PARTIE I Représentation intégrale d'une fonction puissance.

Question préliminaire..

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $\psi_x(t) = \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)$. Montrons que $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$ converge. Notons que ψ_x est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\psi_x(t) = \frac{xt+t^2-1-t^2}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) = \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $|\psi_x(t)| = \frac{|xt-1|}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) \leq \frac{xt+1}{x+t}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2}$.

$\left\{\begin{array}{l} |xt-1| \leq |xt|+|-1| = xt+1 \\ \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0 \end{array}\right.$

Pas de panique ! ceci est pour la fin. On peut obtenir le résultat à l'aide d'équivalents en 0 et $+\infty$

Posons $C_x = \operatorname{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq xt+1 \leq C_x t + 1$.

$C_x \geq \frac{1}{x} > 0$ donc $x \geq \frac{1}{C_x} > 0$; alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $x+t \geq \frac{1}{C_x} + t > 0$.

Donc $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{\frac{1}{C_x}+t} = \frac{C_x}{C_x t + 1}$

Résumons : $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq xt+1 \leq C_x t+1$, $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{C_x}{C_x t+1}$ et $\frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0$

Alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq \frac{xt+1}{x+t}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2} \leq \frac{C_x(C_x t+1)}{C_x t+1}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2} = C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$.

1) $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

1), 2) et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que les intégrales $\int_0^1 |\psi_x(t)|\,dt$ et $\int_1^{+\infty} |\psi_x(t)|\,dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |\psi_x(t)|\,dt$ converge. $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$ est alors absolument convergente donc convergente

Finalement, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$ converge.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q1 Soit α dans $\mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ ①

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}} \quad ②$$

①, ② et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que : $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$

Le cours indique que 1) $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$ ie $\alpha > -1$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ ie $\alpha < 1$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1,1[$.

Q2 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^0\,dt = \int_0 \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ ... le ε n'est pas indispensable ...

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2| - \ln|x+t|\right]_\varepsilon^A = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{x+t}\right)\right]_\varepsilon^A.$$

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \ln \frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} - \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon}$$

$\frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} \underset{A \to +\infty}{\sim} \frac{A}{A} = 1$. Donc $\lim_{A \to +\infty} \ln \frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} = 0$. De plus $\lim_{\varepsilon \to 0} \ln\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon}\right) = \ln \frac{1}{x}$.

Alors $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = 0 - \ln \frac{1}{x} = \ln x$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_0(x) = \ln x$.

Soit $x\in]0,+\infty[$

Q3 $\alpha\in]-1,0[\subset]-1,1[$ donc $\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)t^\alpha\,dt$ converge.

$\alpha+1\in]0,1[\subset]-1,1[$ donc $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$ converge d'après Q1.

Alors par différence $\int_0^{+\infty}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}-\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)t^\alpha\right]dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$ converge.

Soit ε et A deux éléments de $]0,+\infty[$ tels que $\varepsilon<A$.

$t\mapsto\frac{t}{x}$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon,A]$. Ceci autorise le changement de variable $u=\frac{t}{x}$ donc $\int_\varepsilon^A\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt=\int_{\varepsilon/x}^{A/x}\frac{(ux)^\alpha}{x+ux}\,x\,du=x^\alpha\int_{\varepsilon/x}^{A/x}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du$.

$\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ (faire $x=1$ dans ce qui précède).

De plus $\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{x}=+\infty$ (car $x>0$) et $\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon}{x}=0$.

Alors $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt=x^\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du$.

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt=x^\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du$.

Soit $x\in]0,+\infty[$. Rappelons que $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$ convergent.

Ainsi $f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)t^\alpha\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$

$f_\alpha(x)=-x^\alpha\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du+\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$.

Posons $c=-\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{1+u}\,du$ et $d=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}\,dt$. $f_\alpha(x)=c\,x^\alpha+d$.

Notons que $\forall t \in]0,+\infty[$, $\frac{u^\alpha}{1+u} \geqslant 0$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du > 0$.

Ainsi $c = -\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du < 0$.

$\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$ et $c < 0$.

Q4) a) Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit h un réel non nul tel que $x+h>0$.

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{h}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \frac{t^\alpha}{x+h+t} - \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} + \frac{t^\alpha}{x+t}\right]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{h}\,\frac{x+h+t-x-t}{(x+h+t)(x+t)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,dt.$$

Montrons alors que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

Commençons par montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

$\rightarrow$ $t \mapsto \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

$\rightarrow$ $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2} t^\alpha = \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$

$\rightarrow$ $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge car $-\alpha < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge car $2-\alpha > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

Posons $\Delta(h) = \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha \left(\frac{x+t-(x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right) dt$$

$$\Delta(h) = -h \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \quad ; \quad |\Delta(h)| = |h| \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \right| .$$

$\forall t \in]0,+\infty[$, $x+h+t \geqslant x+h > 0$ et $(x+t)^2 > 0$

$\forall t \in]0,+\infty[$, $(x+h+t)(x+t)^2 \geqslant (x+h)(x+t)^2 > 0$

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{(x+h+t)(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(x+h)(x+t)^2}$ et $t^\alpha \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x+h} \, \dfrac{t^\alpha}{(x+t)^2}$.

Alors $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ car les deux intégrales convergent.

Finalement $|\Delta(h)| = |h| \left| \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \right| = |h| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \leqslant \frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

Ainsi $\forall h \in]-x,0[\cup]0,+\infty[$, $\left| \dfrac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt \right| \leqslant \dfrac{|h|}{x+h} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

a $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt \right) = 0$

Donc par encadrement on a : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

Ainsi f_α est dérivable en x et $f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

f_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ tel que $\varepsilon < A$.

$t \mapsto \frac{t}{x}$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$. Ceci autorise le changement de variable $u = t/x$ dans $\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{(xu)^\alpha}{(x+xu)^2}\, x\,du = x^{\alpha-1}\int_{\varepsilon/x}^{A/x}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du.$$

Or $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du$ convergent, $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x} = 0$ et $\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{x} = +\infty$ $\overset{d}{\underset{u\geq 0}{}}$

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du$; $f_\alpha'(x) = f_\alpha'(1)\,x^{\alpha-1}$.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha'(x) = f_\alpha'(1)\,x^{\alpha-1}.}$

Alors $\exists d \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = \frac{f_\alpha'(1)}{\alpha}x^\alpha + d.$

Posons $c = \frac{f_\alpha'(1)}{\alpha}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$ et $c = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du > 0$.

Par conséquent : $\underline{\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = cx^\alpha + d \text{ avec } c > 0.}$

PARTIE II : Les matrices symétriques réelles

Q1 a) • Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = \lambda X$.

Alors $\lambda \|X\|^2 = \lambda\, {}^tX X = {}^tX(\lambda X) = {}^tX A X$; $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|^2}$ car $\|X\|^2 \neq 0$ puisque X n'est pas nul(le).

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne encore ${}^tXAX > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|^2} > 0$.

Les valeurs propres de A sont strictement positives.

• Supposons que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que les valeurs propres de A sont strictement positives. Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrons que ${}^tXAX > 0$

$X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, X_i \rangle X_i$. $AX = \sum_{i=1}^{n} \langle X, X_i \rangle AX_i = \sum_{i=1}^{n} \langle X, X_i \rangle \lambda_i X_i$.

Alors ${}^tXAX = \langle X, AX \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left[(\langle X, X_i \rangle)(\langle X, X_i \rangle \lambda_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\langle X, X_i \rangle)^2$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $(\langle X, X_i \rangle)^2 \geqslant 0$ donc ${}^tXAX \geqslant 0$.

Supposons ${}^tXAX = 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i(\langle X, X_i \rangle)^2 \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\langle X, X_i \rangle)^2 = 0$

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i(\langle X, X_i \rangle)^2 = 0$. Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(\langle X, X_i \rangle)^2 = 0$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\langle X, X_i \rangle = 0$.

Par conséquent $X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, X_i \rangle X_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc ${}^tXAX > 0$. Ceci achève de montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Finalement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: <u>($A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff$ toute valeur propre de A est strictement positive.</u>

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$a\,{}^tXAX = a\,(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\,(x\ y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} = a\left[ax^2+bxy+byx+cy^2\right]$

$a\,{}^tXAX = a^2x^2+2abxy+acy^2 = (ax+by)^2 - b^2y^2 + acy^2 = (ax+by)^2+(ac-b^2)y^2$.

$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}),\ \forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ a\,{}^tXAX = (ax+by)^2+(ac-b^2)y^2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

- Supposons que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et. $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Donc ${}^tXAX > 0$

$0 < {}^tXAX = (1\ 0)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a$; $\underline{a > 0.}$

Posons $Z = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $Z \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Z \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tZAZ > 0$.

Alors $a\,{}^tZAZ > 0$ car $a > 0$.

De plus $a\,{}^tZAZ = (a(-b)+b(a))^2+(ac-b^2)a^2 = (ac-b^2)a^2$.

Alors $a^2 > 0$ et $(ac-b^2)a^2 > 0$; ainsi $\underline{ac-b^2 > 0.}$

- Réciproquement supposons $a > 0$ et $ac-b^2 > 0$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\}$.

  $a\,{}^tXAX = (ax+by)^2+(ac-b^2)y^2 \geq 0$ et $a > 0$ donc ${}^tXAX \geq 0$.

  Supposons ${}^tXAX = 0$. Alors $a\,{}^tXAX = 0$.

Donc $(ax+by)^2+(ac-b^2)y^2 = 0$ avec $(ax+by)^2 \geq 0$ et $(ac-b^2)y^2 \geq 0$.

Alors $(ax+by)^2 = (ac-b^2)y^2 = 0$. Or $ac-b^2 > 0$.

Donc $y^2 = 0$ et $(ax+by)^2 = 0$. $y = 0$ et $ax = 0$; $x = y = 0$ car $a > 0$.

Or $X \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$! Ainsi ${}^tXAX > 0$. Ceci achève de montrer que

$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Finalement si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a>0 \text{ et } ac-b^2>0)$.

Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant a) et le fait que les valeurs propres de $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont les zéros de $P = X^2-(a+c)X+ac-b^2$.

Q2 a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $2>0$ et $2\times 1 - 1^2 = 1 > 0$; $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $4>0$ et $4\times\frac{5}{3}-0^2=\frac{20}{3}>0$; $B \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

$B-A=\begin{pmatrix} 4-2 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3}-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. $B-A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $2>0$ et $2\times\frac{2}{3}-(-1)^2=\frac{1}{3}>0$; $B-A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ donc $A<B$.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $A<B$.

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B^2=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{pmatrix}$.

Notons que $A^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $B^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$B^2-A^2=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \frac{25}{9} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$. Notons que $B^2-A^2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

mais $11\times\frac{7}{9}-(-3)^2=\frac{77}{9}-9=\frac{-4}{9}<0$ donc $B^2-A^2 \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

On n'a pas $A^2<B^2$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

i) • Les valeurs propres de A sont strictement positives. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de A ; A est inversible.

• ${}^tA^{-1}=({}^tA)^{-1}\underset{A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}{=}A^{-1}$ donc $A^{-1}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

remarque que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Posons $Y = A^{-1}X$. $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ($Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow A^{-1}X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car A^{-1} est inversible). Notons que $X = AY$.

Alors ${}^tXA^{-1}X = {}^t(AY)A^{-1}AY = {}^tY\,{}^tA\,Y = {}^tYAY > 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Finalement $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXA^{-1}X > 0)$.

Donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque... On aurait pu utiliser, après l'avoir montré, que
$\mathrm{Sp}\,A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}\,;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,A\}$ ... alors $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathbb{R}_+^*$ donne $\mathrm{Sp}\,A^{-1} \subset \mathbb{R}_+^*$.

ii) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\phi_X^A(A^{-1}X+H) = 2\,{}^tX(A^{-1}X+H) - {}^t(A^{-1}X+H)A(A^{-1}X+H)$

$\phi_X^A(A^{-1}X+H) = 2\,{}^tXA^{-1}X + 2\,{}^tXH - ({}^tX\,{}^tA^{-1} + {}^tH)(X+AH)$. Notons que ${}^tA^{-1} = A^{-1}$.

$\phi_X^A(A^{-1}X+H) = 2\,{}^tXA^{-1}X + 2\,{}^tXH - {}^tXA^{-1}X - {}^tHX - {}^tXA^{-1}AH - {}^tHAH$.

Notons que ${}^tHX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors ${}^tHX = {}^t({}^tHX) = {}^tXH$.

Ainsi $\phi_X^A(A^{-1}X+H) = {}^tXA^{-1}X - {}^tHAH$ ... pour tout H dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Mais $\phi_X^A(A^{-1}X) = \phi_X^A(A^{-1}X+0) = {}^tXA^{-1}X + {}^t0A0 = {}^tXA^{-1}X$!!

Donc $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X+H) = \phi_X^A(A^{-1}X) - {}^tHAH$.

$\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X+H) - \phi_X^A(A^{-1}X) = -{}^tHAH$.

$\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tHAH > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $\phi_X^A(A^{-1}X+H) < \phi_X^A(A^{-1}X)$.

Alors ϕ_X^A admet en $A^{-1}X$ un maximum (strict) qui vaut ${}^tXA^{-1}X$ et ceci

pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

iii) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A < B$.

Alors $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc ${}^tY(B-A)Y > 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc ${}^tYBY > {}^tYAY$. Alors $\phi_X^A(Y) = 2{}^tXY - {}^tYAY > 2{}^tXY - {}^tYBY = \phi_X^B(Y)$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ϕ_X^A (resp. ϕ_X^B) atteint son maximum en $Y_A = A^{-1}X$ (resp. $Y_B = B^{-1}X$) et il vaut ${}^tXA^{-1}X$ (resp. ${}^tXB^{-1}X$).

Supposons $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $Y_A \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y_B \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}}(\mathbb{R})$ car A^{-1} et B^{-1} sont inversibles.

Ainsi $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $\phi_X^A(Y_A) \geq \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)$.

Donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXA^{-1}X = \phi_X^A(Y_A) > \phi_X^B(Y)$.

En particulier : ${}^tXA^{-1}X = \phi_X^A(Y_A) > \phi_X^B(Y_B) = {}^tXB^{-1}X$; ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})X > 0$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tX(A^{-1} - B^{-1})X > 0$; $A^{-1} - B^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ▲. $B^{-1} < A^{-1}$.

Finalement : $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\quad A < B \Rightarrow B^{-1} < A^{-1}$.

▲ A et B sont deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en est de même alors pour A^{-1} et B^{-1}. Alors $A^{-1} - B^{-1}$ est encore une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $A^{-1} - B^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Trois remarques pour aborder la partie III

Remarques. – **1.** Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons φ_M et φ_N les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ayant respectivement pour matrices M et N dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $M_{\mathcal{B}_0}(\varphi_M(X)) = M\, M_{\mathcal{B}_0}(X)$.

Or $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M_{\mathcal{B}_0}(Z) = Z$ donc $\varphi_M(X) = MX$!

$\underline{\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \varphi_M(X) = MX.}}$ De même $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi_N(X) = NX$.

Alors $M = N \Leftrightarrow \varphi_M = \varphi_N \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi_M(X) = \varphi_N(X) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MX = NX$.

Finalement $\underline{\underline{\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = N \Leftrightarrow (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MX = NX).}}$

2. Supposons que $F_1, F_2, \ldots, F_p$ soient p sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$. M et N sont toujours deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $M = N$: $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in F_k$, $MX_k = NX_k$.

Réciproquement supposons que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in F_k$, $MX_k = NX_k$. Montrons que $M = N$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists! (X_1, \ldots, X_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_p$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $MX_k = NX_k$ donc $MX = \sum_{k=1}^{p} MX_k = \sum_{k=1}^{p} NX_k = NX$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX = NX$ donc $M = N$.

Ainsi $\underline{\underline{M = N \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall X_k \in F_k,\ MX_k = NX_k.}}$

3. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux à deux orthogonaux et tels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $F_i^{\perp} = \bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} F_k$ <u>car</u> $\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} F_k$ est un supplémentaire de F_i et est orthogonal à F_i (avec un petit abus si $p = 1$...).

PARTIE III Monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Q1) a) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $AX_k = \lambda_k X_k$.

$E_{\lambda_i}^{\perp}(A) = \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_{\lambda_j}(A)$ (Remarque 3)

$\forall k \in [\![1,p]\!]$ $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $\Pi_i X_k = \begin{cases} X_k & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k\neq i \end{cases}$.

Alors $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i\right) X_k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i X_k = \lambda_k X_k = AX_k$.

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i\right) X_k = AX_k$.

D'après les remarques précédentes ceci suffit pour dire que $\underline{\underline{A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i}}$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$

b) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $\left(\sum_{i=1}^{p} \Pi_i\right) X_k = \sum_{i=1}^{p} \Pi_i X_k = X_k = I_n X_k$.

Ceci suffit encore pour dire que $\underline{\underline{I_n = \sum_{i=1}^{p} \Pi_i}}$ ... car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$.

c) Soit t un réel et B la matrice $A + tI_n$. Posons $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mu_k = \lambda_k + t$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. $\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $BX_k = (A+tI_n)X_k = AX_k + tX_k = \lambda_k X_k + tX_k$
$= (\lambda_k + t)X_k = \mu_k X_k$

$\forall X_k \in E_{\lambda_k}(A)$, $BX_k = \mu_k X_k$ et $E_{\lambda_k}(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$

Ainsi 1) $\underline{\mu_k \text{ est valeur propre de } B}$

2) $E_{\lambda_k}(A) \subset E_{\mu_k}(B)$.

Réciproquement soit $Y_k \in E_{\mu_k}(B)$. $BY_k = \mu_k Y_k$; $(A+tI_n)Y_k = \mu_k Y_k = (\lambda_k + t)Y_k$;

ainsi $AY_k + tY_k = \lambda_k Y_k + tY_k$; $AY_k = \lambda_k Y_k$; $Y_k \in E_{\lambda_k}(A)$.

Finalement $\underline{E_{\lambda_k}(A) = E_{\mu_k}(B)}$.

Alors $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont p valeurs propres de B telles que $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$ et

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(A) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\mu_k}(B)$. Alors $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ sont LES p valeurs propres distinctes de B et $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$.

si $i \in [\![1,p]\!]$, $E_{\mu_i}(B) = E_{\lambda_i}(B)$ donc M_i est aussi la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\mu_i}(B)$ dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $B = \sum_{i=1}^{p} \mu_i M_i$ est la décomposition de B.

Pour tout t dans $\mathbb{R}$ la décomposition de $A + tI_n$ est $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t) M_i$.

Soit A un élément de S_n^{++} qui admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ ...

Q2 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrons que ${}^tM_i = M_i$ c'est à dire que M_i est symétrique.

Notons p_i la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$.

M_i est la matrice de p_i dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée (pour le produit scalaire canonique). Ainsi pour montrer que M_i est symétrique, il suffit de prouver que p_i est symétrique.

Soit $(X,Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$. $\exists (X',Y') \in E_{\lambda_i}(A)^2$, $\exists (X'',Y'') \in (E_{\lambda_i}(A)^{\perp})^2$, $X = X' + X''$ et $Y = Y' + Y''$. $p_i(X) = X'$ et $p_i(Y) = Y'$.

Alors $\langle p_i(X), Y\rangle = \langle X', Y' + Y''\rangle = \langle X', Y'\rangle + \langle X', Y''\rangle \overset{X' \text{ et } Y'' \text{ sont orthogonaux}}{=} \langle X', Y'\rangle$.

De même $\langle p_i(Y), X\rangle = \langle Y', X'\rangle$.

Alors $\langle p_i(X), Y\rangle = \langle X', Y'\rangle = \langle Y', X'\rangle = \langle p_i(Y), X\rangle = \langle X, p_i(Y)\rangle$.

Ceci achève de montrer que p_i est symétrique. Donc M_i est symétrique.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $M_i \in S_n(\mathbb{R})$.

Alors $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) M_i$ appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et :

$${}^t\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\, {}^tM_i = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) M_i = \tilde{f}(A). \text{ Donc } \tilde{f}(A) \in S_n(\mathbb{R}).$$

$\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(A) \in S_n(\mathbb{R})$.

Posons $B=\tilde{f}(A)$. Notons que $Sp\,B=\{f(\lambda_i)\,;\,i\in[\![1,p]\!]\}$ et que, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ $E_{f(\lambda_i)}(B)=E_{\lambda_i}(A)$.

$\Pi_k X=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq i\\ X & \text{si } k=i\end{cases}$

Soit $i\in[\![1,p]\!]$. $\forall X\in E_{\lambda_i}(A)$, $BX=\sum_{k=1}^{p} f(\lambda_k)\Pi_k X \overset{\downarrow}{=} f(\lambda_i)X$.

Alors $E_{\lambda_i}(A)\subset\{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid BX=f(\lambda_i)X\}$. Or $E_{\lambda_i}(A)\neq\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $\{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid BX=f(\lambda_i)X\}\neq\{0_E\}$. Alors $f(\lambda_i)$ est valeur propre B et

$E_{\lambda_i}(A)\subset\{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\mid BX=f(\lambda_i)X\}=E_{f(\lambda_i)}(B)$.

Alors $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\overset{p}{\underset{i=1}{\bigoplus}}E_{\lambda_i}(A)\subset\overset{p}{\underset{i=1}{\bigoplus}}E_{f(\lambda_i)}(B)\subset\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

↑ cette somme est bien directe car $f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_p)$ sont deux à deux distincts puisque $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_p$ et f est strictement monotone.

Alors $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\overset{p}{\underset{i=1}{\bigoplus}}E_{\lambda_i}(A)=\overset{p}{\underset{i=1}{\bigoplus}}E_{f(\lambda_i)}(B)$.

B ne peut donc pas avoir d'autres valeurs propres que $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\dots,f(\lambda_p)$.

Par conséquent $\underline{Sp\,\tilde{f}(A)=Sp\,B=\{f(\lambda_1),f(\lambda_2),\dots,f(\lambda_p)\}}$.

$\forall i\in[\![1,p]\!]$, $E_{\lambda_i}(A)\subset E_{f(\lambda_i)}(B)$.

En particulier $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\dim E_{\lambda_i}(A)\leq\dim E_{f(\lambda_i)}(B)$

Supposons qu'il existe k dans $[\![1,p]\!]$ tel que $\dim E_{\lambda_k}(A)<\dim E_{f(\lambda_k)}(B)$.

Alors $\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\sum_{i=1}^{p}\dim E_{\lambda_i}(A)<\sum_{i=1}^{p}\dim E_{f(\lambda_i)}(B)=\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!!

Ainsi $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $E_{\lambda_i}(A)\subset E_{f(\lambda_i)}(B)$ et $\dim E_{\lambda_i}(A)=\dim E_{f(\lambda_i)}(B)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall i\in[\![1,p]\!],\ E_{\lambda_i}(A)=E_{f(\lambda_i)}(B)=E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(A))}}$.

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, Π_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(A))$. et $Sp\,\tilde{f}(A)=\{f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_p)\}$. Rappelons que $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_p$. Alors :

$\underline{\underline{\text{si } f \text{ est strictement croissante la décomposition de } \tilde{f}(A) \text{ est } \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\Pi_i}}$;

$\underline{\underline{\text{si } f \text{ est strictement décroissante la décomposition de } \tilde{f}(A) \text{ est } \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_{p-i+1})\Pi_{p-i+1}}}$.

<u>b)</u> Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ admettant pour décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i \ldots$

A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

Soit $\lambda \in Sp\, A$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = \lambda X$.

Alors $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$ donc $\frac{1}{\lambda} \in Sp\, A^{-1}$.

$\{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in Sp\, A\} \subset Sp\, A^{-1}$. Réciproquement soit $\mu \in Sp\, A^{-1}$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $A^{-1}X = \mu X$. $X = \mu AX$.

Alors $AX = \frac{1}{\mu} X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\frac{1}{\mu} \in Sp\, A$. Posons $\lambda_0 = \frac{1}{\mu}$.

$\mu = \frac{1}{\lambda_0}$ et $\lambda_0 \in Sp\, A$ donc $\mu \in \{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in Sp\, A\}$.

Finalement $Sp\, A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} ; \lambda \in Sp\, A\} = \{\frac{1}{\lambda_i} ; i \in [\![1, p]\!]\}$.

De plus $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_{\lambda_i}(A) \Leftrightarrow AX = \lambda_i X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda_i} X \Leftrightarrow X \in E_{\frac{1}{\lambda_i}}(A^{-1})$.

Donc $Sp\, A^{-1} = \{\frac{1}{\lambda_i} ; i \in [\![1, p]\!]\}$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\frac{1}{\lambda_i}}(A^{-1}) = E_{\lambda_i}(A)$.

La décomposition de A^{-1} est alors $A^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} \Pi_i$, ou plutôt :

$A^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{p+1-i}} \Pi_{p+1-i} \ldots \frac{1}{\lambda_p} < \frac{1}{\lambda_{p-1}} < \cdots < \frac{1}{\lambda_1}$!!.

"Posons" alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

<u>b)</u> donne alors $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{p+1-i}} \Pi_{p+1-i}$

Ainsi $\tilde{f}(A) = A^{-1}$.

Si f est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ alors

$\tilde{f}(A) = A^{-1}$.

c) • g est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et f est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $f \circ g$ est une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ admettant pour décomposition " $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i$ "

Alors on a : $\widetilde{f \circ g}(A) = \sum_{i=1}^{p} (f \circ g)(\lambda_i) \Pi_i$.

Ainsi $\widetilde{f \circ g}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\lambda_i)) \Pi_i$.

• g est strictement monotone et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et la décomposition de $g(A)$ est $\sum_{i=1}^{p} g(\lambda_i) \Pi_i$ ou $\sum_{i=1}^{p} g(\lambda_{p+1-i}) \Pi_{p+1-i}$

$Sp\, \tilde{g}(A) = \{g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_p)\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors $\tilde{g}(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et a pour décomposition $\sum_{i=1}^{p} g(\lambda_i) \Pi_i$ ou $\sum_{i=1}^{p} g(\lambda_{p+1-i}) \Pi_{p+1-i}$

f étant une application (strictement monotone) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$\tilde{f}(\tilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\lambda_i)) \Pi_i$ ou $\tilde{f}(\tilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\lambda_{p+1-i})) \Pi_{p+1-i}$. Inutile !

Dans les deux cas $\tilde{f}(\tilde{g}(A)) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\lambda_i)) \Pi_i = \widetilde{f \circ g}(A)$.

Ainsi $\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\widetilde{f \circ g}(A) = \tilde{f}(\tilde{g}(A)) = (\tilde{f} \circ \tilde{g})(A)$.

Alors $\underline{\underline{\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}}}$ lorsque f est une application strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et g une application strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Notons que la stricte monotonie de f ne sert pas ici ... celle de g est essentielle.

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{1}{c}\,\dfrac{cax+ad-ad+cb}{cx+d} = \dfrac{1}{c}\left[\dfrac{a(cx+d)}{cx+d} + \dfrac{cb-ad}{cx+d}\right]$

$$h(x) = \frac{1}{c}\left[a + \frac{cb-ad}{cx+d}\right] = \frac{bc-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)} + \dfrac{a}{c}$.

Soit h_1 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_1(x) = cx+d$ $(c>0, d>0 \dots)$

Soit h_2 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soit h_3 l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_3(x) = \dfrac{bc-ad}{c}x + \dfrac{a}{c}$.

Alors $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$, h_1 est strictement croissante (car $c>0$) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, h_2 est strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et h_3 est strictement monotone (car $\frac{bc-ad}{c} \neq 0$) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Alors d'après c) $\tilde{h} = \tilde{h}_3 \circ \tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1$.

Notons que d'après II $\tilde{h}_2$ est strictement décroissante. Il reste donc qu'à montrer que $\tilde{h}_3$ et $\tilde{h}_1$ sont strictement monotones.

Notons que h_1 et h_3 sont affines (et non constantes). On commence par :

Lemme : [Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \alpha x + \beta$. Alors f est strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Soit $(A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A < B$.

Supposons que la décomposition de A est $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i$

$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\Pi_i = \sum_{i=1}^{p} (\alpha\lambda_i + \beta)\Pi_i = \alpha\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\Pi_i + \beta\sum_{i=1}^{p}\Pi_i = \alpha A + \beta I$.

De même $\tilde{f}(B) = \alpha B + \beta I$. Donc $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) = \alpha(B-A)$.

Clairement $Sp(\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A)) = \{\alpha\lambda \,;\, \lambda \in Sp(B-A)\}$
a $Sp(B-A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi si $\alpha > 0$: $Sp(\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A)) \subset \mathbb{R}_+^*$ et ainsi $\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
donc $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$
Si $\alpha < 0$: $Sp(\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A)) \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $Sp(\tilde{f}(A)-\tilde{f}(B)) \subset \mathbb{R}_+^*$, ainsi
$\tilde{f}(A)-\tilde{f}(B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui donne $\tilde{f}(B) < \tilde{f}(A)$.
Ceci achève la preuve du lemme
Alors $\tilde{h}_1$ est strictement croissante
 $\tilde{h}_3$ est strictement croissante si $bc-ad>0$ et strictement décroissante si
 $bc-ad<0$.
Rappelons que $\tilde{h}_2$ est strictement décroissante.
* est alors simple à prouver que $\tilde{h}_3 \circ \tilde{h}_2 \circ \tilde{h}_1$ est strictement décroissante
si $bc-ad>0$ et strictement croissante si $bc-ad<0$.

Ainsi <u>$\tilde{h}$ est strictement croissante si $bc-ad<0$ et</u>
<u>strictement décroissante si $bc-ad>0$. $\tilde{h}$ est donc strictement monotone</u>.

Q3 <u>a)</u> Soient M et N telles que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\,dt$ existent

⚠ Nous ne redéfinissons pas avec précision M et N. Nous utilisons
implicitement ce qui est proposé par le texte.
Posons $P = M+N$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P_{ij} = m_{ij}+n_{ij}$
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, P_{ij} est une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans
$\mathbb{R}$ comme somme de deux applications continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\int_0^{+\infty} m_{ij}(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} n_{ij}(t)\,dt$ convergent donc

$\int_0^{+\infty} p_{ij}(t)\,dt$ converge et $\int_0^{+\infty} p_{ij}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} m_{ij}(t)\,dt + \int_0^{+\infty} n_{ij}(t)\,dt$.

Alors $\int_0^{+\infty} P(t)\,dt$ existe.

$$\text{et } \int_0^{+\infty} P(t)\,dt = \left(\int_0^{+\infty} p_{ij}(t)\,dt\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\int_0^{+\infty} m_{ij}(t)\,dt + \int_0^{+\infty} n_{ij}(t)\,dt\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} =$$

$$\left(\int_0^{+\infty} m_{ij}(t)\,dt\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} + \left(\int_0^{+\infty} n_{ij}(t)\,dt\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \int_0^{+\infty} M(t)\,dt + \int_0^{+\infty} N(t)\,dt.$$

Finalement si M et N sont telles que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\,dt$ existent alors $\int_0^{+\infty} (M(t)+N(t))\,dt$ existe et $\int_0^{+\infty} (M(t)+N(t))\,dt = \int_0^{+\infty} M(t)\,dt + \int_0^{+\infty} N(t)\,dt$.

b) i) $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i)\,\Pi_i = \sum_{i=1}^{p} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t}\right)\varphi(t)\,dt\ \Pi_i$

$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t}\right)\varphi(t)\,\Pi_i\,dt$ d'après a) (ii)

$\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t}\right)\varphi(t)\,\Pi_i\right)dt$ d'après a) (i)

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t}\right)\varphi(t)\,\Pi_i = \frac{t\varphi(t)}{1+t^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \Pi_i}_{I_n} - \varphi(t) \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i+t}\,\Pi_i$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La décomposition de A est $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i$

Alors la décomposition de $A + tI_n$ est $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i+t)\,\Pi_i$ (III Q1 c)

La décomposition de $(A+tI_n)^{-1}$ est $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i+t}\,\Pi_i$ (III Q2 b) car $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i + t > 0$...

Alors $\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = I_n$ et $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i+t}\,\Pi_i = (A+tI_n)^{-1}$ pour tout réel t strictement positif.

Ainsi $\tilde{f}(A)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t\varphi(t)}{1+t^2}I_n-\varphi(t)(A+tI_n)^{-1}\right)dt.$

$$\tilde{f}(A)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(A+tI_n)^{-1}\right)dt.$$

ii) Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. $A<B$ donc $A+tI_n<B+tI_n$ d'après le lemme de la page 18 (pour "$\forall z\in\mathbb{R}_+^*$, $f(z)=z+t$").

Alors $(B+tI_n)^{-1}<(A+tI_n)^{-1}$. Ainsi $(A+tI_n)^{-1}-(B+tI_n)^{-1}\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Soit $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

${}^tX\left((A+tI_n)^{-1}-(B+tI_n)^{-1}\right)X>0.$

Alors $-{}^tX(A+tI_n)X<-{}^tX(B+tI_n)X$. En ajoutant ${}^tX\left(\frac{t}{1+t^2}I_n\right)X$ il vient :

${}^tX\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(A+tI_n)^{-1}\right)X<{}^tX\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(B+tI_n)^{-1}\right)X$ et ceci pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

c) Soient A et B deux éléments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A<B$.

Montrer que $\tilde{f}(A)<\tilde{f}(B)$. Soit à montrer que $\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A)\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ou que $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tX(\tilde{f}(B)-\tilde{f}(A))X>0$ ou que $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tX\tilde{f}(A)X<{}^tX\tilde{f}(B)X$. Soit $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, ${}^tX\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(A+tI_n)^{-1}\right)X<{}^tX\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(B+tI_n^{-1})\right)X$ et $\varphi(t)>0$

HUM!!

Alors $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, ${}^tX\left[\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(A+tI_n)^{-1}\right)\right]X<{}^tX\left[\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2}I_n-(B+tI_n)^{-1}\right)\right]X.$

$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1}\right) dt$ existe et vaut $\tilde{f}(A)$

Donc $\int_0^{+\infty} {}^tX\left[\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A+tI_n)^{-1}\right)\right] X\,dt$ existe et vaut ${}^tX\tilde{f}(A)X$ d'après a)(iii).

De même $\int_0^{+\infty} {}^tX\left[\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B+tI_n)^{-1}\right)\right] X\,dt$ existe et vaut ${}^tX\tilde{f}(B)X$.

En intégrant alors l'inégalité de la fin de la page 21 il vient :

${}^tX\tilde{f}(A)X < {}^tX\tilde{f}(B)X$ ou $0 < {}^tX(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A))X$.

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tX(\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A))X > 0$; $\tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Ainsi $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$.

$\forall (A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A < B \Rightarrow \tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$. $\underline{\underline{\tilde{f} \text{ est strictement croissante sur } S_n^{++}(\mathbb{R})}}$.

c) Rappelons que $f_0 = \ln$. Ainsi $\underline{\underline{\tilde{\ln} = \tilde{f}_0 \text{ qui est strictement}}}$

$\underline{\underline{\text{croissante sur } S_n^{++}(\mathbb{R})}}$ d'après ce qui précède ($\varphi : t \mapsto 1$).

Soit $\alpha \in]-1,0[\cup]0,1[$. En appliquant ce qui précède à $\varphi : t \mapsto t^\alpha$

on montre que $\tilde{f}_\alpha$ est strictement croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1er cas.– $\alpha \in]-1,0[$. $\exists c \in]-\infty,0[$, $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(x) = c x^\alpha + d$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $x^\alpha = \frac{1}{c} f_\alpha(x) - \frac{d}{c}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $p_\alpha(x) = \frac{1}{c} f_\alpha(x) - \frac{d}{c}$.

Soient A et B deux éléments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A < B$.

$\tilde{f}_\alpha(A) < \tilde{f}_\alpha(B)$ car $\tilde{f}_\alpha$ est strictement croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Clairement $\frac{1}{c}\tilde{f}_\alpha(A) - \frac{d}{c} > \frac{1}{c}\tilde{f}_\alpha(B) - \frac{d}{c}$

ce qui donne $\tilde{p}_\alpha(A) > \tilde{p}_\alpha(B)$. Ainsi $\tilde{p}_\alpha$ est strictement décroissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$2^{\text{ième}}$ cas.. $\alpha \in]0,1[$. $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = Cx^\alpha + d$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; x^\alpha = \frac{1}{C} f_\alpha(x) - \frac{d}{C}.$$

Alors une démarche analogue à celle du premier cas montre que

$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $A < B \Rightarrow \frac{1}{C}\tilde{f}_\alpha(A) - \frac{d}{C} < \frac{1}{C}\tilde{f}_\alpha(B) - \frac{d}{C}$

Alors $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $A < B \Rightarrow \tilde{P}_\alpha(A) < \tilde{P}_\alpha(B)$.

P_α est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Finalement <u>$\tilde{P}_\alpha$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si $\alpha \in]0,1[$ (ou $[0,1[$)</u>

<u>et strictement décroissante si $\alpha \in]-1,0[$.</u>

PARTIE IV Monotonie comparée de f et $\tilde{f}$

(Q1) Supposons que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < \beta$. Montrons que $f(\alpha) < f(\beta)$

Posons $A = \alpha I_n$ et $B = \beta I_n$.

La décomposition de A (resp. B) est $A = \alpha I_n$ (resp. $B = \beta I_n$).

Alors $\tilde{f}(A) = f(\alpha) I_n$ et $\tilde{f}(B) = f(\beta) I_n$.

$B - A = (\beta - \alpha) I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\beta - \alpha > 0$. Ainsi $A < B$.

Alors $\tilde{f}(A) < \tilde{f}(B)$. Donc $(f(\beta) - f(\alpha)) I_n = \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(I_n)$.

Les valeurs propres de $(f(\beta) - f(\alpha)) I_n$ sont strictement positives.

Ainsi $f(\beta) - f(\alpha) > 0$. $f(\beta) > f(\alpha)$.

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$.

Si $\tilde{f}$ est strictement croissante, f est strictement croissante.

(Q2) a) D'abord $\in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Utilisons II Q1 pour prouver que $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

D'abord $\frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$.

De plus $\frac{e^t+e^{-t}}{2} \times \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(e^t+e^{-t})^2 - (e^t-e^{-t})^2\right] = \frac{1}{4}(e^t+e^{-t}+e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t}-e^t+e^{-t})$

Donc $\frac{e^t+e^{-t}}{2} \times \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2e^t)(2e^{-t}) = 1 > 0$.

Donc $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \operatorname{Sp} A(t) \Leftrightarrow \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \lambda = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{e^t+e^{-t}}{2} - \lambda = -\frac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$

$\lambda \in \operatorname{Sp} A(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = e^{-t} \\ \text{ou} \\ \lambda = e^t \end{cases}$

$\operatorname{Sp} A(t) = \{e^{-t}, e^t\}$ ... et on retrouve $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$!!

Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$A(t)X=e^t X \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-e^t\right)x+\frac{e^t-e^{-t}}{2}y=0 \\ \frac{e^t+e^{-t}}{2}x+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}-e^t\right)y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^t-e^{-t}}{2}(y-x)=0 \\ \frac{e^t+e^{-t}}{2}(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

Alors $E_{e^t}(A(t))=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On montre de même que $E_{e^{-t}}(A(t))=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection orthogonale sur $E_{e^t}(A(t))$ (resp. $E_{e^{-t}}(A(t))$).

Notons que les deux sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux car $A(t)\in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. L'un est donc l'orthogonal de l'autre.

Alors $p_1+p_2=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+p_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\ \ p_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors $p_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=p_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de p_1 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est $M_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de p_2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est $M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-M_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

la décomposition de $A(t)$ est $A(t)=e^t\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+e^{-t}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $t\in \mathbb{R}_+^*$. $B(t)\in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$$B(t)\in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3>0 \quad (!) \\ t^3\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}-t^3\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<\frac{2}{e^t+e^{-t}}-t^3.$$

$\lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}-t^3\right)=1$ donc $\exists\, \eta_0\in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in\,]0,\eta_0[,\ \frac{2}{e^t+e^{-t}}-t^3>0$.

Ainsi $\exists\, \eta_0\in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in\,]0,\eta_0[,\ B(t)\in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

c) Soit $t\in]0,\eta_0[$. $A(t)-B(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3 & \frac{e^t-e^{-t}}{2}\\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2}-\frac{2}{e^t+e^{-t}}+t^3\end{pmatrix}$

$A(t)-B(t)\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $A(t)-B(t)\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases}\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3>0\\ \underbrace{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3\right)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-\frac{2}{e^t+e^{-t}}+t^3\right)-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}_{\ell(t)}>0\end{cases}$

$$\ell(t)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\times t^3-t^3\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{2t^3}{e^t+e^{-t}}-t^6-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$$

Or $\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^t+e^{-t}+e^t-e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t+e^{-t}-e^t+e^{-t}}{2}\right)=e^te^{-t}=1$

Ainsi $\ell(t)=\frac{2t^3}{e^t+e^{-t}}-t^6=\frac{t^3}{e^t+e^{-t}}\left[2-t^3(e^t+e^{-t})\right]$

Alors $A(t)-B(t)\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\iff\begin{cases}\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3>0\\ \frac{t^3}{e^t+e^{-t}}(2-t^3(e^t+e^{-t}))>0\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3>0\\ 2-t^3(e^t+e^{-t})>0\end{cases}$

$\lim\limits_{t\to0^+}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to0^+}\left(2-t^3(e^t+e^{-t})\right)=2$

Alors $\exists\eta_1'\in]0,\eta_0[\ \forall t\in]0,\eta_1'[,\ \frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3>0$.

$\exists\eta_1''\in]0,\eta_0[,\ \forall t\in]0,\eta_1''[,\ 2-t^3(e^t+e^{-t})>0$.

Posons alors $\eta_1=\min(\eta_1',\eta_1'')$.

$\eta_1\in]0,\eta_0[$ et $\forall t\in]0,\eta_1[,\ \frac{e^t+e^{-t}}{2}-t^3>0$ et $2-t^3(e^t+e^{-t})>0$

Ainsi $\underline{\underline{\exists\eta_1\in]0,\eta_0[,\ \forall t\in]0,\eta_1[,\ A(t)-B(t)\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}}$.

d) Soit $t\in]0,\eta_1[$. La décomposition de $A(t)$ est $A(t)=e^t\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}$

Donc $\underline{\underline{\tilde p_\alpha(A(t))=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}+e^{-\alpha t}\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}}}$. $\underline{\underline{\tilde p_\alpha(A(t))=\begin{pmatrix}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}&\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\\ \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}&\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\end{pmatrix}}}$

La décomposition de $B(t)$ est $B(t) = t^3\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Ainsi $\tilde{P}_\alpha(B(t)) = t^{3\alpha}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^{3\alpha}&0\\0&\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\end{pmatrix}$.

e) Soit α un élément de $]1,+\infty[$. Soit $t \in]0,\eta_1[$.

$$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) = \begin{pmatrix}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} & \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\\ \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2} & \frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\end{pmatrix}.$$

$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) \in S_2(\mathbb{R})$.

$$\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} > 0\\ \left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)^2 > 0.\end{cases}$$

Notons que $\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right) = 1$ donc pour t proche de 0 : $\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} > 0$!

Posons alors $\forall t \in]0,\eta_1[$, $u(t) = \left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)^2$.

Pour trouver un équivalent de u en 0 il convient de faire un développement limité de u au voisinage de 0. A quel ordre ??? Le t^3 plaide pour l'ordre 3. On ferait alors un dl 3 long et délicat... pour s'apercevoir que l'ordre 2 suffit !!

$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + o(t^2)$ et $e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + o(t^2)$.

Alors $\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} = 1 + \frac{(\alpha t)^2}{2} + o(t^2)$ et $\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2} = \alpha t + o(t^2)$

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ donc $\frac{2}{e^t+e^{-t}} = \frac{1}{1+\frac{t^2}{2} + o(t^2)} = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

$\left(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)^2 = (\alpha t)^2 + o(t^2) = \alpha^2 t^2 + o(t^2)$

$\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3 = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2)$.

Alors $\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^\alpha = 1 + \alpha\left(-\frac{t^2}{2}\right) + o(t^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}t^2 + o(t^2)$.

$$\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}t^2 + o(t^2) \quad \text{car} \quad t^{3\alpha} = 0 + o(t^2) \quad (\alpha > 1).$$

$$\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^{\alpha} = 1 + \frac{(\alpha t)^2}{2} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}t^2\right) + o(t^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}t^2 + o(t^2).$$

Alors $\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^{\alpha}\right) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}t^2 + o(t^2)$.

Ainsi $u(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}t^2 - \alpha^2 t^2 + o(t^2) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2 + o(t^2)$.

Alors $u(t) \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2$.

$$\boxed{\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t+e^{-t}} - t^3\right)^{\alpha}\right) - \left(\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)^2 \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)t^2}{2}.}$$

Remarque.. Il est clair qu'en divisant $u(t)$ par t^2 et en passant à la limite on trouve plus rapidement ce résultat...

$u(t) \underset{0}{\sim} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2$. Alors $\exists \eta_2 \in]0,\eta_1[$, $\exists \varepsilon \in \mathcal{F}(]0,\eta_2[,\mathbb{R})$,

$\forall t \in]0,\eta_2[$, $u(t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2(1+\varepsilon(t))$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

$\exists \eta_3 \in]0,\eta_2[$ $\forall t \in]0,\eta_3[$, $|\varepsilon(t)| < \frac{1}{2}$.

Alors $\forall t \in]0,\eta_3[$, $-\frac{1}{2} < \varepsilon(t) < \frac{1}{2}$; $\forall t \in]0,\eta_3[$, $\frac{1}{2} < 1+\varepsilon(t) < \frac{3}{2}$.

Donc $\forall t \in]0,\eta_3[$, $1+\varepsilon(t) > 0$ et $u(t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2(1+\varepsilon(t))$

Notons que $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} < 0$ car $\alpha > 1$

Alors $\forall t \in]0,\eta_3[$, $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}t^2 < 0$ et $1+\varepsilon(t) > 0$.

$\forall t \in]0,\eta_3[$, $u(t) < 0$. Ainsi $\forall t \in]0,\eta_3[$, $\tilde{P}_\alpha(A(t)) - \tilde{P}_\alpha(B(t)) \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$

Par conséquent si $t \in]0,\eta_3[$, $B(t) < A(t)$ mais on n'a pas $\tilde{p}(B(t)) < \tilde{p}(A(t))$.