PARTIE III Centre de $L(E)$.

Q11 Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $e_i\neq 0_E$ donc e_i est un vecteur propre de u par hypothèse.

Alors $\exists\lambda_i\in\mathbb{R}$, $u(e_i)=\lambda_i e_i$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\exists\,\lambda_i\in\mathbb{R}$, $u(e_i)=\lambda_i e_i$

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. $e_i+e_j\neq 0_E$ car (e_i,e_j) est libre.

Donc e_i+e_j est un vecteur propre de u. $\exists\,\alpha_{ij}\in\mathbb{R}^2$, $u(e_i+e_j)=\alpha_{i,j}(e_i+e_j)$.

Alors $\lambda_i e_i+\lambda_j e_j=u(e_i)+u(e_j)=u(e_i+e_j)=\alpha_{i,j}(e_i+e_j)$.

Donc $(\lambda_i-\alpha_{i,j})e_i+(\lambda_j-\alpha_{i,j})e_j=0_E$. Comme (e_i,e_j) est libre : $\lambda_i-\alpha_{ij}=0$ et

$\lambda_j-\alpha_{ij}=0$. Alors $\lambda_i=\alpha_{i,j}$ et $\lambda_j=\alpha_{i,j}$. $\lambda_i=\lambda_j$.

$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow\lambda_i=\lambda_j$.

Alors $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$. Posons $\lambda=\lambda_1$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u(e_i)=\lambda e_i$. Ainsi les endomorphismes u et λId_E de E coïncident sur la base $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E. Donc ils sont égaux. $u=\lambda Id_E$.

Donc u est une homothétie vectorielle.

Q12 Soit p la projection sur F parallèlement à G.

$v\in C(U)$ et $p\in U$ donc $v\circ p=p\circ v$.

Alors $v(e)=v(p(e))=p(v(e))$. Alors $p(v(e))=v(e)$; $v(e)\in Ker(p-Id_E)$.

$e\in F$ donc $p(e)=e$

Or $Ker(p-Id_E)=Im\,p=F$. Alors $v(e)\in F=Vect(e)$.

Donc $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $v(e)=\alpha e$; e est un vecteur propre de v $(e\neq 0_E\cdots)$.

Ainsi tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de v donc v est une homothétie vectorielle.

Tout élément de $C(U)$ est une homothétie vectorielle.

Réciproquement soit h une homothétie vectorielle de E. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $h = \lambda Id_E$.

$\forall w \in U$, $w \circ h = w \circ (\lambda Id_E) = \lambda w \circ Id_E = \lambda w = (\lambda Id_E) \circ w = h \circ w$.

Ainsi $h \in C(U)$.

<u>$C(U)$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E</u>

Q13 → Toute homothétie vectorielle de E commute avec tout endomorphisme de E.

Ainsi <u>l'ensemble des homothéties vectorielles est contenu dans $C(\mathcal{L}(E))$</u>.

→ Réciproquement les éléments de $C(\mathcal{L}(E))$ commutent avec tous les endomorphismes de E donc avec tous les projecteurs de E. D'après Q12 on peut alors dire que <u>les éléments de $C(\mathcal{L}(E))$ sont des homothéties vectorielles.</u>

Ainsi <u>$C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothétie vectorielles de E</u>.

PARTIE <u>IV</u> Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Q14 C'est ce qui a été prouvé dans le préliminaire question 3 !!

<u>Pour tout élément v de $C(u)$ et pour tout élément i de $[\![1, p]\!]$, $E_i = SEP(u, \lambda_i)$ est stable par v.</u>

Q15 Soit v un endomorphisme de E laissant stable $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Notons que $v \circ u = u \circ v$.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$u(x) = u(\sum_{i=1}^{p} x_i) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Alors <u>$v(u(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$</u>.

$u(v(x)) = u(v(\sum_{i=1}^{p} x_i)) = \sum_{i=1}^{p} u(v(x_i)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$; <u>$u(v(x)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$</u>

↑ E_i est stable par v donc $v(x_i) \in E_i$ car $x_i \in E_i$

Alors $v(u(x)) = u(v(x))$

$(v \circ u)(x) = (u \circ v)(x)$ et ceci pour tout $x \in E$. Donc $v \circ u = u \circ v$, <u>$v \in C(u)$</u>.

R

Donc si v est un endomorphisme de E qui laisse stable $E_1, E_2, \dots, E_p$ alors $v \in C(u)$.

Remarque.. Q14 et Q15 montrent que les éléments de $C(u)$ sont les endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres $E_1, E_2, \dots, E_p$ de u.

Q16 Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ considérons une base $\mathcal{B}_i = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i)$ de E_i.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ donc $\mathcal{B} = $ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$" est une base de E. $r_i := \dim E_i \dots$

Notons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall k \in [\![1,r_i]\!]$, $u(e_k^i) = \lambda_i e_k^i$.

$\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de u et la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale... nous y reviendrons en Q19.

* Soit v un élément de $C(u)$. $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont stables par v.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ considérons l'endomorphisme v_i de E_i défini par :

$\forall x \in E_i$, $v_i(x) = v(x)$ et notons A_i sa matrice dans la base $\mathcal{B}_i$.

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale par blocs égale à

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & A_p \end{pmatrix}.$$ Notons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{R})$.

* Réciproquement soit v un endomorphisme de E pour lequel il existe p matrices $A_1, A_2, \dots, A_p$ appartenant respectivement à $\mathcal{M}_{r_1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{r_2}(\mathbb{R}), \dots, \mathcal{M}_{r_p}(\mathbb{R})$

telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ soit la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots & A_p \end{pmatrix}$

Alors pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,r_i]\!]$, $v(e_k^i)$ est combinaison linéaire de $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i$.

Donc $v(E_i) = v(\mathrm{Vect}(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i)) = \mathrm{Vect}(v(e_1^i), v(e_2^i), \dots, v(e_{r_i}^i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i) = E_i$

et ceci pour tout i dans $[\![1,p]\!]$. Donc v laisse stable $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Par conséquent $v \in C(u)$.

Ainsi un endomorphisme v de E appartient à $C(u)$ si et seulement si il existe p matrices $A_1, A_2, \dots, A_p$ appartenant à $M_{r_1}(\mathbb{R}), M_{r_2}(\mathbb{R}), \dots, M_{r_p}(\mathbb{R})$ telles que $M_B(v)$ soit la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$.

(Q17) Soit L l'application de $C(u)$ dans $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$ qui à v dans $C(u)$ associe $(M_{B_1}(v_1), M_{B_2}(v_2), \dots, M_{B_p}(v_p))$ où pour tout i dans $[\![1, p]\!]$ v_i est l'endomorphisme de E_i qui coïncide avec v sur E_i.

Ce qui précède montre sans difficulté que :

1) L est bien une application de $C(u)$ dans $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$.

2) L est surjective.

La linéarité de L ne fait aucun doute car si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $(v, w) \in (C(u))^2$: $(\lambda v + w)_i = \lambda v_i + w_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et donc $M_{B_i}((\lambda v + w)_i) = \lambda M_{B_i}(v_i) + M_{B_i}(w_i)$.

L'injectivité de L est également assez claire car deux endomorphismes ayant même matrice dans une même base sont égaux.

Alors L est un isomorphisme de $C(u)$ sur $M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})$.

Exercice.. Faire une preuve détaillée de ce résultat.

Ainsi $\dim C(u) = \dim (M_{r_1}(\mathbb{R}) \times M_{r_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{r_p}(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{p} \dim M_{r_i}(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$

$\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

Remarque.. Il aurait sans doute été plus rapide d'établir que

$\hat{L} : C(u) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1) \times \mathcal{L}(E_2) \times \dots \times \mathcal{L}(E_p)$ est un isomorphisme ... mais ce
$v \longmapsto (v_1, v_2, \dots, v_p)$ n'est pas la logique de l'énoncé.

R

Q18 $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i \leq r_i^2$.

Alors $n = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i = \sum_{i=1}^{p} r_i \leq \sum_{i=1}^{p} r_i^2 = \dim C(u)$; $\underline{\dim C(u) \geq n}$.

↑ u est diagonalisable

__1er Cas__ u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors 1°/ $p = n$

2°/ $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = 1$ (les sous-espaces propres de u sont nécessairement des droites vectorielles).

Ainsi $\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 \underset{1°/}{=} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \underset{2°/}{=} \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$. $\dim C(u) = n$.

__2e Cas..__ u n'admet pas n valeurs propres deux à deux distinctes.

Alors 1°/ $p < n$

2°/ Au moins un des sous-espaces propres est de dimension strictement supérieure à 1 (dans le cas contraire $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $r_i = 1$ et alors $p = \sum_{i=1}^{p} r_i = n$!)

donc $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $r_{i_0} > 1$. Ainsi $r_{i_0}^2 > r_{i_0}$.

Alors $\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 = r_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i^2 \geq r_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i > r_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} r_i = \sum_{i=1}^{p} r_i = n$.

Finalement $\dim C(u) > n$.

Par ce qui précède $\underline{\underline{\dim C(u) = n \text{ si et seulement si } u \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}}$.

Q19 Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres, dans l'ordre, associées aux n vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.

$\underline{M = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$.

Une récurrence simple donne $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)}$.

Alors $\underline{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(M) = \mathrm{Diag}(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n))}$.

(Q20) Reprenons les notations de Q19.

$\Pi = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Alors $\Pi(M) = \mathrm{Diag}(\Pi(\alpha_1), \Pi(\alpha_2), \dots, \Pi(\alpha_n))$.

Or $\mathrm{Sp}\, M = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Comme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les zéros de Π : $\forall i \in [\![1, p]\!], \Pi(\lambda_i) = 0$ et

donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \Pi(\alpha_i) = 0$.

Alors $\Pi(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $\underline{\underline{\Pi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$.

(Q21) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Supposons que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors le spectre u est contenu dans l'ensemble des zéros de P.
  Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p zéros distincts de P. $\forall i \in [\![1, p]\!], P(\lambda_i) = 0$.
- Supposons que $\forall i \in [\![1, p]\!], P(\lambda_i) = 0$.
  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant deux à deux distincts, $\Pi = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ divise P.

Donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = Q\Pi$.

Alors $P(u) = Q(u) \circ \Pi(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\underline{\underline{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], P(\lambda_i) = 0}}$. Remarque.. On pouvait aller plus vite avec Q19...

(Q22) Soit $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \gamma_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_k X^k$. Notons que $\deg P \leq p-1$.

Alors $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p zéros distincts de P.

Comme $\deg P \leq p-1$: P est le polynôme nul. Alors $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-1} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \text{ est une famille libre}}}$.

Q23 Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Supposons $k \geq p$. Effectuons la division euclidienne de X^k par Π.

$\exists (\hat{Q}, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $X^k = \hat{Q}\,\Pi + R$ avec $\deg R < \deg \Pi = p$.

Alors $u^k = \hat{Q}(u) \circ \Pi(u) + R(u) = \hat{Q}(u) \circ O_{\mathcal{L}(E)} + R(u) = R(u)$.

$\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $R = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i X^i$ car $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Alors $u^k = R(u) = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i u^i$ donc $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists s \in \mathbb{N}$, $\exists (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$, $P = \sum_{k=0}^{s} \gamma_k X^k$.

$P(u) = \sum_{k=0}^{s} \gamma_k u^k$ et $\forall k \in [\![0, s]\!]$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Donc $P(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. Donc $\mathbb{R}[u] \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

* Réciproquement soit $v \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$

$\exists (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $v = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k u^k$. Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k X^k$.

Alors $v = P(u)$. Donc $v \in \mathbb{R}[u]$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \subset \mathbb{R}[u]$

Finalement $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$

Comme la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre c'est une base de $\mathbb{R}[u]$. Ainsi $\dim \mathbb{R}[u] = p$.

Q24 * Supposons que u admette n valeurs propres distinctes.

Alors $p = n$. On a alors $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$ d'après Q3 et

$\dim \mathbb{R}[u] = p = n = \dim C(u)$ d'après Q18 et Q23.

Donc $\mathbb{R}[u] = C(u)$.

R.

* Supposons que $\mathbb{R}[u] = C(u)$.

Alors $\dim \mathbb{R}[u] = \dim C(u)$.

Or $\dim \mathbb{R}[u] = p$ et $\dim C(u) \geq n$. Donc $p \geq n$.

Comme p est le nombre de valeurs propres de u et que $\dim E = n$: $p \leq n$.

Finalement $p = n$. u admet n valeurs propres distinctes.

Ainsi : $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

PARTIE V Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Q25 Soit $w \in C_2(u)$. w commute avec tous les éléments de $C(u)$.

Or u commute avec u donc $u \in C(u)$

Donc w commute avec u et ainsi $w \in C(u)$.

$\forall w \in C_2(u)$, $w \in C(u)$. $C_2(u) \subset C(u)$.

Q26 Soit $v \in C(u)$. $v \circ u = u \circ v$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $v \circ u^k = u^k \circ v$

- c'est vrai pour $k=0$ car $u^0 = Id_E$
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$v \circ u^{k+1} = (v \circ u^k) \circ u \overset{\mathcal{I}}{=} (u^k \circ v) \circ u = u^k \circ (v \circ u) \underset{v \circ u = u \circ v}{=} u^k \circ (u \circ v) = u^{k+1} \circ v$.

ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $v \circ u^k = u^k \circ v$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

$v \circ P(u) = v \circ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^{r} a_k \, v \circ u^k = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k \circ v = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k u^k\right) \circ v = P(u) \circ v$

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) \circ v = v \circ P(u)$ et ceci pour tout v dans $C(u)$.

Alors $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) \in C(C(u))$. Donc $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.

Q27) 1er cas.. $p=1$. Alors $E = E_1 = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 Id_E)$. Donc $u = \lambda_1 Id_E$.

Ainsi $C(u) = \mathcal{L}(E)$. Donc $C_2(u) = C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

Soit $v \in C_2(u)$. $v_1 = v \in C(\mathcal{L}(E))$ car $C_2(u) = C(\mathcal{L}(E))$. $v_1 \in C(\mathcal{L}(E_1))$ car $C(\mathcal{L}(E))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E et de E_1.

$\exists \mu_1 \in \mathbb{R}, v_1 = \mu_1 Id_{E_1}$.

2e cas.. $p \geq 2$. $E = E_i \oplus E'_i$ où $E'_i = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^{p} E_j$ et ceci pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ notons p_i la projection sur E_i parallèlement à E'_i.

Soit $v \in C_2(u)$. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. v commute avec tous les éléments de $C(u)$. Montrons que v_i commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E_i)$.

Soit $w_i \in \mathcal{L}(E_i)$. Posons $\forall x \in E$, $w(x) = w_i(p_i(x))$ (notons que w n'est pas $w_i \circ p_i \cdots$). w est clairement un endomorphisme de E.

Montrons que $w \in C(u)$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$.

$$w(u(x)) = w\left(\sum_{k=1}^{p} u(x_k)\right) \overset{\forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k \in E_k}{=} w\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k w(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k w_i(p_i(x_k))$$

Or $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $p_i(x_k) = \begin{cases} x_i & \text{si } k=i \\ 0_E & \text{si } k \neq i \end{cases}$. Donc $w(u(x)) = \lambda_i w_i(x_i)$.

$$u(w(x)) = u\left(w\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right) = u\left(\sum_{k=1}^{p} w(x_k)\right) = u\left(\sum_{k=1}^{p} w_i(p_i(x_k))\right) = u(w_i(x_i)).$$

Or $w_i \in \mathcal{L}(E_i)$ donc $w_i(x_i) \in E_i$. Alors $u(w(x)) = \lambda_i w_i(x_i)$.

$\forall x \in E$, $w(u(x)) = u(w(x))$; $w \circ u = u \circ w$; $w \in C(u)$.

Q2 $v \in C_2(u)$ donc $v \circ w = w \circ v$.

Alors $\forall x \in E$, $v(w(x)) = w(v(x))$.

Donc $\forall x \in E_i$, $v(w(x)) = w(v(x))$. Soit $x \in E_i$.

- $w(x) = w_i(p_i(x)) = w_i(x)$; $w(x) \in E_i$.

Alors $v(w(x)) = v_i(w(x)) = v_i(w_i(x))$.

$v_i(x) \in E_i$

- $x \in E_i$ donc $v(x) = v_i(x)$. $w(v(x)) = w(v_i(x)) = w_i(p_i(v_i(x))) = w_i(v_i(x))$.

Ainsi $v_i(w_i(x)) = v(w(x)) = w(v(x)) = w_i(v_i(x))$ et ceci pour tout x dans E_i

Donc $v_i \circ w_i = w_i \circ v_i$ et ceci pour tout $w_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

Alors $\underline{\underline{v_i \in C(\mathcal{L}(E_i))}}$. D'après Q13 $C(\mathcal{L}(E_i))$ est l'ensemble des homothéties vectorielles de E_i. Donc $\underline{\underline{\exists \mu_i \in \mathbb{R},\ v_i = \mu_i \mathrm{Id}_{E_i}}}$.

Q18 Posons $\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $S(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p))$.

S est une application de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^p$ dont est linéaire.

Montrer que S est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^p$.

Comme $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = p = \dim \mathbb{R}^p < +\infty$ il ne reste plus qu'à montrer que S est injective.

Soit $P \in \ker S$. $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_p)) = 0_{\mathbb{R}^p}$.

$P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \dots = P(\lambda_p) = 0$.

donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et admet au moins p racines distinctes.

Alors P est le polynôme nul. ceci achève de montrer que S est injective et que <u>S est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^p$.</u>

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P(\lambda_i) = \rho_i \Leftrightarrow S(P) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p) \Leftrightarrow P = S^{-1}((\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p))$.

Ainsi il existe un unique élément φ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(\lambda_i) = \rho_i$.

$(\varphi = S^{-1}((\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)))$.

Q29 Reprenons v dans $C_2(u)$ et toutes les notations de Q28.

Montrons que $v \in \mathbb{R}[u]$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\exists \rho_i \in \mathbb{R}$, $v_i = \rho_i \, Id_{E_i}$ et $\exists \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(\lambda_i) = \rho_i$.

Montrons que $v = \varphi(u)$. Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$,

$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

$u(x_i) = \lambda_i x_i$ donc $\varphi(u)(x_i) = \varphi(\lambda_i) x_i$.

$$v(x) = \sum_{i=1}^{p} v(x_i) = \sum_{i=1}^{p} v_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \varphi(\lambda_i) x_i \overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{p} (\varphi(u))(x_i).$$

$$v(x) = \varphi(u)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \varphi(u)(x).$$

Alors $\forall x \in E$, $v(x) = \varphi(u)(x)$; $v = \varphi(u)$ et ainsi $v \in \mathbb{R}[u]$.

Donc $\forall v \in C_2(u)$, $v \in \mathbb{R}[u]$. $C_2(u) \subset \mathbb{R}[u]$.

Or Q26 a montré que $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.

Par conséquent $C_2(u) = \mathbb{R}[u]$ et même $C_2(u) = \mathbb{R}_{p-1}[u]$.