## PARTIE I Etude de l'ensemble $E_n$

⚠ Pour ne pas alourdir la rédaction si $M$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nous noterons $m_{i,j}$ son élément générique ... et même le plus souvent $m_{ij}$.

**Q1) a)** • $E_n$ est une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $E_n$ car pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la somme des coefficients de chaque ligne vaut 0 de même que la somme des coefficients de chaque colonne.

• Soit $(M,N)\in E_n^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $Q=\lambda M+N$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ q_{ij}=\lambda m_{ij}+n_{ij}$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} q_{i\ell}=\lambda\sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell}+\sum_{\ell=1}^{n} n_{i\ell}=\lambda\,\omega(M)+\omega(N)$ et

$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} q_{\ell j}=\lambda\sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell j}+\sum_{\ell=1}^{n} n_{\ell j}=\lambda\,\omega(M)+\omega(N)$.

Finalement $\forall i\in[\![1,n]\!], \forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} q_{i\ell}=\sum_{\ell=1}^{n} q_{\ell j}=\lambda\,\omega(M)+\omega(N)$

Ainsi $Q=\lambda M+N$ appartient à $E_n$ et $\omega(\lambda M+N)=\omega(Q)=\lambda\,\omega(M)+\omega(N)$.

Ceci achève de montrer que <u>$E_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</u>

$\omega$ est une application de $E_n$ dans $\mathbb{R}$ et nous venons de voir que :
$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall (M,N)\in E_n^2,\ \omega(\lambda M+N)=\lambda\,\omega(M)+\omega(N)$. Ainsi :
<u>$\omega$ est une forme linéaire sur $E_n$.</u>

**b)** Notons que $U$ est non nul et posons $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ avec $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k=1$ !

Soit $M$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=MU$ et $W=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}={}^tMU$.

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ v_i=\sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell}u_\ell=\sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell}$ et $w_i=\sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell i}u_\ell=\sum_{\ell=1}^{n} m_{\ell i}$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \ \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{kj}$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \lambda$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], \ \sum_{k=1}^{n} m_{kj} = \lambda$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ v_i = \lambda$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], \ w_j = \lambda$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ v_i = \lambda u_i$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], \ w_j = \lambda u_j$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ V = \lambda U$ et $W = \lambda U$.

$M \in E_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ MU = \lambda U$ et ${}^tMU = \lambda U$. Rappelons que $U \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $M \in E_n \Leftrightarrow$ $U$ est un vecteur propre commun à $M$ et ${}^tM$ associé à la même valeur propre.

Si $M$ est un élément de $M_n(\mathbb{R})$, $M$ appartient à $E_n$ si et seulement si $U$ est un vecteur propre commun à $M$ et ${}^tM$ associé à une même valeur propre.

Remarque.- Si $M \in E_n$, $U$ est un vecteur propre de $M$ et ${}^tM$ associé à la valeur propre $\omega(M)$.

c) Soit $(M,N) \in E_n^2$. $MU = \omega(M)U$, ${}^tMU = \omega(M)U$, $NU = \omega(N)U$ et ${}^tNU = \omega(N)U$

Alors $MNU = M(\omega(N)U) = \omega(N)MU = \omega(N)\omega(M)U = \omega(M)\omega(N)U$.

${}^t(MN)U = {}^tN\,{}^tMU = {}^tN(\omega(M)U) = \omega(M)\,{}^tNU = \omega(M)\omega(N)U$.

Ainsi $U$ est un vecteur propre commun à $MN$ et ${}^t(MN)$ associé à la même valeur propre $\omega(M)\omega(N)$. Alors $MN \in E_n$ et $\omega(MN) = \omega(M)\omega(N)$.
↑ d'après la remarque précédente.

$\forall M \in E_n, \forall N \in E_n, \ MN \in E_n$ et $\omega(MN) = \omega(M)\omega(N)$.

Exercice 1.- Retrouver ce résultat en utilisant le produit matriciel.

Exercice 2.- Notez que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $M \in E_n \Leftrightarrow MJ = JM$ et retrouver une partie du résultat précédent.

Q2 a) • Notons que $J \in E_n$ car $JU = nU$ et ${}^tJU = JU = nU$ ; de plus $\omega(J) = n$.

Ainsi la droite vectorielle engendrée par $J$ est contenue dans $E_n$.

• Soit $M \in \mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Vect}(J)$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $M = \alpha J$. Alors $\omega(M) = 0$ et $\omega(M) = \alpha\,\omega(J) = \alpha n$. Ainsi $\alpha n = 0$ et $\alpha$ est alors nul. $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $\mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0_{E_n}\}$.

• $\mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$ est contenu dans $E_n$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $M \in E_n$. $\omega(J) = n$ ; $\omega(\frac{1}{n}J) = 1$ ; $\omega(\frac{\omega(M)}{n}J) = \omega(M)$.

Alors $\omega\left(M - \frac{\omega(M)}{n}J\right) = 0$. Posons $N = M - \frac{\omega(M)}{n}J$.

$N \in \mathrm{Ker}\,\omega$ et $M = N + \frac{\omega(M)}{n}J$ donc $M \in \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$.

Finalement $E_n \subset \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}\,J \subset E_n$ ; alors $E_n = \mathrm{Ker}\,\omega + \mathrm{Vect}(J)$.

Par conséquent : le noyau de $\omega$ et la droite vectorielle engendrée par $J$ sont supplémentaires dans $E_n$. Exercice.. Retrouver ce résultat par analyse / synthèse.

b) • Soit $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, notons pour simplifier (!?), $a_{ij}$ l'élément générique de $A_{r,s}$ ... matrice que nous noterons $A_{rs}$ !

$\forall i \in [\![1,n]\!] - \{1,r\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

$\forall j \in [\![1,n]\!] - \{1,s\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} = a_{11} + a_{1s} = 1 - 1 = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{rk} = a_{r1} + a_{rs} = -1 + 1 = 0$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{k1} = a_{11} + a_{r1} = 1 - 1 = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{ks} = a_{1s} + a_{rs} = -1 + 1 = 0$.

Ainsi $A_{rs} \in E_n$ et $\omega(A_{rs}) = 0$.

Alors $\forall (r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, $A_{rs} \in \mathrm{Ker}\,\omega$.

• Notons $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Observons que $\forall (r,s)\in [\![2,n]\!]^2$, $A_{r,s} = E_{11}+E_{rs}-E_{1s}-E_{r1}$.

Soit alors $(\lambda_{ij})_{\substack{2\le i\le n\\ 2\le j\le n}}$ une famille de réels telle que $\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{rs}A_{r,s} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors $\overbrace{0_{M_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n}\lambda_{rs}E_{rs} - \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{rs}E_{1s} - \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n}\lambda_{rs}E_{r1}}^{(*)}$.

Donc $0_{M_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n}\lambda_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^{n}\left(\sum_{r=2}^{n}\lambda_{rs}\right)E_{1s} - \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{s=2}^{n} \lambda_{rs}\right)E_{r1}$.

La liberté de la famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ donne les quatre "nullités" suivantes.

$\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n}\lambda_{rs}=0$, $\forall(r,s)\in[\![2,n]\!]^2, \lambda_{rs}=0$, $\forall s\in[\![2,n]\!], \sum_{r=2}^{n} \lambda_{rs}=0$ et $\forall r\in[\![2,n]\!], \sum_{s=2}^{n}\lambda_{rs}=0$

donc $\forall (r,s)\in[\![2,n]\!]^2, \lambda_{rs}=0$ ! Ceci achève de montrer que la famille $(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\ 2\le s\le n}}$ est libre ... et nous donne quelques idées pour montrer qu'elle est génératrice.

---

• Montrons que tout élément de Ker w est combinaison linéaire des éléments de cette famille

Soit $M=(m_{ij})\in \operatorname{Ker} w$. $M=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij}$. Rappelons que $\boxed{w(M)=0}$

✱ laisse à penser que $M = \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}A_{rs}$, non ?

c'est à dire que $N = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} m_{rs}E_{rs}$

Posons $N = \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}A_{rs}$ et vérifions que $N = M$. Un développement analogue à celui fait "en ✱" donne :

$N = \left(\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}\right)E_{11} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^{n}\left(\sum_{r=2}^{n} m_{rs}\right)E_{1s} - \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{s=2}^{n} m_{rs}\right)E_{r1}$.

$\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs} = \sum_{r=2}^{n}(\underbrace{w(M)}_{=0} - m_{r1}) = \sum_{r=2}^{n}(-m_{r1}) = -(w(M)-m_{11}) = m_{11}$ car $w(M)=0$

$\forall s\in[\![2,n]\!], \sum_{r=2}^{n} m_{rs} = w(M)-m_{1s} = -m_{1s}$ et $\forall r\in[\![2,n]\!], \sum_{s=2}^{n} m_{rs} = w(M)-m_{r1} = -m_{r1}$.

Alors $N = m_{11}E_{11} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}E_{rs} - \sum_{s=2}^{n}(-m_{1s})E_{1s} - \sum_{r=2}^{n}(-m_{r1})E_{r1}$.

donc $N = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} m_{rs}E_{rs}$ ; c'est à dire $N = M$.

Ainsi $\forall M = (m_{ij}) \in \mathrm{Ker}\,\omega$, $M = \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} m_{rs}A_{rs}$.

Tout élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\2\le s\le n}}$.

Finalement $(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\2\le s\le n}}$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}\,\omega$ libre et génératrice.

$(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\2\le s\le n}}$ est ainsi une base de $\mathrm{Ker}\,\omega$ de cardinal $(n-1)^2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\,\omega = (n-1)^2$. Rappelons que $E_n = \mathrm{Ker}\,\omega \oplus \mathrm{Vect}(J)$.

Alors $\dim E_n = \dim \mathrm{Ker}\,\omega + \dim \mathrm{Vect}(J) = (n-1)^2 + 1$.
car $J \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$ !

$E_n$ est de dimension $(n-1)^2+1$.

(Q3) a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posons $P_\sigma = (p_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = p_{i\sigma(i)} = 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} p_{kj} = p_{\sigma^{-1}(j)j} = 1$.

Alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in E_n$ et $\omega(P_\sigma) = 1$.

- Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma$ est une matrice de $E_n$, vérifiant $\omega(P_\sigma) = 1$. et n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne, non ?
- Réciproquement soit $M$ une matrice de $E_n$, vérifiant $\omega(M) = 1$ et n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne. Alors cet élément non nul par ligne et par colonne vaut 1 car $\omega(M) = 1$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $\exists!\, c_i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $m_{ik}=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq c_i\\ 1 & \text{si } k=c_i\end{cases}$.

$\uparrow$ la $i$ème ligne de $M$ ne contient qu'un élément non nul qui vaut 1

Posons $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)=c_i$.

<u>$\sigma$ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$</u>. Montrons que $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

- Montrons que $\sigma$ est injective. Soit $(i,i')\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $\sigma(i)=\sigma(i')$.

  Alors $m_{ic_i}=1=m_{i'c_{i'}}=m_{i'c_i}$ car $c_i=\sigma(i)=\sigma(i')=c_{i'}$.

  Si $i\neq i'$ alors la colonne n° $c_i$ de $M$ contient deux éléments non nuls !!

  Ainsi $i=i'$ si $\sigma(i)=\sigma(i')$. <u>$\sigma$ est injective</u>.

<u>Remarque</u>.. Cela suffit pour dire que $\sigma$ est bijective car $\sigma$ est une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ avec $\operatorname{card}[\![1,n]\!]=n<+\infty$.
Faisons semblant de ne pas avoir remarqué...

- Montrons que $\sigma$ est surjective. Soit $j\in[\![1,n]\!]$. La $j$ème colonne de $M$ contient un élément non nul et un seul. Alors $\exists!\, i\in[\![1,n]\!]$, $m_{ij}\neq 0$

  mieux : $\exists!\, i\in[\![1,n]\!]$, $m_{ij}=1$.

Or $c_i$ est l'unique élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $m_{ik}=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq c_i\\ 1 & \text{si } k=c_i\end{cases}$

Ainsi $c_i=j$ donc $\sigma(i)=j$.

$\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\exists i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)=j$ ; <u>$\sigma$ est surjective.</u>

Ceci achève de prouver que $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $m_{ik}=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq c_i=\sigma(i)\\ 1 & \text{si } k=c_i=\sigma(i)\end{cases}$. Alors $M=P_\sigma$.

$M$ est donc une matrice de permutation.

Ceci achève de montrer que : <u>les matrices $P_\sigma$ sont les seules matrices $M$ de $E_n$ telles que $\omega(M_n)=1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne (qui vaut 1...)</u>.

**b)** $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ . $P_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \\ \hline 1 & 0 \cdots 0 \end{array}\right)$

Avant de préciser mettons un lemme.

▲ Lemme.. Soient $\tau$ et $\tau'$ deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. $P_\tau P_{\tau'} = P_{\tau' \circ \tau}$.

Soient $\tau$ et $\tau'$ deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. Posons $P_\tau = (p_{ij})$, $P_{\tau'} = (q_{ij})$ et $P_\tau P_{\tau'} = (r_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} p_{il} q_{lj} = p_{i\tau(i)} q_{\tau(i)j} = q_{\tau(i)j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau'(\tau(i)) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (\tau' \circ \tau)(i) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a $\tau' \circ \tau$ appartient à $\mathfrak{S}_n$ car $\tau'$ et $\tau$ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$.

Ainsi $P_\tau P_{\tau'} = P_{\tau' \circ \tau}$ ▼

<u>Remarque</u>.. Par récurrence on a aussi :

$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r) \in \mathfrak{S}_n^{\,r},\ P_{\tau_1} P_{\tau_2} \cdots P_{\tau_r} = P_{\tau_r \circ \tau_{r-1} \circ \cdots \circ \tau_1}$ ;

$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall \tau \in \mathfrak{S}_n,\ (P_\tau)^r = P_{\tau^r}$.

Ce qui précède donne alors $\forall r \in [\![1,n]\!],\ P_\sigma^r = P_{\sigma^r}$.

$\forall l \in [\![1,n-1]\!],\ \sigma(l) = l+1$ et $\sigma(n) = 1$.

Alors $\forall k \in [\![1,n-2]\!],\ \sigma^2(k) = \sigma(k+1) = k+2$, $\sigma^2(n-1) = \sigma(n) = 1$ et $\sigma^2(n) = \sigma(1) = 2$

Donc $\forall k \in [\![1,n-2]\!],\ \sigma^2(k) = k+2$ et $\forall k \in [\![n-1,n]\!],\ \sigma^2(k) = k-n+2$.

Une récurrence relativement simple fournit, à quelques choses près,

$\forall r \in [\![1,n]\!],\ \forall k \in [\![1,n-r]\!],\ \sigma^r(k) = k+r$ et $\forall k \in [\![n-r+1,n]\!],\ \sigma^r(k) = k-n+r$.

Ce que nous pouvons encore écrire sous alors :

$$\forall r \in [\![1,n]\!],\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sigma^r(k) = \begin{cases} k+r & \text{si } k+r \leq n \\ k-n+r & \text{si } k+r > n \end{cases}.$$

Ainsi $\forall r \in [\![1,n-1]\!]$, $P_\sigma^r = \begin{array}{cc|l} r & n-r & \\ \left(\begin{array}{c|c} O_{n-r,r} & I_{n-r} \\ \hline I_r & O_{r,n-r} \end{array}\right) & & \begin{array}{l} n-r \\ r \end{array} \end{array}$ et $P_\sigma^n = I_n$.

c] On considère encore la permutation $\sigma$ précédente.

Posons $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma^r = P_{\sigma^r} = (p_{ij}(r))$.

Notons que $\sum_{r=1}^{n} P_\sigma^r = J$ c'est à dire que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r) = 1$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma^r(i) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\forall r \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } i+r \leq n \text{ et } j = i+r \\ 1 & \text{si } i+r > n \text{ et } j = i-n+r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } r = j-i \text{ et } j \leq n \\ 1 \text{ si } r = j-i+n \text{ et } j > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij}(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = j-i \\ 1 \text{ si } r = n-(j-i) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Notons que $i$ et $j$ étant fixé $\exists!\, r \in [\![1,n]\!]$ tel que $r = j-i$ ou $r = j-i+n$

Car si $j-i > 0$ : $j-i \in [\![1,n]\!]$ et $j-i+n \notin [\![1,n]\!]$ et si $j-i \leq 0$ : $\begin{cases} j-i \notin [\![1,n]\!] \\ j-i+n \in [\![1,n]\!] \end{cases}$

Alors tous les éléments du $r$-uplet $(p_{ij}(1), p_{ij}(2), \dots, p_{ij}(r))$ sont nuls sauf 1 qui vaut 1. Alors $\sum_{r=1}^{n} p_{ij}(r) = 1$

Par conséquent $J = \sum_{r=1}^{n} P_\sigma^r$. $J$ est combinaison linéaire de matrices de permutations. $J$ est même somme de matrices de permutations.

R. (*) On peut prendre $\forall \ell \in [\![1,n]\!] - \{1,r,s\}$, $\varphi(\ell) = \ell$ et $\varphi(s) = r$. | Alors $\sigma_1$ est la transposition qui échange $r$ et $s$. $\sigma_2$ est le cycle "$(1,s,r)$"*



Soit $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$. $[\![1,n]\!] - \{1,r\}$ et $[\![1,n]\!] - \{1,s\}$ sont équipotents car de cardinal $n-2$. (*) Il existe donc une bijection $\varphi$ de $[\![1,n]\!] - \{1,r\}$ sur $[\![1,n]\!] - \{1,s\}$.

Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_1(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ s & \text{si } k=r \\ \varphi(k) & \text{sinon} \end{cases}$ et $\sigma_2(k) = \begin{cases} s & \text{si } k=1 \\ 1 & \text{si } k=r \\ \varphi(k) & \text{sinon} \end{cases}$

$\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont clairement des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ donc des permutations de $[\![1,n]\!]$.

Montrons que $A_{rs} = P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2}$. Posons $A_{rs} = (a_{ij})$, $P_{\sigma_1} = (p_{ij})$ et $P_{\sigma_2} = (q_{ij})$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \\ 1 & i=r \text{ et } j=s \\ 1 & \text{si } i\neq 1, i\neq r, j=\varphi(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ et } j=s \\ 1 & \text{si } i=r \text{ et } j=1 \\ 1 & \text{si } i\neq 1, i\neq r \text{ et } j=\varphi(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij} - q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \\ -1 & \text{si } i=1 \text{ et } j=s \\ 1 & \text{si } i=r \text{ et } j=s \\ -1 & \text{si } i=r \text{ et } j=1 \\ \varphi(i)-\varphi(i) & \text{si } i\neq 1, i\neq r \text{ et } j=\varphi(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad p_{ij} - q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (1,1) \text{ ou } (r,s) \\ -1 & \text{si } (i,j) = (1,s) \text{ ou } (r,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} - q_{ij} = a_{ij}$.

Ainsi $A_{rs} = P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2}$

Pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, $A_{rs}$ est combinaison linéaire de matrices de permutations. Illustrons !

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_n - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2} \text{ avec}$$

$\sigma_1 = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_2(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k=1 \\ 1 & \text{si } k=2 \\ k & \text{sinon} \end{cases}$

$\sigma_1(1)=1, \sigma_1(3)=2, \sigma_2(1)=2, \sigma_2(3)=1, \ \forall k\in[\![1,n]\!]-\{1,3\}, \ \sigma_1(k)=\sigma_2(k)=\begin{cases}3 & \text{si } k=2\\ k & \text{sinon}\end{cases}$

$$A_{32}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\ddots&&0\\-1&1&0&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&&0&0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0\\\vdots&0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}}_{P_{\sigma_1}}-\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&&\vdots\\1&0&0&0&\ddots&\vdots\\0&0&\ddots&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}}_{P_{\sigma_2}}$$

d) $J$ est combinaison linéaire de matrices de permutations donc tout élément de $\mathrm{Vect}(J)$ aussi.

Pour tout $(r,s)\in[\![2,n]\!]^2$, $A_{rs}$ est combinaison linéaire de matrices de permutations donc tout élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ aussi car $(A_{rs})_{\substack{2\le r\le n\\2\le s\le n}}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\omega$.

Or tout élément de $E_n$ est somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\omega$ et de $\mathrm{Vect}(J)$ donc tout élément de $E_n$ est combinaison linéaire de matrices de permutations.

Rappelons que les matrices de permutations sont des éléments de $E_n$.

Ainsi $(P_\sigma)_{\sigma\in S_n}$ est une famille génératrice de $E_n$ contenant $n^2$ éléments. $E_n$ étant de dimension $(n-1)^2+1$ on peut en extraire une base qui contiendra nécessairement $(n-1)^2+1$ éléments.

Il existe donc $(n-1)^2+1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[\![1,n]\!]$ telles que $(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de $E_n$.

Soit $M\in E_n$. $\exists(\gamma_1,\dots,\gamma_{(n-1)^2+1})\in\mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$, $M=\sum_{i=1}^{(n-1)^2+1}\gamma_i P_{\sigma_i}$.

Alors $\omega(M)=\sum_{i=1}^{(n-1)^2+1}\gamma_i\,\omega(P_{\sigma_i})=\sum_{i=1}^{(n-1)^2+1}\gamma_i$

La somme des composantes d'une matrice $M$ de $E_n$ relativement à cette base est $\omega(M)$.