Exercice 1 **Projection**

E est de dimension finie n et f est un endomorphisme de E.

Q1 Montrer que si f est une projection : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f - Id_E) = n$.

Q2. Montrer la réciproque.

Exercice 2 **Rang**.

E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Q1. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$ si et seulement si $F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

Q2. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_F\}$.

Exercice 3 **Endomorphisme dont le carré est $-$Id**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n non nulle.

Q1. f est un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$.

a) Soit e_1 un élément non nul de E. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de E.

b) Montrer que si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille d'éléments de E telle que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_p, f(e_p))$ soit libre et non génératrice alors il existe un élément e_{p+1} de E tel que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_{p+1}, f(e_{p+1}))$ soit libre. En déduire que n est pair. Représenter f par une matrice simple.

Q2. On suppose que n est pair. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -Id_E$.

Exercice 4 **Projection**

u et v sont deux endomorphismes de E.

Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont deux projections ayant même noyau.

Exercice 5 **Endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions**.

ESCP 98 E est l'espace vectoriel des applications continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. F est l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. A tout élément f de E on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1]\, T(f)(t) = \int_0^t \int_v^1 f(u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Q1. Soit f un élement de E. On pose $g = T(f)$. Montrer que g appartient à F. Calculer $g' = (T(f))'$ et $g'' = (T(f))''$.

Q2. Montrer que T est une application linéaire injective de E dans F.

Q3. Montrer que $\operatorname{Im} T = \{g \in F \mid g(0) = g'(1) = 0\}$.

Exercice 6 **Endomorphisme d'un espace vectoriel de polynômes**.

$E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (8 + 3X)P + (-5X + X^2)P' + (X^2 - X^3)P''$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit P un élément de E de degré q strictement plus grand que 3. Préciser le degré de $f(P)$. Qu'en déduire pour $\operatorname{Ker} f$? Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 7 **Définition analytique d'une symétrie vectorielle**.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. P est le plan d'ǵuation $x - y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et D est la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3$.

Q1. Vérifier que P et D sont supplémentaires dans E. Donner une base de P.

Q2. Donner la matrice de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D (on pourra s'intresser aux images par s des vecteurs d'une base de P et d'une base de D.)

Exercice 8 **Endomorphisme de fonctions**

E est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique. Pour tout élément f de E, on pose : $\Phi(f) = f'$.

Q1. a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. a) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{g \in E \mid \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$ sont supplémentaires.

Exercice 9 **Supplémentarité en dimension quelconque**

u et v sont deux endomorphismes des E tels que $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.

Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ (on pourra utiliser une analyse/synthèse).

Exercice 10 **Supplémentarité en dimension quelconque**

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des suites réelles indexées pars $\mathbb{N}$, on considère :

$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n}\}$, $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 0\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.

Exercice 11 **Sous-espaces vectoriels stables**.

E est de dimension 3. f est un endomorphisme non nul de E et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par f.

Q1. On suppose $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et on se propose de trouver $\mathcal{S}$.

a) Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que le noyau de f est un plan vectoriel.

c) Soit D une droite de E. Montrer que D est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si : $D \subset \operatorname{Ker} f$

d) Soit P un plan de E. Montrer que P est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si : $\operatorname{Im} f \subset P$

Q2. *Facultatif.* Préciser $\mathcal{S}$ lorsque f^2 n'est pas nul et que : $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Exercice 12 **Polynôme minimal**.

E est un espace vectoriel de dimension n non nulle sur $\mathbb{K}$.

f est un endomorphisme de E et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des polyômes annulateurs de f.

Ainsi $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Q1. Montrer que si P appartient à $\mathcal{S}$ et si Q appartient à $\mathbb{K}[X]$, PQ appartient à $\mathcal{S}$.

Q2. Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(E)$. Que dire de la famille $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n^2}\right)$ de $\mathcal{L}(E)$?

En déduire que f possède un polynôme annulateur non nul.

Q3. a) Justifier l'existence d'un plus petit élément r pour $\{\deg P\,;\, P \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$. A est un polynôme de $\mathcal{S}$ de degré r.

b) En utilisant la division euclidienne montrer que tout élément P de $\mathcal{S}$ est divisible par A. En déduire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble de multiples de A.

c) Montrer qu'il existe un polynôme unitaire B et un seul tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble de multiples de B.

Exercice 13 **Automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$**

n est dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q1. Montrer que pour tout élément P de E, il existe un unique élément $\widehat{P}$ de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{P}(x).$$

Q2. Montrer que l'application f, qui à P dans E associe $\widehat{P}$ est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.

Exercice 14 **Endomorphisme de rang 1. Projection**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$). f est un endomorphisme de E de rang 1.

Q1. Soit a un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda\, a$. Montrer que $f \circ f = \lambda\, f$.

Q2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe c dans $\mathbb{K}^*$ tel que $c\, f$ soit un projecteur.

ii) $f \circ f$ n'est pas l'application linéaire nulle.

iii) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 15 **Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme de dérivation**

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et d est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ d(P) = P'$.

Trouver les sous-espaces de E stables par d.

Exercice 16 **Rang. QSP**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

Exercice 17 **Formes linéaires. QSP**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 2$).

Q1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G = E$ alors $F = E$ ou $G = E$.

Q2. φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe x dans E tel que $\varphi(x)\,\psi(x) \neq 0$.

Exercice 18 **QSP**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 19 **Rang. QSP**

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$ et que $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

Exercice 20 **Automorphisme. Supplémentarité en dimension quelconque**

f et g sont deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f \circ g$ est un automorphisme de E.

ii) f est surjective, g est injective et $E = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 21 **Caractérisation des homothéties vectorielles**.

f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si $f = \lambda Id_E$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors f laisse stable les droites vectorielles de E.

Q2. Réciproquement on suppose que f laisse stable les droites vectorielles de E.

a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.

b) Soit u un élément non nul de E. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$ tel que : $f(u) = \lambda u$.

Montrer que si v est un élément de E colinéaire à u : $f(v) = \lambda v$.

Montrer que ceci vaut encore si v est un élément de E tel que (u, v) soit libre $\big($considérer $f(u+v)\big)$.

c) Conclure.

Exercice 22 **ESCP 2001 28** **Projections**

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f_1, f_2, ..., f_p sont p endomorphismes non nuls de E tels que :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \mathrm{Id}_E, \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ pour tout } i \neq j.$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ est un élément de $\mathbb{K}^p$. On pose $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \ldots + \alpha_p f_p$.

Q1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, f_i est un projecteur de E.

Q2. Calculer f^k pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Q3. Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une famille libre.

Q4. Montrer que :

$$E = \operatorname{Im} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} f_p.$$

Q5. Montrer que la famille $(I, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre.

Soit i un élément de $[\![1, p]\!]$. Montrer qu'il existe un unique élément P_i de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $f_i = P_i(f)$.

Exercice 23 **Transvection**.

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

φ est une forme linéaire non nulle sur E $\big(\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\big)$. H est son noyau. a est un élément non nul de H.

Pour tout élément x de E on pose :

$$f(x) = x + \varphi(x)a.$$

Q1. Montrer que f est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.

Q2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et un scalaire λ non nul tels que : $f(e_i) = e_i$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = \lambda e_1 + e_n$.

Envisager une réciproque.

Q3. Montrer que les sous-espaces de E stables par f sont les sous-espaces de E contenant a ou contenu dans H.

Exercice 24 **Majoration de la dimension du noyau d'une composée d'endomorphismes.**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 1$. Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes de E.

Q1. En considérant la restriction de f_1 au noyau de $f_2 \circ f_1$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

Q2. Généraliser le résultat précédent à p endomorphismes de E, $f_1, \ldots, f_p$, avec $p \geqslant 2$.

Exercice 25 **Isomorphisme**

E est l'ensemble des applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = f(\sqrt{x})$$

F est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f(x/2)$$

Q1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles.

Q2. A tout élément f de E on associe l'application $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = f(e^x).$$

Montrer que l'application φ qui à f élément de E associe $\varphi(f)$ est un isomorphisme de E sur F.

Exercice 26 **Inverse à droite**

f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E telles que $f \circ g = Id_{E'}$.

Q1. Préciser $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.

Q3. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Q4. Que dire dans le cas où E et E' ont même dimension finie n ?

Q5. Donner un exemple où $g \circ f$ n'est pas Id_E (on pourra chercher du côté de la dérivation et de l'intégration des polynômes).