ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 **Intersection d'hyperplans**.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$).

Q1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E : $\dim(F \cap G) \geqslant \dim F + \dim G - n$.

Q2. Déterminer la dimension de l'intersection de deux hyperplans distincts de E.

Q3. Soient H_1, H_2, ..., H_r r hyperplans de E. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r) \geqslant n - r$.

Q4. Montrer par récurrence que si p appartient à $[\![1, n]\!]$ et si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ alors F est l'intersection de p hyperplans de E.

Q1 $\dim(F+G)+\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G$. Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, $\dim(F+G) \leqslant n$.

Alors $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G) \leqslant n + \dim(F \cap G)$ donc :

$$\boxed{\dim(F \cap G) \geqslant \dim F + \dim G - n}.$$

Q2 Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E.

D'après ce qui précède $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant \dim H_1 + \dim H_2 - n$. Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

Comme $H_1 \cap H_2$ est un sous-espace vectoriel de H_1 : $n - 1 = \dim H_1 \geqslant \dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.

Alors $\dim(H_1 \cap H_2)$ vaut $n - 1$ ou $n - 2$.

Supposons que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$. $H_1 \cap H_2$ est alors un sous espace vectoriel de H_1 et H_2, qui a même dimension que H_1 et H_2. Alors $H_1 \cap H_2 = H_1 = H_2$. Ceci contredit l'hypothèse. Par conséquent $H_1 \cap H_2$ est de dimension $n-2$.

$$\boxed{\text{L'intersection de deux hyperplans distincts de } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension } n-2}.$$

Q3 Montrons par récurrence que : $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n - k$.

La propriété est vraie pour $k = 1$ ($\dim H_1 = n - 1$). Supposons la vraie pour un élément k de $[\![1, r-1]\!]$ et montrons la pour $k + 1$.

D'après Q1, $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{k+1}) \geqslant \dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_k) + \dim H_{k+1} - n$.

$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{k+1}) \geqslant \dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_k) + n - 1 - n = \dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_k) - 1$.

En appliquant l'hypotèse de récurrence on obtient : $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{k+1}) \geqslant n - k - 1 = n - (k+1)$ et ainsi s'achève la récurrence.

Q4 La propriété est vraie pour $p = 1$ car si F est de dimension $n - 1$, F est un hyperplan et il est donc intersection d'un hyperplan !

Supposons la propriété vraie pour p élément de $[\![1, n-1]\!]$ et montrons la pour $p + 1$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - (p+1)$. F est distinct de E donc il existe un élément a de E n'appartenant pas à F.

Posons $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $G = F + D$. a n'appartient pas à F donc F et D sont en somme directe. G est donc de dimension $n - p$.

L'hypothèse de récurrence montre alors que G est l'intersection de p hyperplans H_1, H_2, ..., H_p.

Soit G' un supplémentaire de G dans E. $\dim G' = n - (n-p) = p$. Posons $H_{p+1} = F + G'$.

Cette somme est directe car $G = F + D$ et G' sont supplémentaires.

Ainsi H_{p+1} est de dimension $\dim F + \dim G' = n - (p+1) + p = n - 1$. H_{p+1} est donc un hyperplan.

Montrons pour finir que $F = G \cap H_{p+1}$ ainsi aurons nous $F = H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_p \cap H_{p+1}$ et F sera l'intersection de $p+1$ hyperplans.

F est contenu dans G et dans H_{p+1} par construction de ces deux sous-espaces. Ainsi $F \subset G \cap H_{p+1}$

Réciproquement soit x un élément de $G \cap H_{p+1}$. x appartient à $H_{p+1} = F + G'$ donc $x = x_1 + x_2$ avec x_1 élément de F (donc de G) et x_2 élément de G'. $x_2 = x - x_1$.

x et x_1 sont deux éléments de G donc $x - x_1$ appartient à G. Alors $x_2 = x - x_1$ appartient à G et G' qui ont une intersection nulle.

Ainsi $x_2 = x - x_1 = 0_E$. $x = x_1$ et x appartient alors à F. Ceci achève de montrer que $G \cap H_{p+1} \subset F$.

Par conséquent $F = G \cap H_{p+1} = H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_p \cap H_{p+1}$ et la récurrence s'achève.

Si p élément de $[\![1, n]\!]$ et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$ alors F est l'intersection de p hyperplans de E.

Ou si p élément de $[\![0, n-1]\!]$ et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p alors F est l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.

Exercice 2 f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E' \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

• Montrons que : $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$.

$f(E) \subset E'$ donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(E') = \operatorname{Im} g$ et ainsi $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim g(f(E)) \leqslant \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rg} g$.

On a $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$.

Soit h la restriction de g à $\operatorname{Im} f$. h est une application linéaire de $\operatorname{Im} f$ dans E''.

Le théorème du rang appliqué à h donne $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} h + \dim \operatorname{Ker} h$. Ainsi $\operatorname{rg} h \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.

Or $\operatorname{Im} h = h(\operatorname{Im} f) = h(f(E)) = g(f(E)) = \operatorname{Im}(g \circ f)$. Par conséquent $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} h \leqslant \operatorname{rg} f$. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$.

$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$ donc $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

• Reprenons : $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} h + \dim \operatorname{Ker} h$.

Remarquons que $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} g$; alors : $\dim \operatorname{Ker} h \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$.

Par conséquent : $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} h + \dim \operatorname{Ker} g = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim \operatorname{Ker} g = \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim E' - \operatorname{rg} g$.

Ceci donne : $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim E' \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Exercice 3 f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''.

$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,E'')} \text{ équivaut à } \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g}.$$

$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,E'')} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_{E''} \Leftrightarrow \forall y \in \operatorname{Im} f,\ g(y) = 0_{E''} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$

Exercice 4 Si f est une application linéaire de E dans E', tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. $E = F \oplus \operatorname{Ker} f$.

Soit h l'application de F dans $\operatorname{Im} f$ qui a tout élément x de F associe $f(x)$.

Comme f est une application linéaire, h est une application linéaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\operatorname{Im} f$. Montrons que h est bijective.

• Soit x un élément de $\operatorname{Ker} h$. x appartient à F et $f(x) = h(x) = 0_E$ donc x appartient à $F \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$; donc x est nul.

Alors $\operatorname{Ker} h = \{0_E\}$ et h est injective.

• Montrons que h est surjective. Soit y un élément de $\operatorname{Im} f$. Il exite un élément x de E tel que $f(x) = y$.

Comme F et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires : $\exists!(x_1, x_2) \in F \times \operatorname{Ker} f,\ x = x_1 + x_2$.

Alors $y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1)$. Comme x_1 appartient à F, $h(x_1) = f(x_1) = y$.

$\forall y \in \operatorname{Im} f,\ \exists x_1 \in F,\ h(x_1) = y$. h est surjective.

Finalement h est un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im} f$. F et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes.

<u>Exercice</u> Retrouver le théorème du rang.

Exercice 5 **Opérations sur les endomorphismes nilpotents**.

Soient f et g deux endomorphismes nilpotents de E <u>qui commutent</u>. Montrer que $f + g$ et $f \circ g$ sont nilpotents.

Il existe deux éléments r et s de $\mathbb{N}^*$ tels que $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g^s = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

• Une première récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k \circ g = g \circ f^k$. Une seconde récurrence tout aussi simple montre que pour k élément de $\mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N},\ f^k \circ g^i = g^i \circ f^k$.

Une troisième récurrence permet alors d'obtenir : $\forall j \in \mathbb{N},\ (f \circ g)^j = f^j \circ g^j$.

Ainsi $(f \circ g)^r = f^r \circ g^r = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ g^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\boxed{f \circ g \text{ est nilpotent}}$.

• Comme f et g commutent la formule du binôme donne : $(f+g)^{r+s-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r+s-1} \mathrm{C}_{r+s-1}^k\, f^k \circ g^{r+s-1-k}$.

Notons que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ dès que k est élément de $[\![r, +\infty[\![$. Ainsi $(f+g)^{r+s-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{C}_{r+s-1}^k\, f^k \circ g^{r+s-1-k}$.

Si k appartient à $[\![0, r-1]\!]$, $r + s - 1 - k$ appartient à $[\![s, r+s-1]\!]$ et $g^{r+s-1-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $(f+g)^{r+s-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{C}_{r+s-1}^k\, f^k \circ g^{r+s-1-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\boxed{f + g \text{ est nilpotent}}$.

Exercice 6 ★ **Commutant d'un endomorpisme nilpotent**.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$.

f est un élément de $\mathcal{S}$. p est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q1. Montrer qu'il existe un élément a de E tel que la famille $\mathcal{B} = \big(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)\big)$ soit libre.

En déduire que : $p \leqslant n$.

Q2. On suppose que $p = n$. On se propse d'étudier l'ensemble $\mathcal{G}$ des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \big(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

b) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient : $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$.

c) Réciproquement soit g un élément de $\mathcal{G}$. $g(a)$ est un élément de E donc s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. $\exists(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ g(a)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\, f^k(a)$.

Montrer alors que $g=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\, f^k$. Conclure.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Comme E n'est pas réduit au vecteur nul, Id_E n'est pas l'endomorphisme nul et ainsi p n'est pas nul.

Par conséquent $p-1$ appartient à $\mathbb{N}$ et f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul par définition de p.

Alors il existe un élément a de E tel que $f^{p-1}(a)\neq 0_E$. Montrons alors que la famille $\mathcal{B}=\big(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{p-1}(a)\big)$ est libre.

Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1})$ un élément de $\mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\, f^k(a)=\lambda_0\, a+\lambda_1\, f(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{p-1}(a)=0_E \quad (*)$.

Montrons par récurrence que $\forall i\in[\![0,p-1]\!],\ \lambda_0=\lambda_1=\cdots\lambda_i=0$.

• $(*)$ donne $f^{p-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\, f^k(a)\right)=f^{p-1}\big(\lambda_1\, a+\lambda_2\, f(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{p-1}(a)\big)=f^{p-1}(0_E)=0_E$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\, f^{p-1+k}(a)=\lambda_0\, f^{p-1}(a)+\lambda_1\, f^p(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{2p-2}(a)=0_E$.

Or $f^{p-1+k}(a)=0_E$ dès que $p-1+k\geqslant p$, c'est à dire dès que $k\geqslant 1$.

Alors $\lambda_0\, f^{p-1}(a)=0_E$. Comme $f^{p-1}(a)\neq 0_E : \lambda_0=0$. La propriété est vraie pour $i=0$.

• Supposons la propriété vraie pour i élément de $[\![0,p-2]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Nous avons donc $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_i=0$ et il s'agit de montrer que $\lambda_{i+1}=0$.

L'hypothèse de récurrence et $(*)$ donnent $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{p-1}\lambda_k\, f^k(a)=\lambda_{i+1}\, f^{i+1}(a)+\lambda_{i+2}\, f^{i+2}(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{p-1}(a)=0_E$. Notons que $p-2-i$ appartient à $\mathbb{N}$.

Alors $f^{p-2-i}\left(\displaystyle\sum_{k=i+1}^{p-1}\lambda_k\, f^k(a)\right)=f^{p-2-i}\big(\lambda_{i+1}\, f^{i+1}(a)+\lambda_{i+2}\, f^{i+2}(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{p-1}(a)\big)=f^{p-2-i}(0_E)=0_E$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{p-1}\lambda_k\, f^{p-2-i+k}(a)=\lambda_{i+1}\, f^{p-1}(a)+\lambda_{i+2}\, f^p(a)+\cdots+\lambda_{p-1}\, f^{2p-3-i}(a)=0_E$.

Alors $\lambda_{i+1}\, f^{p-1}(a)=0_E$ et comme $f^{p-1}(a)$ n'est pas nul : $\lambda_{i+1=0}$ ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\mathcal{B}=\big(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{p-1}(a)\big)\text{ est une famille libre de }E}.$$

$\mathcal{B}=\big(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{p-1}(a)\big)$ est une famille libre de E de cardinal p et E est de dimension n donc $\boxed{p\leqslant n}$.

Remarque Si b est dans E, la famille $\big(b,f(b),f^2(b),\dots,f^{p-1}(b)\big)$ est libre si et seulement si $f^{p-1}(b)\neq 0_E$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) D'après ce qui précède $\mathcal{B}=\big(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{n-1}(a)\big)$ est une famille libre de E. Comme le cardinal de cette famille est n qui est la dimension de E :

$$\boxed{\mathcal{B}=\big(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{n-1}(a)\big)\text{ est une base de }E}.$$

$\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f\left(f^i(a)\right) = f^{i+1}(a)$ et $f\left(f^{n-1}(a)\right) = f^n(a) = 0_E$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\forall k \in \mathbb{N},\ f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f$. Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k \in \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{G}$ est non vide.

Soient g et g' deux éléments de $\mathcal{G}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

$g \circ f = f \circ g$ et $g' \circ f = f \circ g'$ donc $(\lambda\, g + g') \circ f = \lambda\, g \circ f + g' \circ f = \lambda\, f \circ g + f \circ g' = f \circ (\lambda\, g + g')$; $\lambda\, g + g' \in \mathcal{G}$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Comme Id_E, f, ..., f^{n-1} sont des éléments de $\mathcal{G}$:

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ est un sous-espace vectoriel qui contient } \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})}.$$

c) Soit g un élément de $\mathcal{G}$.

Considérons les coordonnées $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ du vecteur $g(a)$ dans la base $\mathcal{B} = \left(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$.

Montrons que $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k$. g et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k$ sont deux endomorphismes de E ; pour montrer qu'ils sont égaux, montrons qu'ils coïncident sur les éléments de la base $\mathcal{B} = \left(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$.

Il s'agit donc de montrer que $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(f^i(a)) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k\right)(f^i(a))$.

Notons que g commute avec f donc avec toute puissance de f.

Alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(f^i(a)) = (g \circ f^i)(a) = (f^i \circ g)(a) = f^i(g(a)) = f^i\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k(a)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^i(f^k(a))$.

$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(f^i(a)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^{i+k}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k(f^i(a)) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k\right)(f^i(a))$.

Ceci achève de montrer que : $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, f^k$. Alors g est élément de $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$.

Donc $\mathcal{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ et finalement :

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})}.$$

Exercice 7 **Encore un peu de nilpotence.**

Soit f un endomorphisme de E tel qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $g = \mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et déterminer g^{-1}. Illustrer.

Notons que f et Id_E commutent, $(\mathrm{Id}_E)^r = \mathrm{Id}_E$ et $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc :

$\mathrm{Id}_E = (\mathrm{Id}_E)^r - f^r = (\mathrm{Id}_E - f) \circ (\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}) = (\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}) \circ (\mathrm{Id}_E - f)$.

Alors $\mathrm{Id}_E = g \circ (\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}) = (\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}) \circ g$.

g est donc inversible et $g^{-1} = \mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}$.

$\boxed{\text{Si } f^r = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ alors } \mathrm{Id}_E - f \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = \mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^{r-1}.}$

<u>illustration</u> $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\forall P \in E,\ f(P) = P'$. f est endomorphisme de E tel que $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $g = \mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et $g^{-1} = \mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots f^n$.

$\forall P \in E,\ g(P) = P - P'$ et $g^{-1}(P) = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$.

Exercice 8 ★ **Différence de deux projecteurs.**

p et q sont deux projections de E. $f = p - q$.

Q1. On suppose que f est une projection. Montrer que : $p \circ q + q \circ p = 2q$ et que : $p \circ q = q \circ p = q$.

Q2. Réciproquement on suppose que $p \circ q = q \circ p = q$. Montrer que f est une projection parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$.

Q1 $p - q = f = f^2 = (p-q) \circ (p-q) = p^2 - p \circ q - q \circ p + q^2 = p - p \circ q - q \circ p + q$.

$p - q = p - p \circ q - q \circ p + q$. Alors $p \circ q + q \circ p = q + q = 2q$. $\boxed{p \circ q + q \circ p = 2q}$.

En composant cette égalité à gauche (resp. à droite) par q on obtient :

$q \circ p \circ q + q \circ q \circ p = 2\, q \circ q$ (resp. $p \circ q \circ q + q \circ p \circ q = 2\, q \circ q$).

Alors $q \circ p \circ q + q \circ p = 2\, q$ et $p \circ q + q \circ p \circ q = 2\, q$. En soustrayant il vient : $q \circ p - p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$. C'est à dire $q \circ p = p \circ q$.

En reprenant l'égalité $p \circ q + q \circ p = 2\, q$ on obtient $2\, p \circ q = 2\, q$ ou $p \circ q = q$.

Finalement $\boxed{p \circ q = q \circ p = q}$.

Q2 Ici $p \circ q = q \circ p = q$. $f = p - q$ est un endomorphisme de E comme différence de deux endomorphismes de E.

De plus $f^2 = (p-q) \circ (p-q) = p^2 - p \circ q - q \circ p + q^2 = p - q - q + q = p - q = f$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est une projection}}.$$

Soit x un élément de $\mathrm{Ker}\, f$. $p(x) - q(x) = f(x) = 0_E$. $p(x) = q(x)$.

Alors $p(x) = q(x) = p(q(x))$ car $q = p \circ q$. $p(x) - p(q(x)) = 0_E$. $p(x - q(x)) = 0_E$ donc $x - q(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, p$.

Posons $t = x - q(x)$. $x = t + q(x)$ donc x est un élément de $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

Récipoquement soit x un élément de $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, q$. $x = x_1 + x_2$ avec x_1 dans $\mathrm{Ker}\, p$ et x_2 dans $\mathrm{Im}\, q$.

$f(x) = p(x) - q(x) = p(x_1) + p(x_2) - q(x_1) - q(x_2)$. Or $p(x_1) = 0_E$ et $q(x_2) = x_2$. Alors $f(x) = p(x_2) - q(x_1) - x_2$.

$q(x_2) = x_2$ donne $p(x_2) = p(q(x_2))$. Comme $p \circ q = q : p(x_2) = q(x_2) = x_2$.

$q = q \circ p$ et $p(x_1) = 0_E$ donnent : $q(x_1) = q(p(x_1)) = q(0_E) = 0_E$.

Alors $f(x) = p(x_2) - q(x_1) - x_2 = x_2 - 0_E - x_2 = 0_E$. x est un élément de $\mathrm{Ker}\, f$. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, q}$$

Soit x un élément de $\mathrm{Im}\, f$. Il existe z dans E tel que $x = f(z) = p(z) - q(z)$.

$q(x) = q(p(z)) - q^2(z) = q(z) - q(z) = 0_E$. Alors x appartient à $\mathrm{Ker}\, q$.

De plus $x = p(z) - q(z) = p(z) - p(q(z)) = p(z - q(z))$ donc x apartient à $\mathrm{Im}\, p$. Par conséquent x appartient $\mathrm{Ker}\, q \cap \mathrm{Im}\, p$.

Réciproquement soit x un élément de $\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p$. $q(x)=0_E$ et $p(x)=x$. Donc $f(x)=p(x)-q(x)=x$.

x appartient à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\operatorname{Im} f$. Finalement :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p}$$

Exercice 9 ★ **Endomorphisme dont le carré est $-Id$.**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n non nulle.

Q1. f est un endomorphisme de E tel que $f^2=-Id_E$.

a) Montrer que si $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est une famille d'éléments de E telle que $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ soit libre et non génératrice alors il existe un élément e_{p+1} de E tel que $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_{p+1},f(e_{p+1}))$ soit libre.

b) En déduire que n est pair. Représenter f par une matrice simple.

Q2. On suppose que n est pair. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2=-Id_E$.

Q1 a) Soit $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une famille d'éléments de E telle que $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ soit libre et non génératrice. $\mathrm{Vect}(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ n'est pas E donc il existe un élément e_{p+1} appartenant à E et n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$.

$(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ est libre et e_{p+1} n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ donc la famille $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1})$ est encore libre.

Dès lors montrons que $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1},f(e_{p+1}))$ est libre.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{p+1})$ et $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{p+1})$ deux éléments de $\mathbb{R}^{p+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}\alpha_k\,e_k+\sum_{k=1}^{p+1}\beta_k\,f(e_k)=0_E \quad (1)$.

Alors $\displaystyle f\left(\sum_{k=1}^{p+1}\alpha_k\,e_k+\sum_{k=1}^{p+1}\beta_k\,f(e_k)\right)=f(0_E)=0_E$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}\alpha_k\,f(e_k)+\sum_{k=1}^{p+1}\beta_k\,f^2(e_k)=0_E$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}\alpha_k\,f(e_k)-\sum_{k=1}^{p+1}\beta_k\,e_k=0_E \quad (2)$. Multiplions (1) par α_{p+1} et (2) par $-\beta_{p+1}$ et ajoutons.

Il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}(\alpha_{p+1}\,\alpha_k+\beta_{p+1}\,\beta_k)\,e_k+\sum_{k=1}^{p+1}(\alpha_{p+1}\,\beta_k-\beta_{p+1}\,\alpha_k)\,f(e_k)=0_E$.

Si $k=p+1$: $\alpha_{p+1}\,\beta_k-\beta_{p+1}\,\alpha_k=0$ donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}(\alpha_{p+1}\,\alpha_k+\beta_{p+1}\,\beta_k)\,e_k+\sum_{k=1}^{p}(\alpha_{p+1}\,\beta_k-\beta_{p+1}\,\alpha_k)\,f(e_k)=0_E$.

La liberté de $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1})$ donne $\forall k\in[\![1,p+1]\!],\ \alpha_{p+1}\,\alpha_k+\beta_{p+1}\,\beta_k=0$ et

$\forall k\in[\![1,p]\!],\ \alpha_{p+1}\,\beta_k-\beta_{p+1}\,\alpha_k=0$.

En particulier $\alpha_{p+1}\,\alpha_{p+1}+\beta_{p+1}\,\beta_{p+1}=0$ ou $\alpha_{p+1}^2+\beta_{p+1}^2=0$. Comme α_{p+1} et β_{p+1} sont des réels : $\alpha_{p+1}=\beta_{p+1}=0$.

Alors (1) donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,e_k+\sum_{k=1}^{p}\beta_k\,f(e_k)=0_E$. La liberté de $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p))$ fournit :

$\alpha_1=\cdots=\alpha_p=\beta_1=\cdots=\beta_p=0$. Ainsi $\alpha_1=\cdots=\alpha_p=\alpha_{p+1}=\beta_1=\cdots=\beta_p=\beta_{p+1}=0$.

Ceci achève de montrer que $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1},f(e_{p+1}))$ est libre.

b) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments q de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe une famille $(e_1,e_2,\dots,e_q)$ d'éléments de E qui donne une famille $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_q,f(e_q))$ libre.

Montrons que $\mathcal{S}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$.

• Soit e_1 un élément non nul de E. Montrons que $(e_1, f(e_1))$ est libre.

Soit α et β deux réels tels que $\alpha\, e_1 + \beta\, f(e_1) = 0_E$ (3). Ainsi $0_E = f(0_E) = f(\alpha\, e_1 + \beta\, f(e_1)) = \alpha\, f(e_1) - \beta\, e_1$ (4).

En multipliant (3) par α, (4) par $-\beta$ et en ajoutant on obtient : $(\alpha^2 + \beta^2)\, e_1 = 0_E$.

Commme e_1 n'est pas nul : $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. α et β étant réel : $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de prouver que $(e_1, f(e_1))$ est libre. Ainsi 1 est un élément de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

• Soit q un élément de $\mathcal{S}$. Il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ d'éléments de E telle $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_q, f(e_q))$ soit une famille libre de E.

Comme cette famille est de cardinal $2q$ et que E est de dimension $n : 2q \leqslant n$. Donc $q \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

Ainsi $\mathcal{S}$ est majorée.

$\mathcal{S}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$ donc $\mathcal{S}$ possède un plus grand élément p.

Alors il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ d'éléments de E telle $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_p, f(e_p))$ soit une famille libre de E.

Si $\mathcal{B}'$ n'est pas une famille génératice de E, d'après a) on peut trouver un élément e_{p+1} de E tel que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_{p+1}, f(e_{p+1}))$ soit libre ; alors $p+1$ appartient à $\mathcal{S}$ et est strictement plus grand que le plus grand élément de $\mathcal{S}$! !

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de E. Cette famille qui est libre est alors une base de E ayant $2p$ éléments.

Par conséquent $n = 2p$ et la dimension de E est paire.

$$\boxed{\text{S'il existe un endomorphisme } f \text{ de } E \text{ tel que } f^2 = -\mathrm{Id}_E\text{, la dimension de } E \text{ est paire}}$$

Cherchons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_p, f(e_p))$.

Notons que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = f(e_k)$! ! et $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(f(e_k)) = -e_k$.

Alors $M_{\mathcal{B}'}(f)$ est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & O_2 & \cdots & O_2 \\ O_2 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 \\ O_2 & \cdots & O_2 & A_p \end{pmatrix}$ où $A_1 = A_2 = \cdots = A_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2 On suppose que la dimension n de E est paire. Il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$.

Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_{2p})$ une base de E et f l'endomorphisme de E définit par $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(u_k) = -u_{k+p}$ et $\forall k \in [\![p+1, 2p]\!],\ f(u_k) = u_{k-p}$.

$\forall k \in [\![1, p]\!],\ f^2(u_k) = -f(u_{k+p}) = -u_{k+p-p} = -u_k$ et $\forall k \in [\![p+1, 2p]\!],\ f^2(u_k) = f(u_{k-p}) = -u_{k-p+p} = -u_k$.

Les deux endomorphismes f^2 et $-\mathrm{Id}_E$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc sont égaux. $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

$$\boxed{\text{Si la dimension de } E \text{ est paire, il existe un endomorphisme } f \text{ de } E \text{ tel que } f^2 = -\mathrm{Id}_E}.$$

Exercice 10 ★★ **Noyaux et images itérés.**

E est de dimension finie et non nulle n et f un endomorphisme de E. Pour tout k dans $\mathbb{N}$ on pose :

$$N_k = \mathrm{Ker}\, f^k \quad \text{et} \quad I_k = \mathrm{Im}\, f^k.$$

Q1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\geqslant 0}$ est croissante au sens de l'inclusion et que la suite $(I_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante (toujours au sens de l'inclusion).

Q2. Montrer que $S=\{k\in\mathbb{N} \mid N_{k+1}=N_k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note p son plus petit élément.

Montrer que la suite $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante et la suite $(N_k)_{k\geqslant p}$ constante. Qu'en est-il pour la suite des images ?

Montrer que $p\leqslant n$.

Q3. Montrer que $E=N_p\oplus I_p$.

Q1 Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Soit x un élément de $N_k=\operatorname{Ker} f^k$. $f^k(x)=0_E$ donc $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(0_E)=0_E$ et x appartient à $\operatorname{Ker} f^{k+1}=N_{k+1}$. Alors $N_k\subset N_{k+1}$.

$f(E)\subset E$ donc $f^k(f(E))\subset f^k(E)$. Ainsi $I_{k+1}=f^{k+1}(E)=f^k(f(E))\subset f^k(E)=I_k$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ N_k\subset N_{k+1} \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ I_{k+1}\subset I_k}.$$

Q2 Supposons que $S=\{k\in\mathbb{N} \mid N_{k+1}=N_k\}$ soit vide. Alors pour tout élément k de $\mathbb{N}$, N_k est strictement contenu dans N_{k+1}. En particulier $\forall k\in\mathbb{N},\ \dim N_k<\dim N_{k+1}$.

Rappelons que E est de dimension n et qu'ainsi la dimension d'un sous-espace vectoriel de E est inférieure ou égale à n.

Alors $(\dim N_0,\dim N_1,\dots,\dim N_{n+1})$ est une suite strictement croissante de $n+2$ entiers de l'intervalle $[\![0,n]\!]$ qui contient $n+1$ éléments d'où une légère contradiction !

Finalement $\boxed{\mathcal{S} \text{ est non vide de } \mathbb{N}}$. Nous noterons p son plus petit élément.

p étant le plus petit élément de $\mathcal{S}$, pour tout k dans $[\![0,p-1]\!]$, N_{k+1} et N_k sont distincts donc N_k est strictement contenu dans N_{k+1}.

$$\boxed{\text{La suite } (N_k)_{0\leqslant k\leqslant p} \text{ est strictement croissante}}.$$

Pour tout k dans $[\![0,p-1]\!]$, $\dim N_k<\dim N_{k+1}$.

Donc pour tout k dans $[\![0,p-1]\!]$, $\dim I_k=n-\dim N_k>n-\dim N_{k+1}=\dim I_{k+1}$.

Ainsi pour tout k dans $[\![0,p-1]\!]$, I_{k+1} est strictement contenu dans I_k.

$$\boxed{\text{La suite } (I_k)_{0\leqslant k\leqslant p} \text{ est strictement décroissante}}.$$

Montrons par récurrence que $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ N_{k+1}=N_k$.

L'égalité est vraie pour $k=p$ car p appartient à $\mathcal{S}$.

Supposons l'égalité vraie pour un élément k de $[\![p,+\infty[\![$ et montrons la pour $k+1$.

Il s'agit donc de prouver $N_{k+2}=N_{k+1}$ sachant que $N_{k+1}=N_k$.

Nous savons déjà que $N_{k+1}\subset N_{k+2}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de N_{k+2}. $f^{k+1}(f(x))=f^{k+2}(x)=0_E$ donc $f(x)$ appartient à N_{k+1}. Comme $N_{k+1}=N_k$, $f(x)$ appartient à N_k. Ainsi $f^{k+1}(x)=f^k(f(x))=0_E$ et x appartient à N_{k+1}. $N_{k+2}\subset N_{k+1}$ et la récurrence s'achève.

Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (N_k)_{k\geqslant p} \text{ constante}}$.

$\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ I_{k+1}\subset I_k$et $\dim I_{k+1}=n-\dim N_{k+1}=n-\dim N_k=\dim I_k$.

Donc $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ I_{k+1}=I_k$ et $\boxed{\text{la suite } (I_k)_{k\geqslant p} \text{ constante}}$.

La suite $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante donc $(\dim N_0, \dim N_1, \dots, \dim N_p)$ est une suite strictement croissante de $p+1$ entiers de l'intervalle $[\![0,n]\!]$ qui contient $n+1$ éléments donc $p+1\leqslant n+1$. $\boxed{p\leqslant n}$.

Q3 Soit x un élément commun à N_p et I_p. $f_p(x)=0_E$ et il existe un élément z de E tel que $x=f^p(z)$.

Alors $f^{2p}(z)=f^p(x)=0_E$. Ainsi z appartient à N_{2p}. Comme $N_p=N_{2p}$, z appartient à N_p et $x=f^p(z)=0_E$.

Alors $N_p\cap I_p=\{0_E\}$.

De plus $\dim N_p+\dim I_p=\dim \operatorname{Ker} f^p+\dim \operatorname{Im} f^p=\dim E$ (théorème du rang).

E étant de dimension finie ce qui précède permet de dire que $\boxed{E=N_p\oplus I_p}$.

Exercice 11 ★ **Espaces vectoriels isomorphes. Interpolation de Lagrange**.

f est une application de I dans $\mathbb{R}$. x_0, x_1, ..., x_n sont $\boxed{n+1 \text{ points distincts}}$ de I.

On se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré au plus n, qui coïncide avec f en x_0, x_1, ..., x_n.

Q1. Version 1. On pose $\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)=\big(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n)\big)$.

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Conclure.

Q2. Version 2. Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, U_k est le quotient de $U=\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$ par $X-x_k$ et $L_k=\dfrac{1}{U_k(x_k)}\,U_k$.

a) Montrer que $(L_0,L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

b) Retouver le résultat.

Q1 φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big(\big(\lambda P+Q\big)(x_0),\big(\lambda P+Q\big)(x_1),\dots,\big(\lambda P+Q\big)(x_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big(\lambda P(x_0)+Q(x_0),\lambda P(x_1)+Q(x_1),\dots,\lambda P(x_n)+Q(x_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\Big(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n)\Big)+\Big(Q(x_0),Q(x_1),\dots,Q(x_n)\Big)=\lambda\,\varphi(P)+\varphi(Q)$.

Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(P)=(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n))=0_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Ainsi $\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(x_k)=0$.

P est alors un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n+1$ zéros x_0, x_1, ..., x_n. P est le polynôme nul.

$\operatorname{Ker}\varphi=\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. φ est injective.

φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\dim\mathbb{R}_n[X]=\dim\mathbb{R}^{n+1}=n+1$, par conséquent :

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ sur } \mathbb{R}^{n+1}}.$$

Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. P coïncide avec f en x_0, x_1, ..., x_n si et seulement si $\big(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_n)\big)=\big(f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_n)\big)$; autrement dit si et seulement si P est un antécédent par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$ de l'élément $\big(f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_n)\big)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

φ étant une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $\big(f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_n)\big)$ possède un antécédent et un seul par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme } P\text{, de degré au plus } n\text{, qui coïncide avec } f \text{ en } x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n.}$$

Q2 a) Notons que U est un polynôme de degré $n+1$ admettant pour zéros x_0, x_1, ..., x_n.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. $U_k = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-x_i)$. U_k est un polynôme de degré n dont les zéros sont : x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n.

Alors L_k est également un polynôme de degré n dont les zéros sont : x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n.

Notons encore que $L_k(x_k) = \dfrac{1}{U_k(x_k)}\,U_k(x_k) = 1$. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ i \in [\![0,n]\!],\ U_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$.

$(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Montons qu'elle libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0\, L_0 + \lambda_1\, L_1 + \cdots + \lambda_n\, L_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Alors $\forall i \in [\![0,n]\!],\ 0 = \lambda_0(x_i)\, L_0 + \lambda_1(x_i)\, L_1(x_i) + \cdots + \lambda_n\, L_n(x_i) = \lambda_i L_i(x_i) = \lambda_i$. $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \lambda_i = 0$.

Ceci achève de montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Le cardinal $n+1$ de cette famille coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.

$P = \lambda_0\, L_0 + \lambda_1\, L_1 + \cdots + \lambda_n\, L_n$. Donc $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = \lambda_0(x_i)\, L_0 + \lambda_1(x_i)\, L_1(x_i) + \cdots + \lambda_n\, L_n(x_i) = \lambda_i L_i(x_i) = \lambda_i$.

$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \lambda_i = P(x_i)$.

$(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Les coordonnées d'un éléments P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont $(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$.

• <u>Existence</u> Soit P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ de coordonnées $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.

Ses coordonnées sont également $(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Ainsi $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)$ et P est solution.

• <u>Unicité</u> Soit Q uen seconde solution. $\forall i \in [\![0,n]\!]\ (P-Q)(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$. $P - Q$ est donc un polynôme de degré au plus n qui admet au moins $n+1$ racines. C'est le polynôme nul. $Q = P$ d'où l'unicité.

Exercice 12 **Endomorphisme d'une espace vectoriel de polynômes**.

$E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

A tout P élément de E on associe le reste $f(P)$ dans la division de AP par B.
Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
Q2. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.
Q3. F est l'ensemble des éléments de E divisibles par $X - 1$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E de dimension 3. Montrer que $\operatorname{Im} f = F$.

Q1 • Soit P un élément de E. $f(P)$ est le reste dans la division de AP par B et $\deg B = 4$; ainsi $f(P)$ est un polynôme de degré au plus 3. $f(P)$ appartient à E.

f est une application de E dans E.

• Soient P_1 et P_2 deux éléments de E et λ un élément de $\mathbb{R}$. Il existe deux éléments Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AP_1 = Q_1\, B + f(P_1)$ et $AP_2 = Q_2\, B + f(P_2)$.

Alors $A(\lambda\, P_1 + P_1) = (\lambda\, Q_1 + Q_2)\, B + \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$. De plus $\lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de B comme combinaison linéaire de deux polynomes de degrés strictement inférieurs à celui de B.

Alors $A(\lambda\, P_1 + P_1) = (\lambda\, Q_1 + Q_2)\, B + \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ et $\deg(\lambda\, f(P_1) + f(P_2)) < \deg B$.

$\lambda\, f(P_1) + f(P_2)$ est alors le reste dans la division de $(\lambda\, P_1 + P_2)\, A$ par B et ainsi $f(\lambda\, P_1 + P_2) = \lambda\, f(P_1) + f(P_2)$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}.$$

Q2 Soit P un élément de $\operatorname{Ker} f$. Il existe un élément un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ (et même de E) tel que $AP = QB$.

$A = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ et $B = X^4 - X = X(X^3-1)$.

Les zéros de A dans $\mathbb{C}$ sont -1, 1, i et $-i$. Les zéros de B dans $\mathbb{C}$ sont 0, 1, j et j^2.

$AP = QB$ donc les zéros de B sont des zéros de AP. Comme 0, j et j^2 sont des zéros de B qui ne sont pas des zéros de A, 0, j et j^2 sont des zéros de P.

Ainsi $X(X-j)(X-j^2)$ divise P. Notons que $X(X-j)(X-j^2) = X(X^2+X+1)$.

P est de degré au plus 3 et $X(X^2+X+1)$ est un polynôme de degré 3 qui divise P ; par conséquent il existe un réel λ tel que $P = \lambda\, X(X^2+X+1)$. $P \in \operatorname{Vect}(X(X^2+X+1))$.

Ceci montre donc que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(X(X^2+X+1))$. Pour montrer l'inclusion inverse il suffit de montrer que $X(X^2+X+1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

$AX(X^2+X+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)X(X^2+X+1) = (X+1)(X^2+1)X(X-1)(X^2+X+1)$.

$AX(X^2+X+1) = (X+1)(X^2+1)X(X^3-1) = (X+1)(X^2+1)B$.

B divise ainsi $AX(X^2+X+1)$ donc $f(AX(X^2+X+1)) = 0_E$ et $X(X^2+X+1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

Alors $\operatorname{Vect}(X(X^2+X+1)) \subset \operatorname{Ker} f$. Finalement :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est la droite vectorielle engendrée par } X(X^2+X+1)}$$

Soit P un élément de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

$P \in F \iff P(1) = 0 \iff X-1$ divise $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X],\ P = (X-1)Q$.

$P \in F \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P = (X-1)(a+bX+cX^2) \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P = a(X-1) + bX(X-1) + cX^2(X-1)$.

$P \in F \iff P \in \operatorname{Vect}(X-1, X(X-1), X^2(X-1))$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E et $(X-1, X(X-1), X^2(X-1))$ en est une famille génératrice. Comme cette famille est constituée de polynômes de degrés échelonnés, elle est libre et c'est donc une base de F.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension } 3}.$$

Soit R un élément de $\operatorname{Im} f$. Il existe deux éléments P et Q de E tel que $AP = QB + R$. 1 est un zéro commun à A et B donc 1 est un zéro de R. Ainsi R appartient à F.

Alors $\operatorname{Im} f \subset F$. De plus $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3 = \dim F$. Par conséquent

$$\boxed{\operatorname{Im} f = F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}}.$$

Montrons directement que $F \subset \operatorname{Im} f$.

Observons que $A - B = X^4 - 1 - X^4 + X = X - 1$. Ceci n'est pas de l'ordre du divin mais résulte du fait que A et B ont $X-1$ comme PGCD et que par conséquent (merci Bezout) on peut trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = X - 1$ (exemple $U = 1$ et $V = -1$).

Dès lors soit P un élément de F. Il existe un élément T de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = (X-1)T$.

Ainsi $AT - BT = (X-1)T = P$. T est un élément de E, $AT = TB + P$ et $\deg P \leqslant 3 < \deg B$ donc T est un élément de E dont le reste dans la division par B est P. $f(T) = P$ et P appartient à l'image de f.

Exercice 13 **Comparaison des spectres de $g \circ f$ et de $f \circ g$.**

Q1. f et g sont deux endomorphismes de E tel que $\varphi = \mathrm{Id}_E - f \circ g$ soit un automorphisme de E.

On se propose de montrer que $\psi = \mathrm{Id}_E - g \circ f$ est également un automorphisme de E.

Soit y un élément de E. On suppose que x est un antécédent de y par ψ dans E.

Montrer que $f(x) = \varphi^{-1}\big(f(y)\big)$ puis que $x = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)$. Indiquer ce que cela prouve.

Conclure et exprimer ψ^{-1} à l'aide de φ^{-1}.

Q2. f et g sont deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie.

a) λ est un élément non nul de K. Montrer en utilisant Q1 que $f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ est bijectif si et seulement si $g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ est bijectif.

b) On suppose que $g \circ f$ est bijectif. Montrer que f est injectif et que g est surjectif. En déduire que $f \circ g$ est bijectif.

c) Comparer le spectre de $g \circ f$ et le spectre de $f \circ g$.

Q1. Soit y un élément de E.

• Supposons que y possède un antécédent x par ψ dans E. Alors $y = \psi(x) = x - g\big(f(x)\big)$.

Ceci donne $f(y) = f(x) - f\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (\mathrm{Id}_E - f \circ g)\left(f(x)\right) = \varphi\big(f(x)\big)$. Alors $f(x) = \varphi^{-1}\big(f(y)\big)$.

En injectant ce résultat dans $y = x - g\big(f(x)\big)$ on obtient $y = x - g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)$ ou $x = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)$.

Ainsi si y possède un antécédent par ψ dans E c'est nécessairement $x = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)$. Donc y possède au plus un antécédent par ψ dans E.

• Posons $x = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)$ et montrons que x est un antécédent de y par ψ. Il suffit de montrer que $\psi(x) = y$.

$\psi(x) = x - g\big(f(x)\big) = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right) - g\big(f(y)\big) - g\left(f\left(g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)\right)\right)$.

$\psi(x) = y - g\big(f(y)\big) + g\Big(\varphi^{-1}\big(f(y)\big) - (f \circ g)\big(\varphi^{-1}(f(y))\big)\Big) = y - g\big(f(y)\big) + g\Big(\left(\mathrm{Id}_E - f \circ g\right)\left(\varphi^{-1}(f(y))\right)\Big)$.

$\psi(x) = y - g\big(f(y)\big) + g\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(f(y))\big)\Big) = y - g\big(f(y)\big) + g\big(f(y)\big) = y$.

Ainsi x est un antécédent de y par ψ dans E.

Finalement y possède un unique antécédent par ψ dans E : $x = y + g\left(\varphi^{-1}(f(y))\right) = (\mathrm{Id}_E + g \circ \varphi^{-1} \circ f)(y)$.

Ceci étant vrai pour tout élément y de E, on peut alors dire que :

$$\boxed{\psi \text{ est bijectif et } \psi^{-1} = \mathrm{Id}_E + g \circ \varphi^{-1} \circ f}$$

En échangeant les rôles de f et g on peut dire que si ψ est bijectif, φ l'est également et $\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_E + f \circ \psi^{-1} \circ g$. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Id}_E - f \circ g \text{ est un automorphisme de } E \text{ si et seulement si } \mathrm{Id}_E - g \circ f \text{ est un automorphisme de } E.}$$

Q2. a) Soit λ un élément non nul de K.

$f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E = -\lambda\left(\mathrm{Id}_E - \left(\frac{1}{\lambda} f\right) \circ g\right)$ est bijectif si et seulement si $\mathrm{Id}_E - \left(\frac{1}{\lambda} f\right) \circ g$ est bijectif car λ n'est pas nul.

En appliquant Q1 à $\dfrac{1}{\lambda} f$ et g on peut dire que $f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ est bijectif si et seulement si $\mathrm{Id}_E - g \circ \left(\frac{1}{\lambda} f\right)$ est bijectif.

Comme λ n'est pas nul, $f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ est bijectif si et seulement si $-\lambda\left(\mathrm{Id}_E - g \circ \left(\frac{1}{\lambda} f\right)\right)$ est bijectif.

Or $-\lambda\left(\mathrm{Id}_E - g \circ \left(\frac{1}{\lambda} f\right)\right) = g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout élément non nul } \lambda \text{ de } K,\ f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E \text{ est bijectif si et seulement si } g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E \text{ est bijectif.}}$$

Remarque Ceci ne vaut pas pour $\lambda = 0$ en dimension quelconque.

Considérons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit f l'application de E dans E qui à tout élément P de E associe P' et soit g l'application de E dans E qui à tout élément P de E associe la primitive de P qui prend la valeur 0 en 0. f et g sont deux endomorphismes de E.

$f \circ g = \mathrm{Id}_E$ est bijectif mais $g \circ f$ n'est pas bijectif car $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \{P \in E \mid P(0) = 0\}$.

b) Soit x un élément de $\mathrm{Ker}\, f$. $f(x) = 0_E$ donc $g(f(x)) = 0_E$. Par conséquent x appartient à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ qui est réduit à $\{0_E\}$ car $g \circ f$ est bijectif. Ainsi $x = 0_E$.

Ceci achève de montrer que f est injectif.

$f(E) \subset E$ donc $g(f(E)) \subset g(E) \subset E$. Comme $g \circ f$ est bijectif : $g(f(E)) = E$. Alors $E \subset g(E) \subset E$ donc $g(E) = E$. g est surjectif.

f est un endomorphisme injectif de E, g est endomorphisme surjectif de E et E est de dimension finie, ainsi f et g sont bijectifs. Par conséquent $f \circ g$ est bijectif.

f et g jouant un role symétrique on peut dire que :

$$\boxed{f \circ g \text{ est bijectif si et seulement si } g \circ f \text{ est bijectif.}}$$

Alors

$$\boxed{\text{pour tout élément } \lambda \text{ de } K,\ f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E \text{ est bijectif si et seulement si } g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E \text{ est bijectif.}}$$

c) Soit λ un élément de $\mathbb{K}$.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g) \iff f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ non bijectif $\iff g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ non bijectif $\iff \lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)}$$

Exercice Redémontrer Q2 a) sans utiliser Q1 (on pourra montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g - \lambda\, \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$)

Exercice 14 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f est un endomorphisme de E de rang r.

Q1. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = f \circ u$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et donner son rang en fonction de r (considérer le noyau).

Q2. Même chose en posant : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = u \circ f$.

Q1 Ici $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = f \circ u$.

• Soit u un endomorphisme de E. Comme f est un endomorphisme de E, par composition $f \circ u$ est un endomorphisme de E. Ainsi φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

• $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda\, u + v) = f \circ (\lambda\, u + v) = \lambda\, f \circ u + f \circ v = \lambda\, \varphi(u) + \varphi(v)$.

Ainsi φ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{L}(E) \text{ donc } \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)).}$$

• Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$.

$u \in \mathrm{Ker}\, \varphi \iff f \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \forall x \in E,\ f\big(u(x)\big) = 0_E \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, f$.

En clair u appartient au noyau de φ si et seulement si u prend ses valeurs dans $\mathrm{Ker}\, f$.

A un petit abus près (*), $\mathrm{Ker}\, \varphi$ est donc l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathrm{Ker}\, f$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\, \varphi = \dim \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}\, f) = \dim E \times \dim \mathrm{Ker}\, f = n(n-r) = n^2 - n\,r$.

φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg}\varphi = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n^2-(n^2-n\,r) = n\,r$.

$$\boxed{\operatorname{rg}\varphi = n\,r = \dim E \times \operatorname{rg} f.}$$

Remarque *Pour ne pas faire d'abus il convient de montrer que* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est isomorphe à* $\mathcal{L}(E, \operatorname{Ker} f)$.

Pour cela on considère l'application θ *de* $\operatorname{Ker}\varphi$ *dans* $\mathcal{L}(E, \operatorname{Ker} f)$, *qui à un élément* u *de* $\operatorname{Ker}\varphi$ *associe l'application linéaire* $\hat{u}$ *de* E $\boxed{\text{dans } \operatorname{Ker} f}$ *définie par* $\forall x \in E,\ \hat{u}(x) = u(x)$ *et on montre que* θ *est un isomorphisme.*

On retrouve alors $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathcal{L}(E, \operatorname{Ker} f)$.

On est prié de remarquer que $\hat{u}$ *n'est pas égal à* u ! !

Q2 $\boxed{\text{Ici } \forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = u \circ f}$.

• Soit u un endomorphisme de E. Comme f est un endomorphisme de E, par composition $u \circ f$ est un endomorphisme de E. Ainsi φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

• $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda\,u+v) = (\lambda\,u+v)\circ f = \lambda\,u\circ f + v \circ f = \lambda\,\varphi(u) + \varphi(v)$.

Ainsi φ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{L}(E) \text{ donc } \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)).}$$

• Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$.

$u \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow u \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ u\big(f(x)\big) = 0_E \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} u$.

En clair u appartient au noyau de φ si et seulement si le noyau de u contient l'image de f, autrement dit si et seulement si u est nulle sur $\operatorname{Im} f$.

Rappelons qu'une application linéaire est entièrement déterminée par sa donnée sur deux supplémentaires de l'espace vectoriel de départ.

Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E.

Considérons l'application θ de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans $\mathcal{L}(G,E)$, qui à un élément u de $\operatorname{Ker}\varphi$ associe l'applicaion linéaire $\hat{u}$ de G dans E définie par $\forall x \in G,\ \hat{u}(x) = u(x)$.

Montrons que θ est un isomorphisme de $\operatorname{Ker}\varphi$ sur $\mathcal{L}(G,E)$.

θ est clairement une application linéaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ sur $\mathcal{L}(G,E)$.

Montrons que θ est injective. Soit u un élément de $\operatorname{Ker}\theta$.

$\theta(u) = \hat{u} = 0_{\mathcal{L}(G,E)}$. Ainsi $\forall x \in G,\ u(x) = \hat{u}(x) = 0_E$. Alors u est nulle sur G.

Or u appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$ donc u est également nulle sur $\operatorname{Im} f$. Montrons alors que $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit x un élément de E. $\exists ! (x_1,x_2) \in \operatorname{Im} f \times G,\ x = x_1 + x_2$. $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = 0_E + 0_E = 0_E$.

Ainsi $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et le noyau de θ est réduit à $0_{\mathcal{L}(E)}$; θ est injective.

Montrons que θ est surjective. Soit v un élément de $\mathcal{L}(G,E)$. Montrons qu'il existe un élément u de $\operatorname{Ker}\varphi$ tel que $\theta(u) = v$

Notons p la projection sur G parallèlement à $\operatorname{Im} f$.

Soit p' l'application linéaire de E dans G définie par $\forall x \in E,\ p'(x) = p(x)$. Posons $u = v \circ p'$.

Notons que $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ p'(x) = p(x) = 0_E$ et $\forall x \in G,\ p'(x) = p(x) = x$

Par composition u est une application linéaire de E dans E donc est un endomorphisme de E.

$\forall x \in \operatorname{Im} f,\ u(x) = v\big(p'(x)\big) = v\big(p(x)\big) = v(0_E) = 0_E$. Ainsi u appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$.

$\forall x \in G,\ \theta(u)(x) = \hat{u}(x) = u(x) = v\big(p'(x)\big) = v\big(p(x)\big) = v(x)$. $\theta(u) = v$. Ceci achève de montrer que θ est surjective.

θ est un isomorphisme de $\operatorname{Ker}\varphi$ sur $\mathcal{L}(G,E)$. Donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathcal{L}(G,E) = \dim G \times \dim E$.

Or G est un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E donc $\dim G = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = n - r$.

Alors $\dim \operatorname{Ker}\varphi = (n-r)\dim E = (n-r)\,n = n^2 - r\,n$. Ainsi $\operatorname{rg}\varphi = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n^2 - (n^2 - r\,n) = r\,n$.

$$\boxed{\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg} f \times \dim E.}$$

Exercice 15 ESCP 2002 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^m est défini par :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall\, m \in [\![1, +\infty[\![,\ u^m = u \circ u^{m-1}.$$

On note D l'application dérivation qui à tout P de E associe le polynôme dérivée P'.

Soit f un endomorphisme de E tel qu'il existe deux éléments k et m vérifiant : $f^k = D^m$.

Q1. Montrer que D est un endomorphisme surjectif de E. En déduire que f est un endomorphisme surjectif de E.

Q2. Déterminer $\operatorname{Ker} D^m$.

Q3. Montrer que pour tout élément p de $\in [\![0, k]\!]$, $\operatorname{Ker} f^p$ est de dimension finie.

Q4. Soit $p \in [\![1, k]\!]$ et φ l'application définie sur $\operatorname{Ker} f^p$ par $\varphi(P) = f(P)$.

a) Montrer que φ est une application linéaire de $\operatorname{Ker} f^p$ dans $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

b) Déterminer son noyau et montrer que φ est surjective.

c) Déterminer une relation entre la dimension de $\operatorname{Ker} f^p$ et celles de $\operatorname{Ker} f^{p-1}$ et de $\operatorname{Ker} f$.

Q5. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f^k$ en fonction de k et de la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

Q6. Soit k et m deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur (k,m) pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^k = D^m$.

Q1 • D est une application de E dans E.

• $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ D(\lambda\, P + Q) = (\lambda\, P + Q)' = \lambda\, P' + Q' = \lambda\, D(P) + D(Q)$. D est linéaire.

D est un endomorphisme de E.

• Montrons que D est surjectif. Soit P un élément de E. Montrons que P possède un antécédent par D dans E.

$\exists r \in \mathbb{N},\ \exists (a_0, a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$.

Posons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{a_k}{k+1}\, X^{k+1}$. Q appartient à E et $D(Q) = Q' = P$. Finalement :

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme surjectif de } E.}$$

• Comme D est un endomorphisme surjectif de E il en est de même de D^m (composée de m endomorphismes surjectifs de E) donc de f^k.

Alors $f^k(E) = E$. Or $f^{k-1}(E) \subset E$ donc $f^k(E) \subset f(E)$. Ainsi $E = f^k(E) \subset f(E) \subset E$. Par conséquent $f(E) = E$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme surjectif de } E.}$$

Q2 Notons que $\forall P \in E,\ D^m(P) = P^{(m)}$.

Soit P un élément de $\operatorname{Ker} D^m$. $P^{(m)} = 0_E$.

La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à l'ordre $m-1$ donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, P^{(m)}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, X^k.$

Ainsi $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ donc P appartient à $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Réciproquement il est clair que si P appartient à $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, $P^{(m)}$ est le polynôme nul donc P appartient à $\operatorname{Ker} D^m$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

Q3 Soit p un élément de $[\![0,k]\!]$. Si x appartient à $\operatorname{Ker} f^p$, $f^k(x) = f^{k-p}\big(f^p(x)\big) = f^{k-p}(0_E) = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Comme $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ est de dimension finie m, $\operatorname{Ker} f^p$ est de dimension finie inférieure ou égale à m.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } [\![0,k]\!],\ \operatorname{Ker} f^p \text{ est de dimension finie et inférieure ou égale à } m.}$$

Q4 a) Ici p est dans $[\![1,k]\!]$.

f étant linéaire, φ est linéaire. Soit P un élément de $\operatorname{Ker} f^p$. $f^p(P) = 0_E$ donc $f^{p-1}\big(f(P)\big) = 0_E$.

Ainsi $\varphi(P) = f(P)$ est un élément de $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } \operatorname{Ker} f^p \text{ dans } \operatorname{Ker} f^{p-1}.}$$

b) Soit P un élément de $\operatorname{Ker} f^p$. $\varphi(P) = 0_E \iff f(P) = 0_E \iff P \in \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f$ car $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f.}$$

Montrons que φ est surjective. Soit P un élément de $\operatorname{Ker} f^{p-1}$. Montrons que P possède un antécédent dans $\operatorname{Ker} f^p$ par φ.

Comme f est surjective, il existe un élément Q de E tel que $f(Q) = P$.

$f^p(Q) = f^{p-1}(P) = 0_E$ donc Q appartient à $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\varphi(Q) = f(Q) = P$.

Ceci achève de montrer que φ est surjective.

$$\boxed{\varphi \text{ est application linéaire surjective de } \operatorname{Ker} f^p \text{ dans } \operatorname{Ker} f^{p-1}.}$$

c) Appliquons le théorème du rang à φ. $\dim \operatorname{Ker} f^p = \operatorname{rg} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{rg} \varphi + \dim \operatorname{Ker} f$.

Or $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} f^{p-1}$ donc $\operatorname{rg} \varphi = \dim \operatorname{Ker} f^{p-1}$. Alors $\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^{p-1} + \dim \operatorname{Ker} f$.

$$\boxed{\forall p \in [\![1,k]\!],\ \dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^{p-1} + \dim \operatorname{Ker} f.}$$

Q5 D'après ce qui précède la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^p)_{p \in [\![0,k]\!]}$ (oui $p \in [\![\boxed{0}, k]\!]$) est arithmétique de raison $\dim \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^0 + k \dim \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f^0 = \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E = \{0_E\}$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^0 = 0$. Ainsi

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f^k = k \, \dim \operatorname{Ker} f.}$$

Notons que $k \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} D^m = m$ *donc* k *divise* m.

Q6 D'après ce qui précède, k divise m est une condition nécessaire pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^k = D^m$.

Montrons qu'elle est suffisante. Supposons que k divise m. Il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que $m = r\,k$.

Posons $f = D^r$. f est un endomorphisme de E et $f^k = (D^r)^k = D^{r\,k} = D^m$. La condition est suffisante.

Soit k et m deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^k = D^m$ est $\boxed{k \text{ divise } m}$.

Exercice 16 Q1. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E.

Q1 Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$ si et seulement si, il existe un élément non nulle λ de $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\,\varphi$.

Q2 Application $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. H est un hyperplan de E.

$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ et $b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + b_n\,x_n = 0$ sont deux équations de H dans $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ b_i = \lambda\,a_i$.

Q1 • Supposons que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$ et posons $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$. φ n'étant pas la forme linéaire null, H est un hyperplan.

Ainsi il existe une droite vectorielle D de E qui est un supplémentaire de H dans E.

Soit (a) une base de D. $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$.

Si $\varphi(a)$ est nul, alors φ est nulle sur H et $\operatorname{Vect}(a)$ donc φ est nulle sur E car tout élément de E est somme d'un élément de H et d'un élément de $\operatorname{Vect}(a)$. φ n'étant pas la forme linéaire nulle de E nécessairement $\varphi(a)$ n'est pas nul. Pour les mêmes raisons, $\psi(a)$ n'est pas nul.

Posons alors $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}\cdot$ Remarquons que λ n'est pas nul, que $\psi(a) = \lambda\,\varphi(a)$ et montrons que $\psi = \lambda\,\varphi$.

Soit x un élément de E. Il existe un élément h de H et un élément γ de $\mathbb{K}$ tels que $x = h + \gamma\,a$. Notons que $\psi(h) = \varphi(h) = 0_{\mathbb{K}}$ et rappelons que $\psi(a) = \lambda\,\varphi(a)$.

Alors $\psi(x) = \psi(h) + \gamma\,\psi(a) = 0_{\mathbb{K}} + \gamma\,\lambda\,\varphi(a) = \lambda\,0_{\mathbb{K}} + \lambda\,\gamma\,\varphi(a) = \lambda\,\big(\varphi(h) + \gamma\,\varphi(a)\big) = \lambda\,\varphi(x)$.

Par conséquent $\forall x \in E,\ \psi(x) = \lambda\,\varphi(x)$ donc $\psi = \lambda\,\varphi$ avec λ élément non nul de $\mathbb{K}$.

• Réciproquement supposons qu'il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\,\varphi$. Montrons que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$.

Soit x un élément de E. $x \in \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \psi(x) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \lambda\,\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$.

Or λ n'est pas nul donc $\lambda\,\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} \varphi$.

Finalement $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$.

Q2 Posons pour tout élément $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,e_i$ de E, $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,x_i$ et $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\,x_i$.

φ et ψ sont clairement deux formes linéaires sur E. Tout aussi clairement $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi = H$. Comme H n'est pas égal à E, φ et ψ sont non nulles et ont même noyau.

D'après Q1, il existe un élément non nul λ de $\mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\,\varphi$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!],\ b_i = \psi(e_i) = \lambda\,\varphi(e_i) = \lambda\,a_i$.

Exercice 17 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. u et v sont deux endomorphismes de E tels que :

$$u^2 = v^2 = \mathrm{Id}_E \text{ et } \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E).$$

Q0 f et g sont deux endomorphismes de E. Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.

Q1 Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires (c'est du cours mais je veux qu'on le redémontre).

Q2 a) Montrer que $\mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$.

b) Montrer en fait que : $\mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$.

c) Que dire de $(v - \mathrm{Id}_E) \circ (u + \mathrm{Id}_E)$?

Q3 On pose $f = v \circ u - \mathrm{Id}_E$. Montrer que $f = u - v$. Prouver que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on pourra sans doute remarquer que le problème est symétrique en u et v).

Q4 Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $u = v$.

Q0 $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \forall x \in E,\ g\big(f(x)\big) = 0_E \iff \forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$. Or $\mathrm{Im}\, f = \{f(x)\,,\, x \in E\}$.

Donc $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \forall y \in \mathrm{Im}\, f,\ g(y) = 0_E \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.

$$\boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.}$$

Q1 *Version 1* u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{Id}_E$ donc u est une symétrie vectorielle.

Mieux u est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

Version 2 Retrouvons ce résultat à la main. Soit x un élément de E.

Montrons, par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (y, z) de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ tel que $x = y + z$.

Analyse/Unicité. Supposons que $x = y + z$ avec $(y, z) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

$u(x) = u(y) + u(z) = y - z$. Ainsi $x = y + z$ et $u(x) = y - z$. En ajoutant et en multipliant par $\frac{1}{2}$ il vient $y = \frac{1}{2}\big(x + u(x)\big)$.

En soustrayant et en multipliant par $\frac{1}{2}$ il vient $z = \frac{1}{2}\big(x - u(x)\big)$.

Ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

Synthèse/Existence. Posons $y = \frac{1}{2}\big(x + u(x)\big)$ et $z = \frac{1}{2}\big(x - u(x)\big)$.

- $y + z = \frac{1}{2}\big(x + u(x)\big) + \frac{1}{2}\big(x - u(x)\big) = x$.
- $u(y) = \frac{1}{2}\left(u(x) + u^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(u(x) + x\right) = y$ donc $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
- $u(z) = \frac{1}{2}\left(u(x) - u^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(u(x) - x\right) = -z$ donc $z \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$. D'où l'existence de la décompoition.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \text{ sont supplémentaires.}}$$

Q2 a) u et Id_E commutent donc $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + \mathrm{Id}_E) = u^2 - \mathrm{Id}_E^2 = u^2 - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

D'après Q0, $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E).}$$

b) *Version 1* $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$. E étant de dimension finie, pour montrer que $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ il ne reste plus qu'à montrer que $\dim \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

$\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E donc $\dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E) = \dim E = n$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = n - \dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$.

Le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \dim E = n$

Ceci fournit $\dim \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = n - \dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = n - \dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$.

Ceci achève de montrer que $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

Version 2 $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$.

Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$. $u(x) = x$ donc $x = \dfrac{1}{2}\big(x+x\big) = \dfrac{1}{2}\big(u(x)+x\big) = (u+\mathrm{Id}_E)\left(\dfrac{1}{2}\,x\right)$.

Ainsi x appartient à $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E)$. On retrouve alors :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E).}$$

c) $\mathrm{Im}(u+\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_E)$ d'après a). Q0 donne alors : $\boxed{(v-\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$

Q3 $(v-\mathrm{Id}_E)\circ(u+\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $v\circ u + v - u - \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\boxed{f = v\circ u - \mathrm{Id}_E = u - v.}$

Nous venons de voir que $v\circ u - \mathrm{Id}_E = u - v$. Comme u et v jouent un rôle symétrique, $u\circ v - \mathrm{Id}_E = v - u$.

Alors $f^2 = (v-u)^2 = (v-u)\circ(v-u) = v^2 - v\circ u - u\circ v + u^2 = \mathrm{Id}_E - v\circ u - u\circ v + \mathrm{Id}_E = -(v\circ u - \mathrm{Id}_E) - (u\circ v - \mathrm{Id}_E)$.

Ainsi $f^2 = -(u-v) - (v-u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\boxed{f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$

Q4 Nous avons vu que $v\circ u - \mathrm{Id}_E = u - v$ et $u\circ v - \mathrm{Id}_E = v - u$.

Alors $u\circ v = v\circ u \Longleftrightarrow u\circ v - \mathrm{Id}_E = v\circ u - \mathrm{Id}_E \Longleftrightarrow v - u = u - v \Longleftrightarrow 2\,v = 2\,u \Longleftrightarrow v = u$.

$$\boxed{u\circ v = v\circ u \text{ si et seulement si } u = v.}$$

Exercice 18 a est un réel et E est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

F est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telles que $f'' + a\,f = 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Q1 a) Soit f un élément de F. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en fonction de f ou de f' (... et de a).

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Dans la suite on se propose de montrer que F est de dimension 2 et d'en trouver une base.

Q2 Examiner le cas où a est nul. *Dans la suite a est non nul.*

Q3 On considère l'application φ de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall f \in F,\ \varphi(f) = (f(0), f'(0))$.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) Soit f un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2\,p}}{(2\,p)!}\,|a|^p \operatorname*{Max}_{t\in[0,x]} |f(t)|$. En déduire que f est la fonction nulle.

En déduire que la dimension de F est inférieure ou égale à deux.

Q4 a) On suppose que a est strictement négatif. Trouver l'ensemble des réels λ tels que $x \to e^{\lambda\,x}$ appartienne à F.

Achever alors de résoudre le problème posé.

b) On suppose que a est strictement positif. Soit c un réel.

Trouver l'ensemble des réels non nuls λ tels que $x \to \cos(\lambda\,x + c)$ appartienne à F. Achever alors de résoudre le problème posé.

Q1 **a)** Soit f un élément de F. Montrons par récurrence que pour tout élément p de $\mathbb{N}$, f est $2p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(2p)} = (-a)^p\, f$.

• La propriété est de toute évidence vraie pour $p = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p + 1$.

f est dans F donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'' = -a\,f$. L'hypothèse de récurrence permet alors de dire que f'' est $2p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f est $2p + 2$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est $2(p + 1)$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$!

De plus $f^{\left(2(p+1)\right)} = \left(f^{(2p)}\right)'' = \left((-a)^p\, f\right)'' = (-a)^p\, f'' = (-a)^p\,(-a\, f) = (-a)^{p+1}\, f$. Ceci achève la récurrence.

f étant $2p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout p dans $\mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p+1)} = \left(f^{(2p)}\right)' = \left((-a)^p\, f\right)' = (-a)^p\, f'$.

Soit f est un élément de F. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)} = (-a)^p\, f$ et $f^{(2p+1)} = (-a)^p\, f'$

b) • D'après a) F est contenu dans E.

• 0_E est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $0_E'' + a\,0_E = 0_E + a\,0_E = 0_E = 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Ainsi 0_E appartient à F et F est donc non vide.

• Soient f et g deux éléments de F. Soit λ un réel. $\lambda\, f + g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

De plus : $(\lambda\, f + g)'' + a\,(\lambda\, f + g) = \lambda\, f'' + g'' + a\,\lambda\, f + a\, g = \lambda(f'' + a\, f) + (g'' + a\, g) = \lambda\, 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})} + 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Donc $\lambda\, f + g$ est un élément de F. Ceci achève de montrer que :

F est un sous-espace vectoriel de E.

Q2 Ici $a = 0$. F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée seconde nulle.

• Notons que toute application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient F

• Réciproquement soit f un élément de F. f'' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$! Ainsi f' est constante sur $\mathbb{R}$.

Alors il existe un réel b tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = b$. Ainsi il existe un réel c tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = b\,x + c$. f est affine.

On suppose que a est nul. F est l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. F est donc de dimension 2.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = x$; (f_0, f_1) est une base de F.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **a)** Soient f et g deux éléments de F et soit λ un réel.

$\varphi(\lambda\, f+g)=\big((\lambda\, f+g)(0),(\lambda\, f+g)'(0)\big)=\big(\lambda\, f(0)+g(0),(\lambda\, f'+g')(0)\big)=\big(\lambda\, f(0)+g(0),\lambda\, f'(0)+g'(0)\big).$

$\varphi(\lambda\, f+g)=\lambda\,\big(f(0),f'(0)\big)+\big(g(0),g'(0)\big)=\lambda\,\varphi(f)+\varphi(g)$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

b) f un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ donc f est un élément de F qui vérifie $f(0)=f'(0)=0$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall p\in\mathbb{N},\ f^{(2p)}(0)=(-a)^p\, f(0)=0$ et $f^{(2p+1)}(0)=(-a)^p\, f'(0)=0$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $2p-1$ donne :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f(x)-\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,(x-0)^k\right|\leqslant\frac{|x-0|^{2\,p}}{(2\,p)!}\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f^{(2p)}(t)|.$$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(k)}(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f^{(2p)}(t)|=\underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|(-a)^p\, f(t)|=\underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,\big(|a|^p\,|f(t)|\big)=|a|^p\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f(t)|.$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leqslant\dfrac{|x|^{2\,p}}{(2\,p)!}\,|a|^p\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f(t)|$. Finalement :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leqslant\frac{|x|^{2\,p}}{(2\,p)!}\,|a|^p\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f(t)|.}$$

Soit x un réel. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ |f(x)|\leqslant\dfrac{|x|^{2\,p}}{(2\,p)!}\,|a|^p\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f(t)|=\dfrac{(|x|\,\sqrt{|a|})^{2\,p}}{(2\,p)!}\ \underset{t\in[0,x]}{\operatorname{Max}}\,|f(t)|$ **(1)**.

Or la série de terme général $\dfrac{(|x|\,\sqrt{|a|})^n}{n!}$ converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(|x|\,\sqrt{|a|})^n}{n!}=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{(|x|\,\sqrt{|a|})^{2\,p}}{(2\,p)!}=0$. En passant à la limite dans (1) il vient $|f(x)|\leqslant 0$ donc $f(x)=0$! Ceci pour tout réel x.

Ceci achève de montrer que f est la fonction nulle. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi=\{0_F\}.}$$

$\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 donc $\dim\operatorname{Im}\varphi\leqslant 2$.

De plus $\dim\operatorname{Ker}\varphi=0$. Le théorème du rang donne alors $\dim F=\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim\operatorname{Im}\varphi\leqslant 2$

$$\boxed{F \text{ est de dimension inférieure ou égale à deux.}}$$

$\boxed{\textbf{Q4}}$ **a)** Ici $\boxed{\textbf{a est réel strictement négatif.}}$

Soit λ un réel. Posons : $\forall x\in\mathbb{R},\ g_\lambda(x)=e^{\lambda\,x}$. g_λ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ g''_\lambda(x)+a\,g_\lambda(x)=(\lambda^2+a)\,e^{\lambda\,x}$.

Ainsi g_λ appartient à F si et seulement si $\lambda^2+a=0$ donc si et seulement si $\lambda=\sqrt{-a}$ ou $\lambda=-\sqrt{-a}$.

$$\boxed{\lambda \text{ est un réel. } x\to e^{\lambda\,x} \text{ appartient à } F \text{ si et seulement si } \lambda=\sqrt{-a} \text{ ou } \lambda=-\sqrt{-a}.}$$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_2(x)=e^{\sqrt{-a}\,x}$ et $f_3(x)=e^{-\sqrt{-a}\,x}$. Montrons que (f_2,f_3) est une famille libre de F. Notons que f_2 et f_3 sont deux éléments de F

Soient α et β deux réels tels que $\alpha\,f_2+\beta\,f_3=0_F$. $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha\,e^{\sqrt{-a}\,x}+\beta\,e^{-\sqrt{-a}\,x}=0$.

Pour $x=0$ il vient $\alpha+\beta=0$ donc $\beta=-\alpha$. Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha\left(e^{\sqrt{-a}\,x}-e^{-\sqrt{-a}\,x}\right)=0$.

En divisant par $e^{\sqrt{-a}\,x}$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\left(1 - e^{-2\sqrt{-a}\,x}\right) = 0$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $\alpha = 0$.

Ainsi $\beta = -\alpha = 0$. Ce qui achève de montrer que (f_2, f_3) est une famille libre de F.

Cela permet en particulier de dire que F est de dimension supérieure ou égale à deux. Or nous avons vu plus haut que F est de dimension au plus 2.

Par conséquent F est de dimension 2. (f_2, f_3) est alors une famille libre de F, de cardinal 2 et F est de dimension 2.

(f_2, f_3) est donc une base de F.

a est un réel strictement négatif. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = e^{\sqrt{-a}\,x}$ et $f_3(x) = e^{-\sqrt{-a}\,x}$.
F est de dimension 2 et (f_2, f_3) est une base de F.

b) Ici **a est réel strictement positif.**

c est un réel. Soit λ un réel non nul. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_\lambda(x) = \cos(\lambda\,x + c)$.

h_λ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ h''_\lambda(x) + a\,h_\lambda(x) = (-\lambda^2 + a)\,\cos(\lambda\,x + c)$.

Ainsi h_λ appartient à F si et seulement si $(a - \lambda^2)\,h_\lambda = 0_F$.

Comme λ n'est pas nul on a : $h_\lambda\left(-\dfrac{c}{\lambda}\right) = 1$ donc h_λ n'est pas égal à 0_F.

Alors h_λ appartient à F si et seulement si $(a - \lambda^2) = 0$, c'est à dire si et seulement si $\lambda = \sqrt{a}$ ou $\lambda = -\sqrt{a}$.

c est un réel et λ est un réel non nul. $x \to \cos(\lambda\,x + c)$ appartient à F si et seulement si $\lambda = \sqrt{a}$ ou $\lambda = -\sqrt{a}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4(x) = \cos(\sqrt{a}\,x)$ et $f_5(x) = \cos\left(-\sqrt{a}\,x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Alors f_4 et f_5 sont deux éléments de F. Notons que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5(x) = \sin(\sqrt{a}\,x)$ et montrons que (f_3, f_5) est une famille libre de F.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha\,f_4 + \beta\,f_5 = 0_F$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\,\cos(\sqrt{a}\,x) + \beta\,\sin(\sqrt{a}\,x) = 0$.

Pour $x = 0$ il vient $\alpha = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ il vient $\beta = 0$; ce qui achève de montrer que (f_4, f_5) est une famille libre de F.

Cela permet en particulier de dire que F est de dimension supérieure ou égale à deux. Or nous avons vu plus haut que F est de dimension au plus 2.

Par conséquent F est de dimension 2. (f_4, f_5) est alors une famille libre de F, de cardinal 2 et F est de dimension 2.

(f_4, f_5) est donc une base de F.

a est un réel strictement négatif. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4(x) = \cos(\sqrt{a}\,x)$ et $f_5(x) = \sin(\sqrt{a}\,x)$.
F est de dimension 2 et (f_4, f_5) est une base de F.

Exercice de contrôle a, b et c sont trois réels. Etudier l'ensemble F des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telles que $a\,f'' + b\,f' + c\,f = 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.