PRÉLIMINAIRES

Q1 • $C(U) \subset \mathcal{L}(E)$.

• $\forall u \in U$, $0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u \circ 0_{\mathcal{L}(E)}$; ainsi $0_{\mathcal{L}(E)} \in C(U)$. $C(U) \neq \emptyset$.

• Soit $(v,w) \in C(U) \times C(U)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall u \in U$, $(\lambda v + w) \circ u = \lambda v \circ u + w \circ u \underset{\substack{v \in C(u) \\ w \in C(u)}}{=} \lambda u \circ v + u \circ w = u \circ (\lambda v + w)$.

Ainsi $\lambda v + w \in C(U)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v,w) \in C(U) \times C(U)$, $\lambda v + w \in C(U)$.

Donc <u>$C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.</u>

$\forall u \in U$, $Id_E \circ u = u = u \circ Id_E$; $Id_E \in C(U)$. Alors $\mathrm{Vect}(Id_E) \subset C(U)$.

Comme $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$: $\dim \mathrm{Vect}(Id_E) = 1$. Donc <u>$\dim C(U) \geqslant 1$</u>

<u>Remarque</u>.. $\mathrm{Vect}(Id_E) \subset C(U)$ donc <u>l'ensemble (ou l'espace vectoriel) des homothéties vectorielles de E est contenu dans $C(U)$.</u>

Q2 Soit $v \in \mathbb{R}[u]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $v = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k$

$u \circ v = u \circ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^{r} a_k u \circ u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k u^{k+1} = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k \circ u = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) \circ u = v \circ u$

$\forall v \in \mathbb{R}[u]$, $v \in C(u)$. Ainsi <u>$\mathbb{R}[u] \subset C(u)$</u>... en fait $\mathbb{R}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $C(u)$...

Q3 Soit $x \in E_\lambda$. $u(x) = \lambda x$. $u \circ v = v \circ u$ donc $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$.

Donc $u(v(x)) = \lambda v(x)$. Alors $v(x) \in E_\lambda$.

$\forall x \in E$, $v(x) \in E_\lambda$. E_λ est stable par v.

<u>Les sous-espaces propres de u sont stables par tous les éléments de $C(u)$.</u>

R

PARTIE II Etude d'un exemple

(Q4) a) $\forall x \in]-1,1[$, $|1 \times x^n| = |x|^n$. Or pour tout x dans $]-1,1[$ la série de terme général $|x|^n$ converge. Donc pour tout x dans $]-1,1[$ la série de terme général $|1 \times x^n|$ converge.

<u>La suite constante égale à 1 appartient à A.</u>

b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^s)$ avec s dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]-1,1[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n^2 |a_n x^n|\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left|\frac{a_n}{n^s}\right| \times n^{s+2} |x|^n\right) = 0 \times 0$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^s} = 0$ puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^s)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{s+2}|x|^n) = 0$ par croissance comparée ($|x|<1$).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 |a_n x^n|) = 0$. 1) $|a_n x^n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n x^n| \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|a_n x^n|$ converge et ceci pour tout $x \in]-1,1[$. Donc $(a_n)_{n\geqslant 0} \in A$.

Si $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et s'il existe s dans $\mathbb{R}$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^s)$, alors $(a_n)_{n\geqslant 0} \in A$.

---

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = 0$. $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^2)$. Donc $\underline{(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in A}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\beta_n}{n^2}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{n^2} = 0$. $\beta_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^2)$. Donc $\underline{(\beta_n)_{n\geqslant 0} \in A}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\gamma_n}{n^2}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} = 0$; $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n^2)$. Donc $\underline{(\gamma_n)_{n\geqslant 0} \in A}$.

Q5 a) Notons $\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

- <u>$H \subset \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$.</u>
- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. $(a_n)_{n\geq 0} \in A$!

Posons $\forall x \in]-1,1[$, $f_0(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f_0 \in H$. <u>H n'est pas vide.</u>

- Soit f et g deux éléments de H. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (a_n)_{n\geq 0} \in A$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$\exists (b_n)_{n\geq 0} \in A$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0} b_n x^n$.

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $(\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$. Montrons que $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0}$ appartient à A. Nous pourrons alors dire que $\lambda f + g \in H$.

Soit $x \in]-1,1[$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |(\lambda a_n + b_n) x^n| \leq |\lambda a_n x^n| + |b_n x^n| = |\lambda|\,|a_n x^n| + |b_n x^n|$.

2) $(a_n)_{n\geq 0} \in A$, $(b_n)_{n\geq 0} \in A$ donc les séries de termes généraux $|a_n x^n|$ et $|b_n x^n|$ convergent. Alors la série de terme général $|\lambda|\,|a_n x^n| + |b_n x^n|$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|(\lambda a_n + b_n) x^n|$.

Ceci achève de montrer que $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0} \in A$. Donc $\lambda f + g \in H$.

<u>$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in H^2$, $\lambda f + g \in H$.</u>

<u>H est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.</u>

b) Pour $\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n$, $\hat{\psi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n x^n$ et $\hat{\delta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n x^n$

$\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ et $\hat{\delta}$ sont des éléments de H car $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ sont des éléments de A

$\forall x\in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}=2\varphi(x)$.

Donc $\varphi=\frac{1}{2}\hat{\varphi}$. Or $\hat{\varphi}\in H$ et H est un sous-espace vectoriel. Donc $\underline{\varphi\in H}$.

$\forall x\in]-1,1[$, $\hat{\psi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}=\psi(x)$. $\psi=\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}\in H$. $\underline{\psi\in H}$.

$\forall x\in]-1,1[$, $\hat{\delta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(-1)^n x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n(-x)^n=-x\sum_{n=1}^{+\infty}n(-x)^{n-1}=-x\times\frac{1}{(1-(-x))^2}=-\frac{x}{(1+x)^2}$.

$\forall x\in]-1,1[$, $\hat{\delta}(x)=-\frac{x+1-1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}=(-\psi+S)(x)$. $\hat{\delta}=-\psi+S$.

Alors $S=\psi+\hat{\delta}$. Or $\psi\in H$, $\hat{\delta}\in H$ et H est un sous-espace vectoriel. Donc $\underline{S\in H}$.

(Q6) a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit q sa raison.

<u>1er cas</u>. $q\neq 0$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^n u_0$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in B \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $2q^{n+3}u_0+3q^{n+2}u_0-q^n u_0=0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}\in A$

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in B \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $q^n(2q^3+3q^2-1)u_0=0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}\in A$

$$(u_n)_{n\geqslant 0}\in B \underset{q\neq 0}{\Leftrightarrow} (2q^3+3q^2-1)u_0=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_0=0 \text{ ou } 2q^3+3q^2-1=0. \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\geqslant 0}\in A \end{cases}$$

Notons que -1 est racine du polynôme $2X^3+3X^2-1$.

Alors $2X^3+3X^2-1=(X+1)(2X^2+X-1)=(X+1)(X+1)(2X-1)=(X+1)^2(2X-1)$

-1 est racine de $2X^2+X-1$.

Les racines de $2X^3+3X^2-1$ sont -1 et $1/2$.

$$\text{Alors } (u_n)_{n\geqslant 0}\in B \Leftrightarrow \begin{cases} u_0=0 \text{ ou } q=-1 \text{ ou } q=\frac{1}{2}. \\ \text{et } (u_n)_{n\geqslant 0}\in A \end{cases}$$

Remarque : Si $u_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ et ainsi $(u_n)_{n\geq 0} \in A$.

Si $q = -1$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0(-1)^n = u_0 \beta_n$; $(u_n)_{n\geq 0} = u_0(\beta_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0} \in A$ donc $(u_n)_{n\geq 0} \in A$.

Si $q = \frac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = u_0 \alpha_n$; $(u_n)_{n\geq 0} = u_0(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in A$ donc $(u_n)_{n\geq 0} \in A$.

Ceci nous permet de dire alors que : $(u_n)_{n\geq 0} \in B \iff u_0 = 0$ ou $q = -1$ ou $q = \frac{1}{2}$.

2ème cas : $q = 0$. Si $u_0 = 0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite nulle donc $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient donc à B.

Supposons $u_0 \neq 0$. Alors $u_1 = 0 \times u_0 = 0$, $u_2 = 0^2 \times u_0 = 0$ et $u_3 = 0^3 \times u_0 = 0$.

Alors $2u_3 + 3u_2 - u_0 = -u_0 \neq 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ ne peut appartenir à B.

Résumons les deux cas. $(u_n)_{n\geq 0} \in B \iff u_0 = 0$ ou $q = -1$ ou $q = \frac{1}{2}$.

Si $u_0 = 0$, $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite nulle donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison -1 ou $\frac{1}{2}$!

<u>Les suites géométriques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartenant à B sont les suites géométriques de raison -1 ou $\frac{1}{2}$.</u>

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = 2(-1)^{n+3}(n+3) + 3(-1)^{n+2}(n+2) - (-1)^n n =$

$(-1)^n\left[-2(n+3) + 3(n+2) - n\right] = (-1)^n(-2n - 6 + 3n + 6 - n) = 0$.

Alors $(\gamma_n)_{n\geq 0} \in A$ (d'après Q4 c)) et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = 0$.

Donc <u>$(\gamma_n)_{n\geq 0} \in B$.</u>

c) Montrons d'abord que B est un sous-espace vectoriel de A.

→ $B \subset A$

→ La suite nulle de A appartient clairement à B donc B n'est pas vide.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de B.

$\lambda(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} = (\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$2(\lambda a_{n+3} + b_{n+3}) + 3(\lambda a_{n+2} + b_{n+2}) - (\lambda a_n + b_n) = \lambda(2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n) + (2b_{n+3} + 3b_{n+2} - b_n)$.

Or $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 2b_{n+3} + 3b_{n+2} - b_n = 0$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dans B

donc $2(\lambda a_{n+3} + b_{n+3}) + 3(\lambda a_{n+2} + b_{n+2}) - (\lambda a_n + b_n) = 0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Notons également que : $\lambda(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} \in A$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de l'espace vectoriel A. Finalement $\lambda(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} \in B$.

Ceci achève de montrer que <u>B est un sous-espace vectoriel de A.</u>

Montrons alors que E est un sous-espace vectoriel de H.

- $E \subset H$ car $\underline{B \subset A}$.
- $0_A \in B$, donc $0_H \in E$!! $\underline{E \neq \emptyset}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$. Il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de B telles que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

$$\forall x \in]-1,1[, (\lambda f+g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$$

Or $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0} = \lambda (a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} \in B$ car $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de B et B est un espace vectoriel.

Alors $\lambda f + g \in E$.

$\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in E^2, \lambda f + g \in E.}$

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } H.}}$

Rappelons que nous avons posé : $\forall x \in]-1,1[$, $\hat{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$, $\hat{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$ et $\hat{\delta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$

Nous avons aussi prouvé que :

1) $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ sont dans B (Q6 a et b)

2) $\varphi = \frac{1}{2}\hat{\varphi}$, $\psi = \hat{\psi}$ et $S = \psi + \hat{\delta} = \hat{\psi} + \hat{\delta}$. (Q5 b)

Alors 1) $\hat{\varphi}, \hat{\psi}$ et $\hat{\delta}$ sont des éléments de E et ainsi $\text{Vect}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta}) \subset E$

2) φ, S et ψ sont des éléments de $\text{Vect}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta})$.

Alors $\underline{\underline{\varphi, \psi \text{ et } S \text{ sont des éléments de } E.}}$

<u>Exercice</u>.. Montrer que $((\alpha_n)_{n\geq 0}, (\beta_n)_{n\geq 0}, (\gamma_n)_{n \geq 0})$ est une base de B.

En déduire que $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\delta})$ et (φ, ψ, S) sont des bases de E.

Q7 a) Soit $x \in]-1,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$. En multipliant par x^{n+3} il vient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{n+3}x^{n+3} + 3x\, a_{n+2}x^{n+2} - x^3 a_n x^n = 0$

Alors $2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}x^{n+3} + 3x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - x^3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ car toutes les séries convergent.

Donc $2\sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n + 3x\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - x^3 f(x) = 0$ (deux petits changements d'indice...)

Alors $2\left(f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\right) + 3x\left(f(x) - (a_0 + a_1 x)\right) - x^3 f(x) = 0$.

En multipliant par -1 il vient :

$f(x)(x^3 - 3x - 2) + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + 3x(a_0 + a_1 x) = 0$.

$f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2 x^2 = 0$ et ceci pour tout $x \in]-1,1[$.

b) -1 est racine de $X^3 - 3X - 2$. $X^3 - 3X - 2 = (X+1)(X^2 - X - 2)$.

-1 est racine de $X^2 - X - 2$. $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$.

Donc les racines de $X^3 - 3X - 2$ sont -1 et 2 et elles n'appartiennent pas à $]-1,1[$.

Alors $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -\dfrac{a_0(2+3x) + a_1(2x+3x^2) + 2a_2 x^2}{x^3 - 3x - 2}$.

$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = -\dfrac{2a_0 + (3a_0 + 2a_1)x + (3a_1 + 2a_2)x^2}{x^3 - 3x - 2}$

Posons $\varphi = -2a_0 - (3a_0 + 2a_1)X - (3a_1 + 2a_2)X^2$.

$\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^3 - 3x - 2}$.

$$\exists \varphi \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^3 - 3x - 2}.$$

c) Posons $Q = uX^2+vX+w$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$f = a\varphi + b\psi + c\delta$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = \frac{a(1+x)^2+b(1+x)(2-x)+c(2-x)}{(2-x)(1+x)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{ux^2+vx+w}{x^3-3x-2} = -\frac{(a-b)x^2+(2a+b-c)x+a+2b+2c}{x^3-3x-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (u+a-b)x^2+(v+2a+b-c)x+(w+a+2b+2c) = 0.$$

Ainsi si $f = a\varphi + b\psi + cS$ le polynôme $P = (u+a-b)X^2+(v+2a+b-c)X+w+a+2b+2c$ admet une infinité de racines ; c'est alors le polynôme nul et donc $\begin{cases} u+a-b=0 \\ v+2a+b-c=0 \\ w+a+2b+2c=0 \end{cases}$ (1)

Réciproquement si l'on a (1) alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $f = a\varphi + b\psi + cS$.

Donc $f = a\varphi+b\psi+cS \Leftrightarrow \begin{cases} u+a-b=0 \\ v+2a+b-c=0 \\ w+a+2b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a+u \\ c = v+2a+b = v+3a+u \\ w+a+2a+2u+2v+6a+2u=0 \end{cases}$

$$f = a\varphi+b\psi+cS \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9}(-4u-2v-w) \\ b = \frac{1}{9}(-4u-2v-w)+u = \frac{1}{9}(5u-2v-w) \\ c = \frac{1}{3}(-4u-2v-w)+u+v = \frac{1}{3}(-u+v-w) \end{cases}.$$

Finalement : $\exists! (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ f = a\varphi + b\psi + cS.$

f est combinaison linéaire de φ, ψ et S.

d) Nous venons de montrer que $E \subset \mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$.

Or φ, ψ et S sont des éléments de E donc $\mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$ est contenu dans E.

Ainsi $E = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi, S)$. (φ, ψ, S) est une famille génératrice de E.

Montrons que cette famille est libre (<u>ce qui a presque été fait dans c) !!</u>)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\varphi + b\psi + cS = 0_E$.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{a}{2-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} = 0.$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad 0 = a(1+x)^2 + b(1+x)(2-x) + c(2-x) = a+2b+2c + (2a+b-c)x + (a-b)x^2$$

Ainsi $a+2b+(2a+b-c)X + (a-b)X^2$ admet une infinité de racines.

C'est donc le polynôme nul. Ainsi $a+2b+2c = 2a+b-c = a-b = 0$.

$$\begin{cases} b = a \\ 0 = 2a+b-c = 3a-c \\ 0 = a+2b+2c = 3a+2c \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = a \\ c = 3a \\ 0 = 3a+6a \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a\varphi + b\psi + cS = 0_E \Rightarrow a = b = c = 0$; (φ, ψ, S) est libre.

Finalement <u>(φ, ψ, S) est une base de E. $\dim E = 3$.</u>

Q8 **a)** • $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

• Soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général $|a_n x^n|$ converge car $(a_n)_{n\geq 0}$ est dans B donc dans A.

Alors la série de terme général $|a_{n+1} x^{n+1}|$ converge.

Supposons $x \neq 0$. Alors la série de terme général $\frac{1}{|x|} |a_{n+1} x^{n+1}|$ ou $|a_{n+1} x^n|$ ou $|b_n x^n|$ converge.

Si $x = 0$ il est clair que la série de terme général $|b_n x^n|$ converge.

Ainsi pour tout x dans $]-1,1[$, la série de terme général $|b_n x^n|$ converge.

Donc <u>$(b_n)_{n \geq 0} \in A$.</u>

• $\forall n\in\mathbb{N},\ 2b_{n+3}+3b_{n+2}-b_n = 2a_{n+4}+3a_{n+3}-a_{n+1} \underset{\uparrow (a_n)_{n\geq 0}\in B}{=} 0$.

ceci achève de montrer que $(b_n)_{n\geq 0}\in B$.

b) • Soit f un élément de E. $\exists\, (a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = a_{n+1}$.

1) $(b_n)_{n\geq 0}\in B$

2) $\forall x\in]-1,1[,\ u(f)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Ainsi $u(f)\in E$.

$\forall f\in E,\ u(f)\in E$. u est une application de E dans E.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(f,g)\in E^2$. $\exists\,(a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \exists\,(\hat{a}_n)_{n\geq 0}\in B,$

$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{a}_n x^n$

Alors $\forall x\in]-1,1[,\ (\lambda f+g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n+\hat{a}_n)x^n$.

$\forall x\in]-1,1[,\ u(\lambda f+g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_{n+1}+\hat{a}_{n+1})x^n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{a}_{n+1}x^n$

↑ toutes ces séries convergent.

$\forall x\in]-1,1[,\quad u(\lambda f+g)(x)=\lambda u(f)(x)+u(g)(x)=(\lambda u(f)+u(g))(x)$.

Donc $u(\lambda f+g)=\lambda u(f)+u(g)$

$\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (f,g)\in E^2,\ u(\lambda f+g)=\lambda u(f)+u(g)$.

Finalement u est un endomorphisme de E.

c) Soit $f\in E$. $\exists\,(a_n)_{n\geq 0}\in B,\ \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Une récurrence des plus simples montre que : $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ u^k(f)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}x^n$

ou $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ u^k(f)(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} a_k x^{n-k}$.

Soit $x \in]-1,1[$.

$(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x) = 2u^3(f)(x)+3u^2(f)(x)-f(x)$

$(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n)}_{=0 \text{ car } (a_n)_{n\geq 0}\in B} x^n = 0$

Alors $\forall x \in]-1,1[$, $(2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x)=0$

Donc $2u^3(f)+3u^2(f)-f = 0_E$.

Alors $\forall f \in E$, $(2u^3+3u^2-Id_E)(f) = 0_E$. $2u^3+3u^2-Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\Pi = 2X^3+3X^2-1$ est un polynôme de degré 3 tel que $\Pi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

d) • $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}x^n$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n = \frac{1}{2}\varphi(x)$.

$u(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$.

• $\forall x \in]-1,1[$, $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = -\psi(x)$

$u(\psi) = -\psi$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\delta(x) = \psi(x) + \hat{\delta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n x^n$.

$\forall x \in]-1,1[$, $\delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + n(-1)^n\right)x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\delta)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^{n+1}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-2(-1)^n x^n - n(-1)^n x^n\right)$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u(\delta)(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n x^n$ car

toutes les séries convergent.

Q9 a) $Sp\, u = Sp\, T = \{\frac{1}{2}, -1\}$ car T est triangulaire supérieure.

Soit $f = a\varphi + b\psi + c\delta$ un élément de E.

$u(f) = \frac{1}{2} f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \\ -b-c = \frac{1}{2}b \\ -c = \frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Donc $SEP(u, \frac{1}{2}) = Vect(\varphi)$.

$u(f) = -f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -a \\ -b-c = -b \\ -c = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

$SEP(u, -1) = Vect(\psi)$.

b) $Sp\, u = \{\frac{1}{2}, -1\}$ et $\dim SEP(u, \frac{1}{2}) + \dim SEP(u, -1) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim E$.

Alors u n'est pas diagonalisable.

Q10 a) D'après la troisième question du préliminaire : $SEP(u, \frac{1}{2})$ et $SEP(u, -1)$ sont stables par v.

Donc $v(\varphi) \in SEP(u, \frac{1}{2}) = Vect(\varphi)$ et $v(\psi) \in SEP(u, -1) = Vect(\psi)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $\exists \mu \in \mathbb{R},\ v(\psi) = \mu\psi$.

b) $v(S) \in E$. Donc $\exists (\varepsilon, \eta, \omega) \in \mathbb{R}^3,\ v(S) = \varepsilon\varphi + \eta\psi + \omega S$

Alors $u(v(S)) = \frac{\varepsilon}{2}\varphi - (\eta+\omega)\psi - \omega S$ $\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon/2 \\ -\eta-\omega \\ -\omega \end{pmatrix} \right)$.

$v(u(S)) = v(-\psi - S) = -v(\psi) - v(S) = -\mu\psi - v(S)$.

Alors $v(S) = -v(u(S)) - \mu\psi = -u(v(S)) - \mu\psi = -\frac{\varepsilon}{2}\varphi + (\eta+\omega)\psi + \omega S - \mu\psi$

Alors la première composante de $v(S)$ sur (φ, ψ, S) est à la fois ε à la fois $-\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\varepsilon = 0$. $\exists (\eta, \omega) \in \mathbb{R}^2,\ v(S) = \eta\psi + \omega S$.

R.

$\forall x \in]-1,1[,\ u(\delta)(x) = -2\varphi(x) - \hat{S}(x)$. Supposons que $\hat{S} = -\psi + S$

$\forall x \in]-1,1[,\ u(S)(x) = -2\varphi(x) - (\delta(x) - \varphi(x)) = -\varphi(x) - \delta(x)$.

Donc $\underline{u(S) = -\psi - \delta}$.

Alors $T = M_C(u) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 2 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & -3 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

Montrons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k = \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$

c'est vrai pour $k=0$.

Supposons l'égalité vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$$T^{k+1} = T \times T^k = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} & -k(-1)^k - (-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

En observant que $-k(-1)^k - (-1)^k = (k+1)(-1)^{k+1}$ on obtient l'égalité pour $k+1$. Ce qui achève la récurrence.

$$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\quad T^k = \begin{pmatrix} (1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.}$$

c] $u\circ v = v\circ u$. Alors $M_C(u\circ v) = M_C(v\circ u)$.

$M_C(u)\,M_C(v) = M_C(v)\,M_C(u)$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta-\omega \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\mu-\eta \\ 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$ Alors $-\eta-\omega = -\mu-\eta$. $\underline{\underline{\mu=\omega}}$.

ce qui résultait aussi de notre b] !

d] Soit v un endomorphisme de E tel qu'il existe λ, μ et η vérifiant

$M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$. Montrer que $u\circ v = v\circ u$.

Il suffit de montrer que $M_C(u\circ v) = M_C(v\circ u)$ ou que $M_C(u)M_C(v) = M_C(v)M_C(u)$.

$$M_C(u)\,M_C(v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta-\mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$M_C(v)\,M_C(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\mu-\eta \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Donc $M_C(u)M_C(v) = M_C(v)M_C(u)$. $u\circ v = v\circ u$. $v \in C(u)$.

<u>Si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ, μ et η</u>

<u>tel que $M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors $v \in C(u)$.</u>

e] Soient v_1, v_2, v_3 les endomorphismes de E de matrices respectives dans C :

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $C(u)$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

$v \in C(u) \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu,\eta)\in\mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&\eta\\0&0&\mu\end{pmatrix}$.

↑ a), b), c) et d)

$v\in C(u) \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\eta)\in\mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$v\in C(u) \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\eta)\in\mathbb{R}^3,\ M_C(v) = \lambda M_C(v_1)+\mu M_C(v_2)+\eta M_C(v_3)$

$v\in C(u) \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\eta)\in\mathbb{R}^3,\ M_C(v) = M_C(\lambda v_1+\mu v_2+\eta v_3)$.

$v\in C(u) \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\eta),\ v=\lambda v_1+\mu v_2+\eta v_3$. $\underline{C(u)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)}$.

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $av_1+bv_2+cv_3=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = M_C(av_1+bv_2+cv_3) = aM_C(v_1)+bM_C(v_2)+cM_C(v_3) = aM_1+bM_2+cM_3$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&0&b\end{pmatrix}$; alors $a=b=c=0$.

$\underline{(v_1,v_2,v_3)\text{ est libre}}$.

Donc $\underline{(v_1,v_2,v_3)\text{ est une base de } C(u)}$. $\underline{\dim C(u)=3}$.

f) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\,\mathrm{Id}_E+bu+cu^2=0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $M_C(a\,\mathrm{Id}_E+bu+cu^2)=0_{M_3(\mathbb{R})}$.

$0_{M_3(\mathbb{R})} = aM_C(\mathrm{Id}_E)+bM_C(u)+cM_C(u^2) = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}^2$

$0_{M_3(\mathbb{R})} = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix}a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}&0&0\\0&a-b+c&-b+2c\\0&0&a-b+c\end{pmatrix}=0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Alors $\begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}=0 \\ a-b+c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$; $\begin{cases} b=2c \\ a=b-c=c \\ 0=c+\frac{2c}{2}+\frac{c}{4}=\frac{9}{4}c \end{cases}$; $\begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$.

ceci achève de montrer que (Id_E, u, u^2) est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.

9] D'après le préliminaire $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$ (Q2).

Montrons que $C(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Id_E, u, u^2 commutent avec u. Ainsi (Id_E, u, u^2) est une famille libre de $C(u)$ ~~de cardinal 3 et~~ $C(u)$ est de dimension 3.

Par conséquent (Id_E, u, u^2) est une base de $C(u)$.

Alors $C(u) = \{\alpha Id_E + \beta u + \gamma u^2 ; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$

$C(u) = \{P(u) ; P \in \mathbb{R}_2[X]\}$

Donc $C(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Finalement $C(u) = \mathbb{R}[u]$.