PARTIE II : Etude de l'ensemble E_n^+

Q1 Soit $M=(m_{ij})$ et $N=(n_{ij})$ deux éléments de E_n^+.

$M\in E_n$ et $N\in E_n$ donc $MN\in E_n$.

De plus $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij}\geqslant 0$ et $n_{ij}\geqslant 0$.

Ainsi $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, n_{kj}\geqslant 0$; les coefficients de MN sont positifs ou nuls. Alors $MN\in E_n^+$.

E_n^+ est stable pour le produit matriciel.

Soit $p\in[\![1,n]\!]$, $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p)\in \mathfrak{S}_n^p$ et $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)\in \mathbb{R}_+^p$.

$\forall i\in[\![1,p]\!]$, $P_{\sigma_i}\in E_n$ donc $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n$ car E_n est un espace vectoriel.

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ les coefficients de P_{σ_i} sont positifs ou nuls.

Alors pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ les coefficients de $\alpha_i P_{\sigma_i}$ sont positifs ou nuls.

Il en est alors de même pour $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}$. Par conséquent $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n^+$.

$\forall p\in[\![1,n]\!]$, $\forall(\sigma_1,\dots,\sigma_p)\in\mathfrak{S}_n^p$, $\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}_+^p$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i P_{\sigma_i}\in E_n^+$.

Q2 a) Soit $M\in E_n^+\setminus\{0\}$. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ tel que $m_{1\sigma(1)}\cdots m_{n\sigma(n)}>0$.

Posons $c=\min\{m_{1\sigma(1)},\dots,m_{n\sigma(n)}\}$ et $Q=M-cP_\sigma=(q_{ij})$.

$M\in E_n$, $c\in\mathbb{R}$ et $P_\sigma\in E_n$ donc $Q=M-cP_\sigma\in E_n$. Montrons que $Q\in E_n^+$.

$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $q_{ij}=\begin{cases} m_{ij}-c & \text{si } \sigma(i)=j\\ m_{ij} & \text{sinon}\end{cases}$

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $\sigma(i)=j$: $q_{ij}=m_{i\sigma(i)}-c=m_{i\sigma(i)}-\min(m_{1\sigma(1)},\dots,m_{n\sigma(n)})\geqslant 0$

Si $\sigma(i)\neq j$: $q_{ij}=m_{ij}\geqslant 0$ car $M\in E_n^+$

Ainsi $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $q_{ij}\geqslant 0$. Ceci achève de montrer que $Q=M-cP_\sigma\in E_n^+$

$M-cP_\sigma\in E_n^+$.

▼ <u>Remarque.</u> – Supposons que la matrice M possède exactement z_M coefficients nuls. Rappelons que $m_{1\sigma(1)}, m_{2\sigma(2)}, \dots, m_{n\sigma(n)}$ ne sont pas nuls et que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $q_{ij} = \begin{cases} m_{ij} - c & \text{si } j = \sigma(i) \\ m_{ij} & \text{si } j \neq \sigma(i) \end{cases}$

$z_M = \text{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid m_{ij} = 0\} = \text{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid m_{ij} = 0 \text{ et } j \neq \sigma(i)\}$

$z_M = \text{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid q_{ij} = 0 \text{ et } j \neq \sigma(i)\}$

Notons z_Q le nombre de zéros de Q.

$z_Q = \text{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid q_{ij} = 0 \text{ et } j \neq \sigma(i)\} + \text{card}\{i \in [\![1,n]\!] \mid q_{i\sigma(i)} = 0\}$.

Alors $z_Q = z_M + \text{card}\{i \in [\![1,n]\!],\ q_{i\sigma(i)} = 0\}$.

$c = \min\{m_{1\sigma(1)}, \dots, m_{n\sigma(n)}\}$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $c = m_{i_0\sigma(i_0)}$; ainsi

$\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $q_{i_0\sigma(i_0)} = m_{i_0\sigma(i_0)} - c = 0$.

Alors $\text{card}\{i \in [\![1,n]\!] \mid q_{i\sigma(i)} = 0\} \geq 1$.

<u>Le nombre de zéros de Q est strictement supérieur au nombre de zéros de M.</u>

<u>Notons également que $c = \min\{m_{1\sigma(1)}, m_{2\sigma(2)}, \dots, m_{n\sigma(n)}\} \geq 0$.</u> ▲

b) et <u>c)</u>

⚠ Marquons un temps d'arrêt pour dire par avance que le résultat de c) est faux dans la mesure où la décomposition n'est pas unique. En fractionnant un des α_k on peut rendre le p aussi grand que l'on souhaite, non ? Il convient donc de modifier le texte.

Dans une étape E1 nous allons montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins n^2-n+1 termes nuls est nulle.

Nous montrerons dans une étape E2 qu'il existe p dans $[\![1, n^2-n+1]\!]$, il existe p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que $M = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$ lorsque $M \in E_n^+ - \{0\}$.

$\boxed{E1}$ Soit $M \in E_n^+$. Supposons que M possède au moins n^2-n+1 termes nuls et montrons que M est nulle.

M possède alors au plus $n-1$ termes non nuls. Ainsi l'une des lignes de M ne contient que des 0. Ceci donne alors $\omega(M)=0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 0$ et $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ik} \geq 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \in [\![1,n]\!], m_{ik} = 0$. M est nulle.

<u>une matrice de E_n^+ possédant au moins n^2-n+1 termes non nul est nulle.</u>

Soit $M \in E_n^+ - \{0\}$.

$\boxed{E2}$ Montrons que $\exists p \in [\![1, n^2-n+1]\!], \exists (\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p) \in \mathfrak{S}_n^p, \exists (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$,

$M = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$. $(*)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le résultat précédent ne soit pas vrai. Montrons alors par récurrence que :

$\forall j \in [\![1, n^2-n+1]\!],\ \exists (\sigma_1,\dots,\sigma_j) \in \mathfrak{S}_n^j, \exists (\alpha_1,\dots,\alpha_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^j$ tq

$Q_j = M - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+ - \{0\}$ et $z_{Q_j} \geq z_M + j$ (z_{Q_j} étant le nombre de zéros de Q_j et z_M celui de M).

- D'après a) la propriété est clairement vraie pour $j=1$ car nous avons trouvé $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $Q = M - cP_\sigma \in E_n^+$ et $z_Q > z_M$ (ou $z_Q \geq z_M + 1$). L'hypothèse faite montre que $Q \neq 0$. Donc $Q \in E_n^+ - \{0\}$

- Supposons la propriété vraie pour $j \in [\![1, n^2-n]\!]$ et montrons la pour $j+1$. Par hypothèse on peut trouver j permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j$ de $[\![1,n]\!]$ et j réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ tels que :

  $Q_j = M - \sum_{k=1}^{j} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+ - \{0\}$ et $z_{Q_j} \geq z_M + j$.

$Q_j \in E_n^+ - \{0\}$. Nous pouvons donc lui appliquer Q2 a).

On peut donc trouver une permutation σ_{j+1} de $[\![1,n]\!]$ et un réel strictement positif α_{j+1} tel que $Q_j - \alpha_{j+1} P_{\sigma_{j+1}} \in E_n^+$.

Posons $Q_{j+1} = Q_j - \alpha_{j+1} P_{\sigma_{j+1}}$. Alors $Q_{j+1} = M - \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ et $z_{Q_{j+1}} \geq z_{Q_j} + 1$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j+1}$ sont des permutations de $[\![1,n]\!]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j+1}$ sont des réels strictement positifs, $Q_{j+1} = M - \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$, $Q_{j+1} \in E_n^+$, $z_{Q_{j+1}} \geq z_{Q_j} + 1 \geq z_M + j + 1$.

Il reste plus qu'à montrer que Q_{j+1} n'est pas nulle pour achever la récurrence. Supposons le contraire.

Alors $M = \sum_{\ell=1}^{j+1} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ avec $j+1 \leq n^2 - n + 1$. Cela contredit le fait que nous avons supposé que (*) est faux ; donc $Q_{j+1} \neq 0$ et la récurrence est terminée.

Appliquons alors la propriété pour $j = n^2 - n + 1$. Pour simplifier posons $s = n^2 - n + 1$. Alors on peut trouver s permutations de $[\![1,n]\!]$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ et s réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ tels que $Q_s = M - \sum_{\ell=1}^{s} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell} \in E_n^+ - \{0\}$ et

$z_{Q_s} \geq z_M + s = z_M + n^2 - n + 1 \geq n^2 - n + 1$.

Ainsi $Q_s \in E_n^+ - \{0\}$ et Q_s admet au moins $n^2 - n + 1$ zéros ce qui contredit le résultat de E1. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Alors (*) est vrai.

Pour toute matrice M de $E_n^+ - \{0\}$ on peut trouver $p \in [\![1, n^2 - n + 1]\!]$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que $M = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$.

<u>Remarque</u>.. Q2 a) fournit un algorithme pour trouver une telle décomposition.

d] Utilisons l'algorithme précédent.

Soit σ_1 la permutation identique de $[\![1,3]\!]$.

$m_{1\sigma_1(1)}\, m_{2\sigma_1(2)}\, m_{3\sigma_1(3)} > 0$.

Posons $c = \min\{m_{1\sigma_1(1)}, m_{2\sigma_1(2)}, m_{3\sigma_1(3)}\} = \min\{3,1,2\} = 1$.

Posons $\Phi = M - c\,P_{\sigma_1}$. $\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. $\Phi \in E_3^+ - \{0\}$

Considérons la permutation σ_2 de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_2(1) = 1$, $\sigma_2(2) = 3$ et $\sigma_2(3) = 2$

$q_{1\sigma_2(1)} = 2$, $q_{2\sigma_2(2)} = 2$, $q_{3\sigma_2(3)} = 4$. $2 \times 2 \times 4 > 0$.

Posons $d = \min\{2,2,4\}$. $d = 2$.

Posons $R = \Phi - d\,P_{\sigma_2}$. $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $R \in E_3^+ - \{0\}$

Considérons la permutation σ_3 de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_3(1) = 3$, $\sigma_3(2) = 1$, $\sigma_3(3) = 2$

$r_{1\sigma_3(1)} = 2$ $r_{2\sigma_3(2)} = 3$ $r_{3\sigma_3(3)} = 2$. Posons $e = \min(2,3,2)$; $e = 2$.

Posons $S = R - e\,P_{\sigma_3}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S = P_{\sigma_4}$ avec σ_4 permutation de $[\![1,3]\!]$ définie par $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_3(2) = 1$ et $\sigma_4(3) = 3$.

Finalement $M = P_{\sigma_1} + 2P_{\sigma_2} + 2P_{\sigma_3} + P_{\sigma_4}$ ou

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ avec

$\sigma_1(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma_1(3) = 1$, $\sigma_2(1) = 1$, $\sigma_2(2) = 3$, $\sigma_2(3) = 2$, $\sigma_3(1) = 3$, $\sigma_3(2) = 1$, $\sigma_3(3) = 2$

$\sigma_4(1) = 2$, $\sigma_4(2) = 1$, $\sigma_4(3) = 3$.

(Q3) Observons d'abord que comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sont deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle v_k$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle^2$. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle \langle y, u_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle \langle y, v_k \rangle$

a) Pour simplifier posons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = (\langle u_i, v_j \rangle)^2$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \langle v_i, u_k \rangle^2 = \|v_i\|^2 = 1$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, u_j \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle u_j, v_k \rangle^2 = \|u_j\|^2 = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} = 1$. Ainsi $M_{u,v} \in E_n$ et $\omega(M_{u,v}) = 1$

De plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \langle v_j, u_j \rangle^2 \geq 0$.

Ainsi $M_{u,v} \in E_n^+$ et $\omega(M_{u,v}) = 1$. ⚠ oubli...

b) Posons $M_{u,v}\Lambda = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle^2 \lambda_j$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle u_j$ donc $s(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle s(u_j)$;

ainsi $s(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle \lambda_j u_j$.

Alors $\langle v_i, s(v_i) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle \langle v_i, u_j \rangle \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, u_j \rangle^2 \lambda_j = t_i$.

Finalement $\begin{pmatrix} \langle s(v_1), v_1 \rangle \\ \langle s(v_2), v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n), v_n \rangle \end{pmatrix} = M_{uv}\Lambda$.

⚠ oubli

Supposons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle v_i, u_j \rangle^2 = \langle u_{\sigma(i)}, u_j \rangle^2 = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(i) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Ainsi $M_{u,v} = P_\sigma$.

---

c) $M_{vv} \in E_n^+$ et $M_{uv} \neq 0$ car $\omega(M_{vv}) = 1$!

Alors $M_{vv} \in E_n^+ - \{0\}$. Soit f une forme linéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $M_{vv} = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}$ avec $p \in [\![1, n^2-n+1]\!]$ et $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_\ell \in \mathfrak{S}_n$.

$M_{uv}\Lambda = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}\Lambda$; $f(M_{uv}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda)$.

Notons que $\omega(M_{uv}) = 1$ donc $1 = \omega\left(\sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell P_{\sigma_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell \omega(P_{\sigma_\ell}) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell$.

Ainsi $\sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell = 1$.

$\exists \sigma' \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, $f(P_{\sigma'}\Lambda) = \max\{f(P_{\sigma_1}\Lambda), f(P_{\sigma_2}\Lambda), \dots, f(P_{\sigma_p}\Lambda)\}$

$\exists \sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, $f(P_\sigma\Lambda) = \min\{f(P_{\sigma_1}\Lambda), f(P_{\sigma_2}\Lambda), \dots, f(P_{\sigma_p}\Lambda)\}$

Rappelons que $\forall \ell \in [\![1,p]\!]$ $\alpha_\ell > 0$.

Alors $f(P_\sigma\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} (\alpha_\ell f(P_\sigma\Lambda)) \leq \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda) = f(M_{uv}\Lambda)$ et

$f(P_{\sigma'}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma'}\Lambda) \geq \sum_{\ell=1}^{p} \alpha_\ell f(P_{\sigma_\ell}\Lambda) = f(M_{uv}\Lambda)$

Ainsi $\forall f \in \mathcal{L}(M_{n,1}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, $\exists (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, $f(P_\sigma\Lambda) \leq f(M_{uv}\Lambda) \leq f(P_{\sigma'}\Lambda)$.

---

d) Posons $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $f(x) = \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell$. f est clairement une forme linéaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

et $f(M_{uv}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \langle A(v_\ell), v_\ell \rangle$. Alors il existe deux permutations σ et σ'

de $[\![1,n]\!]$ telles que : $f(P_\sigma\Lambda) \leq f(M_{uv}\Lambda) \leq f(P_{\sigma'}\Lambda)$

$f(P_\sigma\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma(\ell)}$ et $f(P_{\sigma'}\Lambda) = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma'(\ell)}$ (calcul vu plus haut).

Rappelons que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Alors $\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma(\ell)} \geq \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell$ et

$\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{\sigma'(\ell)} \leq \lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_{n-r+1} = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_{n-r+\ell}$ car la somme de r éléments quelconques de la suite $(\lambda_k)_{k\in [\![1,n]\!]}$ est plus petite que la somme des éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![n-r+1,n]\!]}$ et plus grande que la somme des éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\in[\![1,r]\!]}$ $(\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n)$.

$$\forall r\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \leq \sum_{k=1}^{r}\langle s(v_k),v_k\rangle \leq \sum_{k=1}^{r}\lambda_{n-r+k} = \sum_{k=n-r+1}^{n}\lambda_k$$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $s(v_j)=\sum_{i=1}^{n}\langle s(v_j),v_i\rangle v_i$ car $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. La matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est $(\langle s(v_j),v_i\rangle)$

Alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\langle s(v_k),v_k\rangle$ est le $k^{\text{ième}}$ élément de la diagonale de la matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

donc la somme des r premiers éléments de la diagonale de la matrice de s dans la base $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ est plus petite que $\sum_{k=n-r+1}^{n}\lambda_k$ et plus grande que $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k$ et ceci pour tout $r\in[\![1,n]\!]$.

Remarque.. Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice symétrique. Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP=\mathrm{Diag}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ avec $\sigma_1\leq\sigma_2\leq\cdots\leq\sigma_n$.

(*) le résultat précédent permet de dire que : $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\sum_{k=1}^{r}\sigma_k \leq \sum_{k=1}^{r}a_{k,k} \leq \sum_{k=n-r+1}^{n}\sigma_k$.

Très grossièrement nous pouvons dire que si $r\in[\![1,n]\!]$, la somme des r premiers éléments diagonaux de A est plus petite que la somme des r plus grandes valeurs propres de A et plus grande que la somme des r plus petites valeurs propres de A... en considérant que A admet n valeurs propres (pas nécessairement distinctes).

Remarque.. Pour montrer (*) il suffit de considérer un endomorphisme s de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormale ...

PARTIE III

Q1 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posons $P_\sigma = (p_{ij})$ et $P_{\sigma^{-1}} = (q_{ij})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$P_\sigma M = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik} m_{kj}\right) = (m_{\sigma(i)\, j})$ et $M P_{\sigma^{-1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} q_{kj}\right) = (m_{i\, \sigma(j)})$.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P_\sigma M = (m_{\sigma(i)\, j})$ et $M P_{\sigma^{-1}} = (m_{i\,\sigma(j)})$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$P_\sigma M$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la $i^{ème}$ ligne de $P_\sigma M$ est la $\sigma(i)^{ème}$ ligne de M. On passe de M à $P_\sigma M$ en faisant opérer σ sur les lignes de M.

De même

$M P_{\sigma^{-1}}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ la $j^{ème}$ colonne de $M P_\sigma$ est la $\sigma(j)^{ème}$ colonne de M. On passe de M à $M P_\sigma$ en faisant opérer σ sur les colonnes de M.

Q2 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient une matrice nulle de type (p,q). En supprimant $n-p$ lignes d'indices $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-p}$ et $n-q$ colonnes d'indices $c_1, c_2, \dots, c_{n-q}$ on obtient la matrice nulle.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \notin \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-p}\}$ et $j \notin \{c_1, c_2, \dots, c_{n-q}\}$ on a $m_{ij} = 0$. Posons $I = [\![1,n]\!] - \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{n-p}\}$ et

$J = [\![1,n]\!] - \{c_1, c_2, \dots, c_{n-q}\}$. $\operatorname{card} I = p$ et $\operatorname{card} J = q$.

$I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ et $J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ avec $j_1 < j_2 < \dots < j_q$

Notons que si $(i,j) \in I \times J$ $m_{ij} = 0$.

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![1,p]\!], \sigma(k) = i_k$.

Soit $\hat\sigma$ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![n-q+1,n]\!], \hat\sigma(k) = j_k$.

Posons $T = P_\sigma M P_{\sigma'}$ avec $\sigma' = \hat\sigma^{-1}$. $T = (t_{ij})$

Montrons alors que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![n-q+1,n]\!]$, $t_{ij} = 0$.

Posons $P_\sigma = (p_{ij})$ et $P_{\sigma'} = (q_{ij})$

Soit $(i,j)\in [\![1,p]\!]\times[\![n-q+1,n]\!]$. $\sigma' = \hat{\sigma}^{-1}$ donc $\sigma'^{-1}=\hat{\sigma}$.

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(p_{ik}\sum_{\ell=1}^{n} m_{k\ell}\, q_{\ell j}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} m_{\sigma(i)\ell}\, q_{\ell j} = m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)} = m_{\sigma(i)\hat{\sigma}(j)}.$$

Or $\sigma(i)\in\{i_1,\dots,i_p\}=I$ et $\sigma'^{-1}(j)\in\{j_1,j_2,\dots,j_q\}=J$ donc $m_{\sigma(i)\hat{\sigma}(j)}=0$.

On a bien $t_{ij}=0$ si $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![n-q+1,n]\!]$.

Posons alors $X=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1\,n-q} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & \cdots & t_{p\,n-q}\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} t_{p+1,n-q+1} & \cdots & t_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n,n-q+1} & \cdots & t_{n,n}\end{pmatrix}$

et $Z=\begin{pmatrix} t_{p+1,1} & \cdots & t_{p+1,n-q} \\ \vdots & & \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n-q}\end{pmatrix}$.

Alors $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y\end{array}\right)$ avec $X\in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y\in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z\in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$.

Si $M\in M_n(\mathbb{R})$ et si M contient une sous-matrice nulle du type (p,q) alors il existe deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y\end{array}\right)$ avec $X\in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y\in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z\in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$.

b) Reprenons la totalité du a) et supposons que $M\in E_n^+-\{0\}$.

Alors $T=P_\sigma M P_{\sigma'}\in E_n^+-\{0\}$. La somme des coefficients de T est $n\,\omega(T)$.

Notons α,β,γ la somme des coefficients de X, Y et Z. $\alpha+\beta+\gamma=n\,\omega(T)$

$\alpha+\gamma=(n-q)\,\omega(T)$ (somme des coef des $n-q$ premières colonnes de T).

$\beta+\gamma=(n-p)\,\omega(T)$ (somme des coef des $n-p$ dernières lignes de T).

Alors $((n-q)+(n-p))\,\omega(T)=\alpha+\beta+\gamma+\gamma\geq\alpha+\beta+\gamma=n(\omega(T))$.

Or $T\in E_n^+-\{0\}$ donc $\omega(T)>0$. Ainsi $n-q+n-p\geq n$; $\underline{p+q\leq n}$.

... ou $n\,\omega(T)=\alpha+\beta+\gamma\geq\alpha+\beta=p\,\omega(T)+q\,\omega(T)$ donc $n\geq p+q$ car $\omega(T)>0$.

(Q3) a) Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_2$, $m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} = 0$.

soit $\sigma \in \mathfrak{S}_2$. ou $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 2$ alors $m_{11} m_{22} = 0$

ou $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$ alors $m_{12} m_{21} = 0$.

Ainsi $m_{11} m_{22} = m_{12} m_{21} = 0$

Alors $M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}$

dans les quatre cas M contient une sous-matrice nulle du type $(2,1)$ ou $(1,2)$

donc du type (p,q) avec $p+q = 3 = 2+1$!

<u>$(\mathcal{H}_2)$ est vraie.</u>

<u>b)</u> $M \in M_n(\mathbb{R})$ et M vérifie $(\mathcal{H}_n)$.

■ si M est nulle M contient une sous-matrice de type $(n-1, n-1)$!

cette sous-matrice est nécessairement nulle et vérifie donc très largement $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Supposons $M \neq 0$. Alors $\exists (r,s) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{r,s} \neq 0$.

Considérons la sous matrice $\widehat{M}$ la matrice déduite de M en supprimant

la $r^{ième}$ ligne de M et sa $s^{ième}$ colonne.

$\widehat{M}$ est une sous-matrice de M de type $(n-1, n-1)$. Vérifions qu'elle

possède la propriété $(\mathcal{H}_{n-1})$.

Soit σ une permutation de $[\![1,n-1]\!]$. Montrons que $\prod_{i=1}^{n-1} \widehat{m}_{i\sigma(i)} = 0$

notons alors qu'il existe $n-1$ éléments distincts $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}, c_{r+1}, \dots, c_n$ de $[\![1,n]\!] - \{s\}$

tels que $\{\widehat{m}_{1\sigma(1)}, \widehat{m}_{2\sigma(2)}, \dots, \widehat{m}_{n-1\,\sigma(n-1)}\} = \{m_{1c_1}, m_{2c_2}, \dots, m_{r-1\,c_{r-1}}, m_{r+1\,c_{r+1}}, m_{n,c_n}\}$

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\tau(i) = \begin{cases} s & \text{si } i = r \\ c_i & \text{si } i \neq r \end{cases}$.

Alors τ est clairement une permutation de $[\![1,n]\!]$. Rappelons que M vérifie $(\mathcal{H}_n)$.

Ainsi $\prod_{i=1}^{n} m_{i\tau(i)} = 0$. Or $\prod_{i=1}^{n} m_{i\tau(i)} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \hat{m}_{i\sigma(i)}\right) \times m_{rs}$.

Comme $m_{rs} \neq 0$: $\prod_{i=1}^{n-1} \hat{m}_{i\sigma(i)} = 0$. Ainsi $\hat{m}_{1\sigma(1)}\hat{m}_{2\sigma(2)}\cdots\hat{m}_{n-1\,\sigma(n-1)} = 0$ et

ceci pour toute permutation σ de $[\![1,n-1]\!]$. Alors $\hat{M}$ vérifie $\mathcal{H}_{n-1}$.

<u>Il existe bien une sous-matrice de M de type $(n-1,n-1)$ qui vérifie $(\mathcal{H}_{n-1})$.</u>

■ Soit $\hat{M}$ une sous-matrice de M de type $(n-1,n-1)$ qui vérifie $(\mathcal{H}_{n-1})$.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $\hat{M}$ contient une sous-matrice nulle $\check{M}$ de type (p,q) avec $p+q=n-1+1$ $\check{M}$ est encore une sous-matrice de M de type (p,q) avec $p+q=n$.

Donc M contient une sous-matrice nulle du type (p,q) avec $p+q=n$.

Il résulte alors de Q2 qu'il existe deux permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$ et deux éléments (p,q) de $[\![1,n]\!]^2$ tels que 1°/ $p+q=n$ et

2°/ $P_\tau M P_{\tau'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in M_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{n-p,q}(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$

i.e. $X \in M_p(\mathbb{R})$, $Y \in M_q(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.

■ $M = (m_{ij})$ alors $T = P_\tau M P_{\tau'} = (t_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)}$.

Soit τ une permutation de $[\![1,n]\!]$.

$$\prod_{i=1}^{n} t_{i\tau(i)} = \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(\tau(i))} \underset{\uparrow}{=} \prod_{\ell=1}^{n} m_{\ell,\sigma'^{-1}\circ\tau\circ\sigma^{-1}(\ell)} \underset{\uparrow}{=} 0.$$

$\ell = \sigma(i)$ ou $i = \sigma^{-1}(\ell)$

M vérifie $(\mathcal{H}_n)$ et $\sigma'^{-1}\circ\tau\circ\sigma^{-1}$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Ainsi T vérifie ($\mathcal{H}_n$)

Montrons que X vérifie ($\mathcal{H}_p$) ou que Y vérifie ($\mathcal{H}_q$). $X = (x_{i,j})$ et $Y = (y_{i,j})$.

Si Y vérifie ($\mathcal{H}_q$) c'est clair. Supposons que Y ne vérifie pas ($\mathcal{H}_q$) et montrons que X vérifie ($\mathcal{H}_p$).

Il existe une permutation φ de $[\![1,q]\!]$ telle que $\prod_{i=1}^{q} y_{i\varphi(i)} \neq 0$.

Alors $\prod_{i=1}^{q} t_{i+p,\varphi(i)+p} \neq 0$. ($y_{ij} = t_{i+p,j+p} \cdots$).

Soit φ' une permutation de $[\![1,p]\!]$. Posons $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\psi(\ell) = \begin{cases} \varphi'(\ell) & \text{si } \ell \leq p \\ \varphi(\ell-p)+p & \text{si } \ell > p. \end{cases}$

Alors ψ est clairement une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Donc $\prod_{i=1}^{n} t_{i\psi(i)} = 0$. Alors $\left(\prod_{i=1}^{p} x_{i\varphi'(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{q} y_{i\varphi(i)}\right) = 0$.

Comme le second terme du produit est non nul, le premier est nul.

Pour toute permutation φ' de $[\![1,p]\!]$, $x_{1\varphi'(1)} \cdots x_{p\varphi'(p)} \neq 0$.

Alors X vérifie ($\mathcal{H}_p$).

Ainsi <u>X vérifie ($\mathcal{H}_p$) ou Y vérifie ($\mathcal{H}_q$).</u>

■ Supposons que X vérifie ($\mathcal{H}_p$). On pourra soit faire une démonstration analogue dans le cas où Y vérifie ($\mathcal{H}_q$) ou se ramener à ce cas par "transposition"...

Montrons que M contient une sous-matrice nulle de type (p',q') telle que $p'+q' = n+1$. Il suffit de montrer que cela est vrai pour $T = P_\tau M P_{\tau'}$

car 1°._ $M = P_{\tau^{-1}} T P_{\tau'^{-1}}$

2°._ lorsque l'on multiplie une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ par une matrice de permutation on ne fait qu'échanger l'ordre de ses colonnes ou de ses lignes.

$p\in\mathbb{N}^*$ et $q=n-p\in\mathbb{N}^*$ donc $p\in[\![1,n-1]\!]$. Supposons que $p\geq 2$.

Or X est une matrice de $M_p(\mathbb{R})$ qui vérifie $(\mathcal{H}_p)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi il existe une sous-matrice nulle de X de type (r,s) avec $r+s=p+1$. Si $p=1$: $X=0_{M_1(\mathbb{R})}$ car X vérifie $(\mathcal{H}_1)$ et le résultat vaut encore.

Notons $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{p-r}$ les "numéros" des lignes et $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{p-s}$ les numéros des colonnes qu'il faut supprimer pour obtenir cette sous matrice nulle ... à un abus près...

Si nous retirons à T les lignes numéro $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{p-r}$ et les colonnes numéro $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{p-s}$ et les lignes $p+1,p+2,\dots,n$ il nous reste une matrice nulle ayant r lignes et $n-p+s$ colonnes.

Donc T possède une sous-matrice nulle de type $(r,n-p+s)$

Posons $p'=r$ et $q'=n-p+s$. $p'\in\mathbb{N}^*$, $q'\in\mathbb{N}^*$ et $p'+q'=n-p+r+s=n-p+p+1=n+1$

Ainsi T possède une sous-matrice nulle du type (p',q') avec $p'+q'=n+1$.

Alors <u>M possède une sous-matrice nulle du type (p',q') avec $p'+q'=n+1$.</u>

<u>Ceci achève la récurrence qui montre la propriété $(\mathcal{P})$.</u>

Q4 Soit $M\in E_n^+\setminus\{0\}$. Si M vérifie $(\mathcal{H}_n)$, alors M contient une matrice nulle de type (p,q) avec $p+q=n+1$ donc avec $p+q>n$ et ceci contredit le résultat de III Q2 b)

Ainsi <u>M ne vérifie pas $(\mathcal{H}_n)$ donc $\exists\,\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que $m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)}\cdots m_{n\sigma(n)}>0$</u>