_a est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et $\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(t) = a - \psi'(t)$

ψ' étant strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$:

$$\forall t\in]\alpha,\beta[,\quad L_1(\alpha) = \lim_{z\mapsto\alpha}\psi'(z) < \psi'(t) < \lim_{z\mapsto\beta}\psi'(z) = L_1(\beta).$$

$\forall t\in]\alpha,\beta[$, $L_1(\alpha) < \psi'(t) < L_1(\beta)$; $\forall t\in]\alpha,\beta[$, $a-L_1(\beta) \overset{(*)}{<} a-\psi'(t) \overset{(*)}{<} a-L_1(\alpha)$.

__1er cas… $a \geq L_1(\beta)$.__ $\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(t) = a-\psi'(t) > a \overset{(*)}{-} L_1(\beta) \geq 0$.

$\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(t) > 0$. ℓ_a est strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$.

t	α		β
$\ell'_a(t)$		$+$	
$\ell_a(t)$		$\nearrow$	

(*) à quelques abus près. Nous en reparlerons plus…

__2ème cas… $a \leq L_1(\alpha)$.__ $\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(t) = a-\psi'(t) < a - L_1(\alpha) \leq 0$.

$\forall t\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(t) < 0$. ℓ_a est strictement décroissante sur $]\alpha,\beta[$.

t	α		β
$\ell'_a(t)$		$-$	
$\ell_a(t)$		$\searrow$	

__3ème cas… $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.__ ψ' est strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$ et continue. Donc ℓ'_a est strictement décroissante sur $]\alpha,\beta[$ et continue.

ℓ'_a définit une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]\lim_{t\mapsto\beta}\ell'_a(t), \lim_{t\mapsto\alpha}\ell'_a(t)[$.

ℓ'_a définit une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]a-L_1(\beta), a-L_1(\alpha)[$

Or $0\in]a-L_1(\beta), a-L_1(\alpha)[$. Ainsi $\exists!\,\gamma\in]\alpha,\beta[$, $\ell'_a(\gamma)=0$.

Comme ℓ'_a est strictement décroissante : $\forall t\in]\alpha,\gamma[$, $\ell'_a(t)>0$ et $\forall t\in]\gamma,\beta[$, $\ell'_a(t)<0$.

t	α		γ		β
$\ell'_a(t)$		$+$	0	$-$	
$\ell_a(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Q5 On suppose dans la suite que $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.

Alors la preuve de un maximum sur $]\alpha,\beta[$ atteint une fois et une seule. Ceci justifie très largement l'existence de $\sup_{t\in]\alpha,\beta[} \ell_a(t)$.

ψ' est strictement croissante et continue sur $]\alpha,\beta[$. ψ' définit une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $]\lim_{t\to\alpha}\psi'(t), \lim_{t\to\beta}\psi'(t)[=]L_1(\alpha), L_1(\beta)[$.

Ceci justifie l'existence de $(\psi')^{-1}$.

$h(a) = \sup_{t\in]\alpha,\beta[} \ell_a(t) = \ell_a(\gamma)$ où γ est le zéro de $\ell'_a : t \mapsto a - \psi'(t)$ sur $]\alpha,\beta[$.

Ainsi $\psi'(\gamma) = a$. Comme $a \in]L_1(\alpha), L_1(\beta)[$: $\gamma = \psi'^{-1}(a)$.

Alors $h(a) = \ell_a(\psi'^{-1}(a))$.

Ainsi $\underline{\underline{h(a) = a(\psi')^{-1}(a) - \psi((\psi')^{-1}(a))}}$.

Q6 Rappelons que $0 \in]\alpha,\beta[$, que $\psi'(0) = m$ et ψ' est strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$. Ainsi $L_1(\alpha) < m < L_1(\beta)$.

- $\underline{a > m}$. $\ell'_a(0) = a - \psi'(0) = a - m > 0$

  Rappelons que $\forall t \in]\alpha,\gamma[$, $\ell'_a(t) > 0$ et $\forall t \in]\gamma,\beta[$, $\ell'_a(t) < 0$.

  Alors $0 \in]\alpha,\gamma[$

  Donc $\max_{t\in]\alpha,\beta[} \ell_a(t) = \ell_a(\gamma) = \max_{t\in]0,\beta[} \ell_a(t)$.

  Alors $\underline{\underline{h(a) = \sup_{t\in]0,\beta[} \ell_a(t)}}$.

- $\underline{a < m}$ $\ell'_a(0) = a - \psi'(0) = a - m < 0$. Alors $0 \in]\gamma,\beta[$.

  Donc $\max_{t\in]\alpha,\beta[} \ell_a(t) = \ell_a(\gamma) = \max_{t\in]\alpha,0[} \ell_a(t)$.

  Ainsi $h(a) = \sup_{t\in]\alpha,0[} \ell_a(t)$.

Q7 <u>1er cas.. $a > m$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après II Q2 c) $\forall t \in]0,\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-at}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$

$\forall t \in]0,\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\left[a\frac{t}{n} - \ln\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right]} = e^{-n\left[a\frac{t}{n} - \ln E\left(e^{\frac{t}{n}X}\right)\right]}$

$\forall t \in]0,\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\left[a\frac{t}{n} - \ln L_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]} = e^{-n\left[a\frac{t}{n} - \psi\left(\frac{t}{n}\right)\right]}$

$\forall t \in]0,\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\,\ell_a\left(\frac{t}{n}\right)}$.

On rencontre encore un problème. En effet, pour obtenir la majoration voulue il faut trouver $t \in]0,\beta[$ tel que $\frac{t}{n} = \sigma$ où σ est le réel qui réalise $\max\limits_{t \in]0,\beta[} \ell_a(t)$; or rien n'indique que $n\sigma \in]0,\beta[$; on a simplement $\sigma \in]0,\beta[$.

Pour obtenir le résultat il suffirait simplement de montrer que :

$\forall t \in]0,n\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-at}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. Cela se fait sans difficulté de la même manière que dans II Q2.

Alors $\forall t \in]0,n\beta[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\,\ell_a\left(\frac{t}{n}\right)}$.

Prenons alors $t = n\sigma$. Alors $\ell_a\left(\frac{t}{n}\right) = \ell(a)$

Soit $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n\,\ell(a)}$ si $a > m$

<u>2ème cas.. $a < m$.</u>

En appliquant le résultat de II Q3 on a :

$\forall t \in]n\alpha,0[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-at}\left(\varphi(t/n)\right)^n = e^{-n\left[a\frac{t}{n} - \ln\left(E\left(e^{\frac{t}{n}X}\right)\right)\right]}$

$\forall t \in]n\alpha,0[,\ P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = e^{-n\,\ell_a\left(\frac{t}{n}\right)}$.

Soit γ l'élément de $]\alpha,\beta[$ et même ici de $]\alpha,0[$ tel que $\ell_1(\gamma)=h(a)$.

Posons alors $t=n\gamma$. $\frac{t}{n}=\gamma$ et $t\in]n\alpha,0[$.

Ainsi $P(\frac{S_n}{n}\leq a) \leq e^{-n\,\ell_a(\frac{t}{n})} = e^{-n\,h(a)}$.

$$\underline{\underline{P(\frac{S_n}{n}\leq a)\leq e^{-n h(a)}}} \quad \underline{\underline{\text{si } a<m}}$$

Q8 $P(|\frac{S_n}{n}-m|\geq\varepsilon) = P(\{\frac{S_n}{n}-m\geq\varepsilon\}\cup\{\frac{S_n}{n}-m\leq-\varepsilon\})$

$P(|\frac{S_n}{n}-m|\geq\varepsilon) = P(\frac{S_n}{n}\geq m+\varepsilon)+P(\frac{S_n}{n}\leq m-\varepsilon)$.

Supposons alors $\varepsilon<\min(L_1(\beta)-m,\ m-L_1(\alpha))$

Rappelons que $L_1(\alpha)<m<L_1(\beta)$ donc $L_1(\beta)-m>0$ et $m-L_1(\alpha)>0$

Alors $L_1(\alpha)<m-\varepsilon<m$ donc $P(\frac{S_n}{n}\leq m-\varepsilon)\leq e^{-n\,h(m-\varepsilon)}$

De même $m<m+\varepsilon<L_1(\beta)$ donc $P(\frac{S_n}{n}\geq m+\varepsilon)\leq e^{-n\,h(m+\varepsilon)}$

$-n\,h(m-\varepsilon)\leq -n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))$ et $-n\,h(m+\varepsilon)\leq -n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))$.

Ainsi $P(\frac{S_n}{n}\leq m-\varepsilon)\leq e^{-n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))}$ et

$P(\frac{S_n}{n}\geq m+\varepsilon)\leq e^{-n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))}$.

Alors $\underline{\underline{P(|\frac{S_n}{n}-m|\geq\varepsilon)\leq 2\,e^{-n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))} \text{ si}}}$

$\underline{\underline{\varepsilon\in]0,\min(L_1(\beta)-m,\ m-L_1(\alpha))[}}$.