Quelques remarques avant de commencer

R1 Soit f une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Soit A la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et à la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

X a pour matrice X dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. !!

Donc $f(X)$ a pour matrice AX dans la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Mais $f(X)$ a également pour matrice $f(X)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $M_{m,1}(\mathbb{R})$

Donc $f(X)=AX$.

$\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X)=AX.$

$\operatorname{Ker} f=\{X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\mid f(X)=0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}\}=\{X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\mid AX=0_{M_{m,1}(\mathbb{R})}\}=\operatorname{Ker} A.$

$\operatorname{Im} f=\{f(X)\,;\,X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}=\{AX\,;\,X\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}=\operatorname{Im} A.$

$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} A$.

R2 Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Posons $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ g(X)=AX$.

- g est une application
- g est clairement linéaire.

Donc g est une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Soit G la matrice de g relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et à la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. D'après R1 : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = GX$.

Posons $\mathcal{B}_n = (E_1, E_2, \dots, E_n)$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

AE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de A, GE_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne et $AE_j = f(E_j) = GE_j$.

Alors la $j^{\text{ième}}$ colonne de A coïncide avec la $j^{\text{ième}}$ colonne de G et ceci pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ donc $A = G$.

Alors A est la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et à la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On a encore $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} A$

R3 Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = A'X$.

Posons $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$ et $\hat{f}(X) = A'X$.

$f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}))$, $\hat{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m) = A$ et

$\mathcal{M}(\hat{f}, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m) = A'$.

Or $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f(X) = AX = A'X = \hat{f}(X)$. Donc $f = \hat{f}$.

Alors $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m) = \mathcal{M}(\hat{f}, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m) = A'$. $\underline{\underline{A = A'}}$.

R4 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, p la projection orthogonale sur F et P sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après R1 :

R4-1 $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $p(X) = PX$.

R4-2 $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} P = F^{\perp}$

R4-3 $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}) = \operatorname{Ker}(P - I_n) = \operatorname{Im} P = F$.

R4-4 $\forall X \in F$, $PX = X$.

R4-5 $\forall X \in F^{\perp}$, $PX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\boxed{R5}$ Théorème du rang. || Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. ||

Posons $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $g(X) = AX$.

g est une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ est A d'après R2.

R1 donne $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A$.

Alors $n = \dim M_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A$.

Donc $\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = n}}$.

$\boxed{R6}$ Il résulte de R3 que si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\underline{\underline{\left(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\right) \Rightarrow A = 0_{M_{m,n}(\mathbb{R})}}}$$

$\boxed{R7}$ Le texte nous permet de dire que $\underline{\underline{\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA}}$.

Q1 Question préliminaire

$(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est une base orthonormée de F. Notons p la projection orthogonale sur F.

le cours indique que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $p(X) = \sum_{i=1}^{k} \langle U_i, X \rangle U_i$.

donc $p(X) = \sum_{i=1}^{k} ({}^tU_i X) U_i = \sum_{i=1}^{k} U_i ({}^tU_i X) = \sum_{i=1}^{k} (U_i {}^tU_i) X$.

${}^tU_i X$ est une matrice de $M_1(\mathbb{R})$.

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $p(X) = \sum_{i=1}^{k} (U_i {}^tU_i) X$. Rappelons que P est la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $U_i \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tU_i \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $U_i {}^tU_i \in M_n(\mathbb{R})$ donc

$\sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. PE_j est la $j^{ème}$ colonne de P.

E_j a pour matrice E_j dans $\mathcal{B}_n$ (!) donc $p(E_j)$ a pour matrice PE_j dans la base $\mathcal{B}_n$.

Mais $p(E_j)$ a aussi pour matrice $p(E_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $p(E_j) = PE_j$.

donc $PE_j = \left(\sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i\right) E_j$. Alors la $j^{ème}$ colonne de P coïncide avec la $j^{ème}$ colonne

de $\sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i$ et ceci pour tout j dans $[\![1, n]\!]$. Ainsi : $P = \sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i$.

${}^tP = {}^t\left(\sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i\right) = \sum_{i=1}^{k} {}^t(U_i {}^tU_i) = \sum_{i=1}^{k} {}^t({}^tU_i)\, {}^tU_i = \sum_{i=1}^{k} U_i {}^tU_i = P$; ${}^tP = P$.

P est une matrice symétrique. Remarque.. Nous aurions pu utiliser directement $\boxed{R2}$

PARTIE I Décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$ associée à une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q1 a) ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ donc ${}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$.

${}^tAA$ est une matrice de taille n ou d'ordre n à coefficient réel.

Soit $X \in \mathrm{Ker}\, A$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tAA$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^tAA}}$.

b) Soit $X \in \mathrm{Ker}\, {}^tAA$. ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. ${}^tX\,{}^tAAX = 0_{\mathbb{R}}$.

${}^t(AX)AX = 0$; $\|AX\|_m^2 = 0$; $\|AX\|_m = 0$. Ainsi $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ et : $X \in \mathrm{Ker}\, A$.

ceci montre que $\mathrm{Ker}\, {}^tAA \subset \mathrm{Ker}\, A$. Comme $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, {}^tAA$, on peut dire que :

$\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, {}^tAA}}$.

$A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \underset{\boxed{R6}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Ker}\, A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, {}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \underset{\boxed{R6}}{\Longleftrightarrow} {}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\underline{\underline{A \text{ et } {}^tAA \text{ sont simultanément nulles}}}$.

c) Soit $Y \in \mathrm{Im}\, {}^tAA$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAAX = Y$.

Posons $Z = AX$. $Z \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tAZ = Y$ donc $Y \in \mathrm{Im}\, {}^tA$.

Alors $\underline{\mathrm{Im}\, {}^tAA \subset \mathrm{Im}\, {}^tA}$.

Le théorème du rang appliqué à A et à ${}^tAA$ donne :

$\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{rg}\, A$ et $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}\, {}^tAA + \mathrm{rg}({}^tAA)$. $\leftarrow \boxed{R5}$

Or $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, {}^tAA$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, {}^tAA = \dim \mathrm{Ker}\, A$.

Ainsi $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}({}^tAA)$. Or d'après le rappel $\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, A$. $\leftarrow \boxed{R7}$

donc $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}\, {}^tA$ ou $\underline{\dim \mathrm{Im}\, {}^tAA = \dim \mathrm{Im}\, {}^tA}$ ($< +\infty$!).

$\mathrm{Im}\, {}^tAA \subset \mathrm{Im}\, {}^tA$ et $\dim \mathrm{Im}\, {}^tAA = \dim \mathrm{Im}\, {}^tA$ ($< +\infty$!) donnent $\mathrm{Im}\, {}^tAA = \mathrm{Im}\, {}^tA$.

$\underline{\underline{\mathrm{Im}\, {}^tA = \mathrm{Im}\, {}^tAA}}$.

Q3 a) ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$ et ${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^tAA$ est une matrice (carrée) symétrique à coefficients réels donc

<u>${}^tAA$ est diagonalisable.</u>

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$. Soit X un vecteur propre associé. Notons que $\lambda \in \mathbb{R}$!

$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAAX = \lambda X$.

Alors $\|AX\|_m^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\,{}^tXX = \lambda \|X\|_n^2$.

Comme $\|X\|_n^2 \neq 0$: $\lambda = \dfrac{\|AX\|_m^2}{\|X\|_n^2}$ donc λ est un réel positif ou nul.

<u>Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls.</u>

b) Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,p]\!]$ (ce qui suppose $p \geq 2$).

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $P_jX \in \mathrm{Im}\,P_j \overset{\boxed{R4.3}}{=} \mathrm{Ker}(P_j - I_n) = E_{\lambda_j}({}^tAA)$.

Or $E_{\lambda_j}({}^tAA)$ est orthogonal à $E_{\lambda_i}({}^tAA)$. Donc $P_jX \in (E_{\lambda_i}({}^tAA))^{\perp}$.

Or $(E_{\lambda_j}({}^tAA))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,P_i$ ($\boxed{R4.2}$). Donc $P_iP_jX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $P_iP_jX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $P_iP_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $\boxed{R6}$

<u>$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow P_iP_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.</u>

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists!\,(X_1, X_2, \dots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \dots \times E_{\lambda_p}({}^tAA)$, $X = \sum_{j=1}^{p} X_j$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $P_iX = \sum_{j=1}^{p} P_iX_j \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{p} P_iP_jX_j \overset{P_iP_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ si } i \neq j}{=} P_iP_iX_i = P_i^2X_i \overset{P_i^2 = P_i}{=} P_iX_i = X_i$.

$P_jX_j = X_j$ car $X_j \in E_{\lambda_j}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(P_j - I_n)$

$X_i \in \mathrm{Ker}(P_i - I_n)$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P_iX = X_i$.

$$X = \sum_{i=1}^{p} X_i = \sum_{i=1}^{p} P_iX = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right)X$$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $I_nX = X = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right)X$ donc $\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$ ou <u>$I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i$</u>

$\boxed{R3}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists ! (X_1, X_2, \dots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \dots \times E_{\lambda_p}({}^tAA)$, $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

$$ {}^tAA\,X = \sum_{i=1}^{p} {}^tAA\,X_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i X = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X .$$

voir plus haut !

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $({}^tAA)X = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X$ donc $\underline{\underline{{}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i}}$ ($\boxed{R3}$).

Q4 a) $ {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$ {}^tAAX = \lambda X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ -3x + 3y = \lambda y \\ 6z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = -\lambda y \\ 3x - 3y = \lambda x \\ (\lambda - 6) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda (x+y) = 0 \\ y = x - \frac{\lambda}{3} x \\ (\lambda - 6) z = 0 \end{cases} $$

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas}}}$.. $\lambda = 0$ ${}^tAAX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$.

Alors $\underline{0 \text{ est valeur propre de } {}^tAA \text{ et } E_0({}^tAA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ cas}}}$.. $\lambda \neq 0$ ${}^tAAX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - \frac{\lambda}{3} x \\ (\lambda - 6) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (2 - \frac{\lambda}{3}) x = 0 \\ (\lambda - 6) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (6 - \lambda) x = 0 \\ (\lambda - 6) z = 0 \end{cases}$.

a) $\lambda \neq 6$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors λ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$.

b) $\lambda = 6$ ${}^tAAX = \lambda X \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$

Alors $\underline{6 \text{ est valeur propre de } {}^tAA \text{ et } E_6({}^tAA) \text{ est l'hyperplan d'équation}}$

$\underline{x + y = 0 \text{ dans la base canonique de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\mathrm{Sp}\,{}^tAA = \{0, 6\}$. Ici $p = 2$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$

Soit P_1 (resp. P_2) la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_1}({}^tAA)$ (resp. $E_{\lambda_2}({}^tAA)$).

Alors $I_3 = P_1 + P_2$ et ${}^tAA = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 6 P_2$

Donc $P_2 = \frac{1}{6}\,{}^tAA = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P_1 = I_3 - P_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_1=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } P_2=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

La décomposition spectrale de A est : $0\times\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+6\times\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

D) Notons que $A\,{}^tA=(a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

$${}^tAA=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1\ a_2 \cdots a_n) = (a_i a_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}.$$

$$({}^tAA)^2=\Big(\sum_{l=1}^{n} a_i a_l a_l a_j\Big)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=\Big(\Big(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\Big)a_i a_j\Big)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=\Big(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\Big)(a_i a_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}=(A\,{}^tA)\,{}^tAA.$$

Alors $({}^tAA)^2-(A\,{}^tA)\,{}^tAA=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Le polynôme $X^2-(A\,{}^tA)X$ est annulateur pour la matrice ${}^tAA$.

Les zéros de ce polynôme annulateur sont 0 et $A\,{}^tA$ donc $\mathrm{Sp}\,{}^tAA\subset\{0, A\,{}^tA\}$.

$$\mathrm{Ker}\,{}^tAA=\mathrm{Ker}\,A=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \middle|\ (a_1\ a_2\cdots a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \middle|\ \sum_{l=1}^{n} a_l x_l=0\right\}$$

Rappelons que les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas simultanément nuls.

Alors $\mathrm{Ker}\,{}^tAA$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Distinguons alors deux cas.

1er cas. $n=1$. ${}^tAA\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et ${}^tAA=(a_1^2)=(A\,{}^tA)$

Alors $\mathrm{Sp}\,{}^tAA=\{a_1^2\}=\{A\,{}^tA\}$.

Ici $p=1$ et $\lambda_1=a_1^2=A\,{}^tA$. $A=a_1^2P_1$ donc $P_1=I_1$.

La décomposition spectrale de ${}^tAA$ est ${}^tAA=a_1^2\,I_1$.

2ème cas. $n\geq 2$. Alors $\mathrm{Ker}\,{}^tAA$ a une dimension non nulle car $n-1\geq 1$.

donc 0 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé $E_0({}^tAA)$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^tAA$ est symétrique donc elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Comme $0 \in Sp\, {}^tAA$ et $\dim E_0({}^tAA) = n-1$, ${}^tAA$ admet une autre valeur propre qui ne peut être que $A{}^tA$ et dont le sous-espace propre est l'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ c'est à dire la droite vectorielle de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

<u>Résumons</u>.. $\underline{Sp\, {}^tAA = \{0, A{}^tA\}}$. $E_0({}^tAA)$ est l'hyperplan d'équation $a_1u_1 + \dots + a_nv_n = 0$ dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $E_{A{}^tA}({}^tAA) = \mathrm{Vect}({}^tA)$.

Ici $p = 2$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = A{}^tA$. ${}^tAA = 0.P_1 + A{}^tA\, P_2$ donc $P_2 = \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$.

Alors $P_1 = I_n - \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$.

<u>La décomposition spectrale de ${}^tAA$ est ${}^tAA = 0.P_1 + A{}^tA\, P_2$ où $P_2 = \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$. $P_1 = I_n - \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$.</u>

<u>Exercice</u>.. Retrouver directement que $P_2 = \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$ et $P_1 = I_n - \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA$.

PARTIE II Pseudo solution d'une équation linéaire.

Q5 On suppose qu'il existe X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel(le) que $AX_0 = B$.

* Soit X_1 une pseudo solution de l'équation $AX=B$.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX_1 - B\|_m \leq \|AZ-B\|_m$. En particulier $\|AX_1-B\|_m \leq \|AX_0-B\|_m = 0$.

Alors $\|AX_1-B\|_m = 0$, $AX_1 - B = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$. $AX_1 = B$. Alors X_1 est solution de l'équation $AX=B$.

* Réciproquement soit X_1 une solution de l'équation $AX=B$.

$X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX_1 = B$.

Alors $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX_1-B\|_m = 0 \leq \|AZ-B\|_m$ donc X_1 est une pseudo solution de l'équation $AX=B$.

<u>Ainsi si l'équation $AX=B$ admet une solution les pseudo solutions de l'équation sont LES solutions de l'équation.</u>

Q6 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX-B\|_m \leq \|AZ-B\|_m$ donc $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX-B\|_m^2 \leq \|AZ-B\|_m^2$.

Alors $\|AX-B\|_m^2 \leq \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 = \|AX-B+\lambda AY\|_m^2 = \|AX-B\|_m^2 + 2\langle AX-B, \lambda AY\rangle + \|\lambda AY\|_m^2$.

Donc $0 \leq 2\lambda \langle AY, AX-B\rangle + \lambda^2 \|AY\|_m^2 = 2\lambda\, {}^t(AY)(AX-B) + \lambda^2 \|AY\|_m^2$.

<u>Alors $0 \leq \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda\, {}^tY\,{}^tA(AX-B)$ et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda\left[\lambda \|AY\|_m^2 + 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B)\right]$

donc
$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, & 0 \leq \lambda \|AY\|_m^2 + 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \quad (1) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_-^*, & 0 \geq \lambda \|AY\|_m^2 + 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \quad (2) \end{cases}$$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans (1) (resp. (2))

on obtient $2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \geq 0$ (resp. $2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \leq 0$).

Alors $0 \leq 2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) \leq 0$. $2\,{}^tY\,{}^tA(AX-B) = 0$. <u>${}^tY\,{}^tA(AX-B) = 0$.</u>

$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $< Y, {}^tA(AX-B) > = {}^tY\,{}^tA(AX-B) = 0$.

Alors ${}^tA(AX-B) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. ${}^tA(AX-B) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; ${}^tAAX - {}^tAB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Donc ${}^tAAX = {}^tAB$.

<u>Si X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$ alors ${}^tAAX = {}^tAB$.</u>

(Q7) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = {}^tAB$.

Montrons que X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.

Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\|AZ-B\|_m^2 = \|A(Z-X) + AX-B\|_m^2 = \|A(Z-X)\|^2 + 2 < A(Z-X), AX-B > + \|AX-B\|_m^2$

$< A(Z-X), AX-B > = {}^t(A(Z-X))(AX-B) = {}^t(Z-X)\,{}^tA(AX-B) = {}^t(Z-X)({}^tAAX - {}^tAB) = 0$ car ${}^tAAX = {}^tAB$.

Donc $\|AZ-B\|_m^2 = \|A(Z-X)\|_m^2 + \|AX-B\|_m^2 \geq \|AX-B\|_m^2$. Ainsi $\|AX-B\| \leq \|AZ-B\|$.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX-B\| \leq \|AZ-B\|$. X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.

<u>Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si ${}^tAAX = {}^tAB$: X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.</u>

${}^tAB \in \operatorname{Im} {}^tA$ et $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Im} {}^tAA$. Alors ${}^tAB \in \operatorname{Im} {}^tAA$.

Donc $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAAX = {}^tAB$. X est alors une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.

Résumons... • <u>l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$ admet au moins une pseudo solution.</u>

• <u>ses pseudo solutions sont les $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tAAX = {}^tAB$.</u>

Q8 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tAAX=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3y\\-3x+3y\\6z\end{pmatrix} \text{ et } {}^tAB=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}.$$

$${}^tAAX={}^tAB \iff \begin{cases}3x-3y=3\\-3x+3y=-3\\6z=6\end{cases} \iff \begin{cases}y=x-1\\z=1\end{cases}.$$

L'ensemble des pseudo-solution de l'équation $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ est $\left\{\begin{pmatrix}x\\x-1\\1\end{pmatrix};\ x\in\mathbb{R}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\left\|\begin{pmatrix}x\\x-1\\1\end{pmatrix}\right\|_3^2 = x^2+(x-1)^2+1^2=2x^2-2x+1+1=2(x^2-x)+2=2(x-\tfrac{1}{2})^2-2\times\tfrac{1}{4}+2.$$

$$\left\|\begin{pmatrix}x\\x-1\\1\end{pmatrix}\right\|_3^2 = 2(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{3}{2} \geq 2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2} = \left\|\begin{pmatrix}1/2\\1/2-1\\1\end{pmatrix}\right\|_3^2.$$

avec égalité si et seulement si $x=\frac{1}{2}$.

$\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ est l'unique pseudo solution de l'équation $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ de norme minimale.

Q9 Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

X pseudo solution de l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$

$\Updownarrow$

${}^tAAX={}^tAAX_0$ (car ${}^tAAX_0={}^tAB$)

$\Updownarrow$

${}^tAA(X-X_0)=0$

$\Updownarrow$

$X-X_0\in\operatorname{Ker}{}^tAA=\operatorname{Ker}A$

$\Updownarrow$

$\exists Y\in\operatorname{Ker}A,\ X=X_0+Y$

Alors l'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une solution et une seule si et seulement si $\operatorname{Ker}A=\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On a $n=\dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\operatorname{rg}A+\dim\operatorname{Ker}A$. $\boxed{\text{RS}}$

Donc $\operatorname{Ker}A=\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}\iff\dim\operatorname{Ker}A=0\iff\operatorname{rg}A=n$.

L'équation $X'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX'=B$ admet une solution et une seule si et seulement si le rang de A est n.

PARTIE III Pseudo inverse d'une matrice

(Q10) L'équation possède au moins une pseudo solution X_0.

Nous avons vu alors que l'ensemble des pseudo solutions de l'équation est alors $\{X_0+Y\ ;\ Y\in \mathrm{Ker}\, A\}$ ou $\{X_0-Y\ ;\ Y\in \mathrm{Ker}\, A\}$!

On cherche alors à montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathrm{Ker}\, A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ Y \longmapsto \|X_0-Y\| \end{array}$ possède un minimum et que ce minimum est atteint en un seul point de $\mathrm{Ker}\, A$.

$\mathrm{Ker}\, A$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Le théorème de meilleure approximation permet de dire que :

1) $\min\limits_{Y\in \mathrm{Ker} A} \|X_0-Y\|$ existe.

2) $\exists !\, Y_0\in \mathrm{Ker}\, A,\ \min\limits_{Y\in \mathrm{Ker} A} \|X_0-Y\| = \|X_0-Y_0\|$

3) Y_0 est la projection orthogonale de X_0 sur $\mathrm{Ker}\, A$.

Alors $S := X_0-Y_0$ est l'unique pseudo solution de l'équation de norme minimale.

Soit une pseudo solution de l'équation donc $^tAAS = {}^tAB$.

Y_0 est la projection orthogonale de X_0 sur $\mathrm{Ker}\, A$. Alors $S = X_0-Y_0 \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp = (\mathrm{Ker}\, {}^tAA)^\perp$

donc $^tAAS = {}^tAB$ et $S\in (\mathrm{Ker}\, {}^tAA)^\perp$.

Réciproquement soit S' un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $^tAAS' = B$ et $S'\in (\mathrm{Ker}\, {}^tAA)^\perp$.

Alors S' est une pseudo solution donc $\exists Y\in \mathrm{Ker}\, A,\ S' = X_0+Y$.

Posons $Y' = -Y$. Alors $S' = X_0-Y'$ et $Y'\in \mathrm{Ker}\, A$

Alors $Y'\in \mathrm{Ker}\, A$ et $X_0-Y' = S' \in (\mathrm{Ker}(^tAA))^\perp = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$. Donc Y' est la projection orthogonale de X_0 sur $\mathrm{Ker}\, A$. Alors $Y' = Y_0$ donc $S' = X_0-Y' = X_0-Y_0 = S$.

Alors S est la pseudo solution de norme minimale.

> L'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une unique pseudo solution de norme minimale notée S et elle est caractérisée par les deux conditions :
>
> ${}^tAAS = {}^tAB$ et S est orthogonal à $\mathrm{Ker}\, {}^tAA$.

Q11 a) Supposons que $\mathrm{rg}\, A = n$.

Q 2 c)

Alors $\mathrm{rg}\, {}^tAA = \dim \mathrm{Im}\, {}^tAA = \dim \mathrm{Im}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, A = n$.

${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}\, {}^tAA = n$ donc ${}^tAA$ est inversible.

Comme ${}^tAAS = {}^tAB$: $S = ({}^tAA)^{-1}\, {}^tAB$.

Notons que dans ce cas $({}^tAA)^{-1}\, {}^tAB$ est l'unique pseudo solution de l'équation.

b) $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$. Alors ${}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Soit S la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

$S \in (\mathrm{Ker}\, {}^tAA)^{\perp} = (\mathrm{Ker}\, 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})^{\perp} = (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^{\perp} = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

donc $S = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Q12 Soit ψ l'application qui à tout élément B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

- ψ est une application de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(B, B') \in (\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^2$.

Posons $S = \psi(B)$ et $S' = \psi(B')$ $\quad \lambda S + S' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^tAAS = {}^tAB$ et ${}^tAAS' = {}^tAB'$ donc ${}^tAA(\lambda S + S') = \lambda\, {}^tAAS + {}^tAAS' = \lambda\, {}^tAB + {}^tAB'$.

${}^tAA(\lambda S + S') = {}^tA(B + \lambda B')$.

$S \in (\mathrm{Ke}\,{}^tAA)^\perp$ et $S' \in (\mathrm{Ke}\,{}^tAA)^\perp$ donc $\underline{\lambda S + S' \in (\mathrm{Ke}\,{}^tAA)^\perp}$.

ceci achève de montrer que $\lambda S + S'$ est la pseudosolution de norme minimale de l'équation $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = (\lambda B + B')$.

Donc $\lambda S + S' = \psi(\lambda B + B')$. Ainsi $\psi(\lambda B + B') = \lambda S + S' = \lambda \psi(B) + \psi(B')$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (B, B') \in (M_{m,1}(\mathbb{R}))^2$, $\psi(\lambda B + B') = \lambda \psi(B) + \psi(B')$. $\underline{\psi \text{ est linéaire.}}$

$\underline{\psi \in \mathcal{L}(M_{m,1}(\mathbb{R}), M_{n,1}(\mathbb{R}))}$.

Dans la suite $A^+ = M(\psi, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n)$.

Notons qu'en échangeant n & m $\boxed{R1}$ permet de dire que $\forall B \in M_{m,1}(\mathbb{R}), \psi(B) = A^+ B$.

Donc pour tout $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, A^+B est l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Q13 a) Supposons $\Gamma(A) = \emptyset$. Alors 0 est la seule valeur propre de ${}^tAA$. $p = 1$ et $\lambda_1 = 0$.

Donc ${}^tAA = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ $\left(\ldots {}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i \right)$

Alors $A = 0_{M_{m,n}(\mathbb{R})}$ d'après Q2 b). Ceci est contraire à l'hypothèse.

Donc $\underline{\Gamma(A) \neq \emptyset}$.

b) Pour montrer que $A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tA$ il suffit de montrer que pour tout B dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$, $A^+B = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tAB$. ($\boxed{R3}$).

Cela revient à montrer que pour tout $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, $\sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\, {}^tAB$ est la pseudosolution de l'équation $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $S = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i \, {}^tAB$

Notons que S est défini et que $S \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons alors que $\begin{cases} {}^tAAS = {}^tAB \\ \text{et} \\ S \in (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp \end{cases}$

Montrons deux petits lemmes.

▲ <u>Lemme 1</u>.. $\forall i \in [\![1,p]\!], \quad {}^tAA P_i = \lambda_i P_i$.

Preuve.. ${}^tAA = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell P_\ell$ donc ${}^tAAP_i = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell P_\ell P_i = \lambda_i P_i^2 = \lambda_i P_i$. ${}^tAAP_i = \lambda_i P_i$.

$P_\ell P_i = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ si $\ell \neq i$; P_i est une matrice de projection

<u>Remarque</u>.. On peut retrouver le résultat en remarquant que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $P_i X \in \operatorname{Im} P_i$ et $\operatorname{Im} P_i = \operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda_i I_n)$. ▼

▲ <u>Lemme 2</u>.. $(\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp = \bigoplus_{i \in \Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Im} {}^tAA$.

<u>Preuve</u>.. <u>1er cas</u>.. $\operatorname{Ker} {}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Alors $(\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De plus 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$ alors $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_i \, ; \, i \in \Gamma(A)\}$ et ${}^tAA$ est inversible. Donc $\bigoplus_{i \in \Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$ et

$\operatorname{Im} {}^tAA \underset{\uparrow \, {}^tAA \text{ est inversible}}{=} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$

<u>2ème cas</u>.. $\operatorname{Ker} {}^tAA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Alors $\lambda_1 = 0$, $E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker} {}^tAA$ et $\Gamma(A) = [\![2,p]\!]$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA) = E_{\lambda_1}({}^tAA) \oplus \bigoplus_{i=2}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Ker} {}^tAA \oplus \left(\bigoplus_{i \in \Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) \right)$.

Donc $\operatorname{Ker} {}^tAA$ et $\bigoplus_{i \in \Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont supplémentaires.

Pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $E_{\lambda_1}({}^tAA)$ et $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont orthogonaux.

Donc pour tout $i \in \Gamma(A)$ $\operatorname{Ker} {}^tAA$ et $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont orthogonaux. Alors $\operatorname{Ker} {}^tAA$ et $\bigoplus_{i \in \Gamma(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont orthogonaux.

$\mathrm{Ker}\,{}^tAA$ et $\bigoplus_{i\in P(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\bigoplus_{i\in P(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$

Soit $i \in P(A)$. Soit $X \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$. ${}^tAAX = \lambda_i X$ donc $X \underset{\lambda_i \neq 0}{\uparrow}= \frac{1}{\lambda_i}{}^tAAX = {}^tAA\left(\frac{1}{\lambda_i}X\right) \in \mathrm{Im}\,{}^tAA$.

$\forall i \in P(A)$, $E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \mathrm{Im}\,{}^tAA$.

donc $\bigoplus_{i\in P(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \mathrm{Im}\,{}^tAA$.

$\dim \bigoplus_{i\in P(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \dim(\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp = n - \dim(\mathrm{Ker}\,{}^tAA) = \dim \mathrm{Im}\,{}^tAA$.

les deux points précédents donnent alors $\bigoplus_{i\in P(A)} E_{\lambda_i}({}^tAA) = \mathrm{Im}\,{}^tAA$.

ceci achève la preuve du lemme 2

Exercice.. Montrer que $(\mathrm{Im}\,{}^tAA)^\perp = \mathrm{Ker}\,{}^tAA$ et retrouver alors $\mathrm{Im}\,{}^tAA = (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$. ▼

Rappelons que $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, que nous avons posé $S = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tAB$ et que nous souhaitons montrer que ${}^tAAS = {}^tAB$ et que $S \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.

- ${}^tAAS = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i}{}^tAA\,P_i\,{}^tAB \underset{\substack{\uparrow \\ {}^tAAP_i = \lambda_i P_i \text{ (lemme 1)}}}{=} \sum_{i\in P(A)} P_i\,{}^tAB$.

1° cas On n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. Alors $P(A) = [\![1,p]\!]$.

donc ${}^tAAS = \sum_{i=1}^{p} P_i\,{}^tAB = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right){}^tAB = I_n\,{}^tAB = {}^tAB$.

2ème cas 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Alors $\lambda_1 = 0$ et $P(A) = [\![2,p]\!]$.

donc ${}^tAAS = \sum_{i=2}^{p} P_i\,{}^tAB$.

Montrons que $P_1\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$. Pour cela montrons que $\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $P_1\,{}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. ${}^tAX \in \mathrm{Im}\,{}^tA = \mathrm{Im}\,{}^tAA = (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp = (E_{\lambda_1}({}^tAA))^\perp = \mathrm{Ker}\,P_1$.

Alors $P_1\,{}^tAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et ceci pour tout $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. donc $\underline{\underline{P_1\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}}}$ $\boxed{R6}$

Alors $^tAAS = \sum_{i=2}^{p} P_i\,{}^tAB = \sum_{i=1}^{p} P_i\,{}^tAB = \left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right){}^tAB = I_n\,{}^tAB = {}^tAB$.

dans les deux cas ${}^tAAS = {}^tAB$.

- Montrons que $S \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.

$\forall i \in P(A)$, $P_i\,{}^tAB \in \mathrm{Im}\,P_i$ et $\mathrm{Im}\,P_i = E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset \bigoplus_{k\in P(A)} E_{\lambda_k}({}^tAA) = \mathrm{Im}\,{}^tAA = (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$

Alors $S = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tAB \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$ comme combinaison linéaire

d'éléments de $(\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.

${}^tAAS = {}^tAB$ et $S \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$. Alors S est la pseudo-solution de norme minimale

de l'équation $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Donc $S = A^+B$.

Ainsi $\forall B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, $A^+B = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tAB$.

Donc $\underline{\underline{A^+ = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA}}$ $\boxed{R3}$

Q14 Nous avons vu que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$... et

que $\mathrm{Sp}\,A = \{0, 6\}$!

Alors $\underline{\underline{A^+}} = \frac{1}{6} P_2\,{}^tA = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}}$.

donc $A^+B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous retrouvons donc que pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ la pseudo-solution de norme minimale de l'équation $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q15 **1er cas.** $A = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$. Ici $m = 1$.

Nous avons vu alors dans Q11 b) que pour tout $B \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc $\forall B \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, $A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

2e cas. $A \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$

a) $n = 1$. Dans I Q4 b) nous avons vu que $Sp\, {}^tAA = \{a_1^2\} = \{A{}^tA\}$,
$p = 1$, $\lambda_1 = {}^tAA = a_1^2$, $P_1 = I_1$.
Comme $A = (a_1) \neq 0_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})}$: $\lambda_1 \neq 0$.

Alors $A^+ = \frac{1}{\lambda_1} P_1 {}^tA = \frac{1}{\lambda_1} {}^tA = \frac{1}{a_1^2} {}^tA = \frac{1}{A{}^tA} {}^tA$. $A^+ = \frac{1}{A{}^tA} {}^tA$.

b) $n \geq 2$ Dans I Q4 b nous avons vu que $Sp\, {}^tAA = \{0, A{}^tA\}$, $p = 2$,
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = A{}^tA$, $P_1 = I_n - \frac{1}{A{}^tA} {}^tAA$ $P_2 = \frac{1}{A{}^tA} {}^tAA$.

Alors $A^+ = \frac{1}{\lambda_2} P_2 {}^tA = \frac{1}{A{}^tA}\left(\frac{1}{A{}^tA} {}^tAA\right){}^tA = \frac{1}{(A{}^tA)^2} {}^tAA{}^tA \underset{A{}^tA \in \mathbb{R}}{=} \frac{A{}^tA}{(A{}^tA)^2} {}^tA = \frac{1}{A{}^tA} {}^tA$.

Donc $A^+ = \frac{1}{A{}^tA} {}^tA$.

Donc si $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $A^+ = \begin{cases} \frac{1}{A{}^tA} {}^tA & \text{si } A \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } A = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \end{cases}$.

PARTIE IV Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

(Q16) • $AA^+A = A\left(\sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA\right)A = A\left(\sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA A\right)$.

P_i est la matrice d'une projection

Si $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P_i\,{}^tAA = P_i \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell P_\ell = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell P_i P_\ell = \lambda_i P_i^2 = \lambda_i P_i$. $\underline{\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_i\,{}^tAA = \lambda_i P_i}$.

$P_i P_\ell = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ si $\ell \neq i$

Alors $AA^+A = A \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i P_i = \sum_{i\in P(A)} AP_i$.

1er cas.. 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. Alors $P(A) = [\![1,p]\!]$.

$$AA^+A = \sum_{i=1}^{p} AP_i = A\sum_{i=1}^{p} P_i = AI_n = A$$

2e cas.. 0 est valeur propre de A. $\lambda_1 = 0$ et $P(A) = [\![2,p]\!]$.

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $P_1X \in \operatorname{Im} P_1 = E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

Donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $AP_1X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $AP_1 = 0_{M_{m,n}(\mathbb{R})}$ $\boxed{R}$

Donc $AA^+A = \sum_{i\in P(A)} AP_i = \sum_{i=2}^{p} AP_i = \sum_{i=1}^{p} AP_i = A\sum_{i=1}^{p} P_i = AI_n = A$.

Dans les deux cas $\underline{AA^+A = A}$.

• $A^+A = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tAA = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i P_i = \sum_{i\in P(A)} P_i$. $\underline{A^+A = \sum_{i\in P(A)} P_i}$.

$$A^+AA^+ = \sum_{i\in P(A)} P_i A^+.$$

$\forall i \in P(A)$, $P_iA^+ = P_i \sum_{\ell\in P(A)} \frac{1}{\lambda_\ell} P_\ell\,{}^tA = \sum_{\ell\in P(A)} \frac{1}{\lambda_\ell} P_iP_\ell\,{}^tA = \frac{1}{\lambda_i} P_i^2\,{}^tA = \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA$.

Donc $\underline{\forall i \in P(A),\ P_iA^+ = \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA}$.

Alors $A^+AA^+ = \sum_{i\in P(A)} P_iA^+ = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA = A^+$. $\underline{A^+AA^+ = A^+}$.

- Nous avons vu que $A^+A = \sum_{i\in P(A)} P_i$.

Alors ${}^t(A^+A) = {}^t(\sum_{i\in P(A)} P_i) = \sum_{i\in P(A)} {}^tP_i = \sum_{i\in P(A)} P_i = A^+A$.

d'après le préliminaire, P_i est la matrice d'une projection orthogonale donc P_i est symétrique.

Ainsi $\underline{\underline{{}^t(A^+A) = A^+A}}$.

- ${}^t(AA^+) = {}^t(A\sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA) = {}^t(\sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} AP_i {}^tA) = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} {}^t(AP_i {}^tA)$.

Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, ${}^t(AP_i {}^tA) = {}^t({}^tA)\, {}^tP_i\, {}^tA = A P_i {}^tA$.

${}^tP_i = P_i$

donc ${}^t(AA^+) = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} {}^t(AP_i {}^tA) = \sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} AP_i {}^tA = A(\sum_{i\in P(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA) = AA^+$.

$\underline{\underline{{}^t(AA^+) = AA^+}}$.

<u>Exercice</u>.. Montrer que A^+A est la matrice de la projection orthogonale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Im}\,{}^tAA$ ou sur $\mathrm{Im}\,{}^tA$ ou sur $(\mathrm{Ke}\,{}^tAA)^\perp$.

Montrer que AA^+ est la matrice de la projection orthogonale de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Im}\,A$.

Q17 a) $M\,{}^tM\,{}^tA = M\,{}^t(AM) = MAM = M$.

${}^tA\,{}^tM\,M = {}^t(MA)M = MAM = M$.

$A\,{}^tA\,{}^tM = A\,{}^t(MA) = AMA = A$.

${}^tM\,{}^tM A = {}^t(AM)A = AMA = A$.

Alors $\underline{\underline{M = M\,{}^tM\,{}^tA = {}^tA\,{}^tM\,M \text{ et } A = A\,{}^tA\,{}^tM = {}^tM\,{}^tAA}}$.

$A = A\,{}^tA\,{}^tM$ donc ${}^tA = {}^t(A\,{}^tA\,{}^tM) = {}^t({}^tM)\,{}^t({}^tA)\,{}^tA = MA\,{}^tA$.

$A = {}^tM\,{}^tAA$ donc ${}^tA = {}^t({}^tM\,{}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA)\,{}^t({}^tM) = {}^tAAM$.

$\underline{\underline{{}^tA = {}^tAAM = MA\,{}^tA}}$.

b) Montrons que $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $\Pi B = A^+ B$.

Il suffit de montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAA\,\Pi B = {}^tA B$ et $\Pi B \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.

Soit $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

- ${}^tAA\Pi B = {}^tAB$ car ${}^tAA\Pi = {}^tA$ d'après a).
- Soit $X \in \mathrm{Ker}\,{}^tAA$.

$\langle \Pi B, X\rangle = \langle X, \Pi B\rangle = {}^tX\Pi B = {}^tX({}^tA\,{}^t\Pi\Pi B)$.

Or ${}^tA\,{}^t\Pi\Pi B \in \mathrm{Im}\,{}^tA = \mathrm{Im}\,{}^tAA$. Donc $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tA\,{}^t\Pi\Pi B = {}^tAAY$.

Donc $\langle \Pi B, X\rangle = {}^tX({}^tAAY) = {}^tX\,{}^tAAY = {}^t({}^tAAX)Y = \langle {}^tAAX, Y\rangle \underset{X\in \mathrm{Ker}\,{}^tAA}{=} \langle 0, Y\rangle = 0$.

Donc $\forall X \in \mathrm{Ker}\,{}^tAA$, $\langle \Pi B, X\rangle = 0$. $\Pi B \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$

Ainsi $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $\Pi B = A^+B$.

Alors d'après $\boxed{R3}$: $\Pi = A^+$.

Nous avons montré que A^+ vérifie les relations $(*)$ et que $A^+ \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Nous avons aussi montré que si $\Pi \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et si Π vérifie les relations $(*)$ alors $\Pi = A^+$.

Ainsi A^+ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifie les relations $(*)$.

Q18 a) $(A^+)^+$ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$A^+ = A^+(A^+)^+A^+$, $(A^+)^+ = (A^+)^+A^+(A^+)^+$, ${}^t((A^+)^+A^+) = (A^+)^+A^+$ et ${}^t(A^+(A^+)^+) = A^+(A^+)^+$.

Or $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $A^+ = A^+AA^+$, $A = AA^+A$, ${}^t(AA^+) = AA^+$ et ${}^t(A^+A) = A^+A$

Ainsi $(A^+)^+ = A$.

D) ${}^tA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Ainsi $({}^tA)^+$ est l'unique matrice M de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

${}^tA = {}^tA M {}^tA$, $M = M {}^tA M$, ${}^t(M {}^tA) = M {}^tA$ et ${}^t({}^tA M) = {}^tA M$.

- ${}^tA^+ \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ car $A^+ \in M_{n,m}(\mathbb{R})$
- ${}^tA\, {}^tA^+\, {}^tA = {}^t(A A^+ A) = {}^tA$.
- ${}^tA^+\, {}^tA\, {}^tA^+ = {}^t(A^+ A A^+) = {}^tA^+$.
- ${}^t({}^tA^+\, {}^tA) = A A^+ = {}^t(A A^+) = {}^tA^+\, {}^tA$.
- ${}^t({}^tA\, {}^tA^+) = A^+ A = {}^t(A^+ A) = {}^tA\, {}^tA^+$.

Donc ${}^tA^+$ vérifie les propriétés caractéristiques de $({}^tA)^+$.

Ainsi $\underline{\underline{({}^tA)^+ = {}^tA^+}}$.

(Q19) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. ${}^tAA + x I_n = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + x \sum_{i=1}^p P_i = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + x) P_i$.

Posons $Q = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + x} P_i$

$$({}^tAA + x I_n) Q = \left(\sum_{i=1}^p (\lambda_i + x) P_i\right)\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k + x} P_k\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_i + x}{\lambda_k + x} P_i P_k .$$

Or $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2$, $P_i P_k = \begin{cases} P_i & \text{si } k = i \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $({}^tAA + x I_n) Q = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i + x}{\lambda_i + x} P_i = \sum_{i=1}^p P_i = I_n$.

Ceci suffit pour dire que ${}^tAA + x I_n$ est inversible et d'inverse Q.

Donc $\underline{\underline{{}^tAA + x I_n \text{ est inversible et } ({}^tAA + x I_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + x} P_i}}$.

Remarque.. L'inversibilité de ${}^tAA + x I_n = {}^tAA - (-x) I_n$ était claire dès le départ car $-x \notin Sp\, {}^tAA$ puisque $-x \in \mathbb{R}_-^*$ et $Sp\, {}^tAA \subset \mathbb{R}^+$.

Alors $({}^tAA + x I_n)^{-1}\,{}^tA = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA$.

1er cas.. 0 n'est pas valeur propre de A. Alors $\Gamma(A) = [\![1, p]\!]$.

$$\text{Ainsi } ({}^tAA + x I_n)^{-1}\,{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA.$$

2e cas.. 0 est valeur propre de A. $\lambda_1 = 0$ et $\Gamma(A) = [\![2, p]\!]$.

Nous avons prouvé d'ailleurs dans Q 13 b] (fin de la page 14) que

$P_1\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}$

$$\text{Alors } ({}^tAA + x I_n)^{-1}\,{}^tA = \sum_{i=2}^{p} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA.$$

Dans tous les cas $\underline{({}^tAA + x I_n)^{-1}\,{}^tA = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA}$.

$\forall i \in \Gamma(A)$, $\lambda_i \neq 0$ donc $\forall i \in \Gamma(A)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\lambda_i + x} = \frac{1}{\lambda_i}$.

Alors $\forall i \in \Gamma(A)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA\right) = \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i\,{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA = A^+$

donc $\underline{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} ({}^tAA + x I_n)^{-1}\,{}^tA = A^+}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. ${}^tAA + x I_3 = \begin{pmatrix} 3+x & -3 & 0 \\ -3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & 6+x \end{pmatrix}$

Soient $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $(A + x I_3) X = Y$

Alors $\begin{cases} (3+x)\alpha - 3\beta = \alpha' \\ -3\alpha + (3+x)\beta = \beta' \\ (6+x)\gamma = \gamma' \end{cases}$

En ajoutant la ligne 1 et la ligne 2 il vient
$x(\alpha+\beta) = \alpha' + \beta'$ donc $3\alpha + 3\beta = \frac{3}{x}(\alpha' + \beta')$.
La dernière ligne donne $\gamma = \frac{1}{6+x}\gamma'$.

$\begin{cases}(3+x)\alpha-3\beta=\alpha' \\ 3\alpha+3\beta=\frac{3}{x}(\alpha'+\beta')\end{cases}$ donc en ajoutant on a $(6+x)\alpha=\alpha'+\frac{3}{x}(\alpha'+\beta')$.

$\begin{cases}-3\alpha+(3+x)\beta=\beta' \\ 3\alpha+3\beta=\frac{3}{x}(\alpha'+\beta')\end{cases}$ de même $(6+x)\beta=\frac{3}{x}(\alpha'+\beta')+\beta'$.

$$\alpha=\frac{1}{x(6+x)}\left(x\alpha'+3\alpha'+3\beta'\right)=\frac{1}{x(6+x)}\left((3+x)\alpha'+3\beta'\right).$$

$$\beta=\frac{1}{x(6+x)}\left(3\alpha'+3\beta'+x\beta'\right)=\frac{1}{x(6+x)}\left(3\alpha'+(3+x)\beta'\right).$$

$$\gamma=\frac{1}{6+x}\gamma'=\frac{1}{x(6+x)}x\gamma'.$$

Ceci suffit pour dire que $({}^tAA+xI_3)^{-1}=\frac{1}{x(6+x)}\begin{pmatrix}3+x & 3 & 0\\ 3 & 3+x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$.

$$({}^tAA+xI_3)^{-1}\,{}^tA=\frac{1}{x(6+x)}\begin{pmatrix}3+x & 3 & 0\\ 3 & 3+x & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{x(6+x)}\begin{pmatrix}x & x & -x\\ -x & -x & x\\ x & x & 2x\end{pmatrix}=\frac{1}{6+x}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

donc $A^+=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[({}^tAA+xI_3)^{-1}\,{}^tA\right]=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{6+x}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Nous retrouvons $A^+=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Q20 Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons $A'=\alpha A$, ${}^tA'A'=\alpha^2\,{}^tAA$

$$A'^+=\lim_{x\to 0^+}\left[({}^tA'A'+xI_n)^{-1}\,{}^tA'\right]=\lim_{x\mapsto 0^+}\left[(\alpha^2\,{}^tAA+xI_n)^{-1}\alpha\,{}^tA\right]$$

$$A'^+=\alpha\lim_{x\mapsto 0^+}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left({}^tAA+\frac{x}{\alpha^2}I_n\right)^{-1}{}^tA\right]=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\mapsto 0^+}\left[\left({}^tAA+\frac{x}{\alpha^2}I_n\right)^{-1}{}^tA\right]=\frac{1}{\alpha}A^+$$

Ainsi $\underline{\underline{(\alpha A)^+=\frac{1}{\alpha}A^+ \text{ pour tout } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}^*}}$.

1^a cas $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ alors $\alpha A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ donc $(\alpha A)^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$. (d'après III Q11 b)).

Alors $\lim_{\alpha \mapsto 0} (\alpha A)^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

2ème cas. $A \neq 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$. Supposons $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

Alors $A = (A^+)^+ \underset{\text{III Q11 b)}}{=} 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$! Alors $A^+ \neq 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

A^+ ayant un coefficient non nul : $\frac{1}{\alpha} A^+$ n'a pas de limite lorsque α tend vers 0.

donc $(\alpha A)^+$ n'a pas de limite lorsque α tend vers 0.