ESPACES VECTORIELS

ESPACES VECTORIELS

P mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des espaces vectoriels, souvent oubliés...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes.

I GÉNÉRALITÉS

▸ 1. Définition

Déf. 1 On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tout triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble, $+$ une loi interne sur E et $\cdot$ une loi externe sur E à opérateurs dans $\mathbb{K}$ tels que :

1. $+$ est associative dans E.
2. E possède un élément neutre pour $+$ noté 0_E.
3. Tout élément u de E possède un (unique) symétrique pour $+$ dans E noté $-u$.
4. $+$ est commutative dans E.

5. Pour tout u dans $E : 1\cdot u = u$.
6. Pour tout (α,β) dans $\mathbb{K}^2$ et tout u dans $E : \alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\beta)\cdot u$.
7. Pour tout (α,β) dans $\mathbb{K}^2$ et tout u dans $E : (\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot u$.
8. Pour tout α dans $\mathbb{K}$ et tout (u,v) dans $E^2 : \alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$.

Si $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ les éléments de E sont appelés **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

Dans la suite nous parlerons le plus souvent du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E au lieu du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ et nous écrirons $\alpha\, u$ à la place de $\alpha.u$.

▸ 2. Règles de calcul dans un espace vectoriel

Prop. 1 α et β sont deux éléments de $\mathbb{K}$ et u et v sont deux éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. $\alpha 0_E = 0_E$
2. $0u = 0_E$
3. $\boxed{\alpha u = 0_E \text{ si et seulement si } \alpha = 0 \text{ ou } u = 0_E}$.
4. $(-1)u = -u$

4'. $(-\alpha)u = -\alpha u$

5. $(\alpha-\beta)u = \alpha u - \beta u$
6. $\alpha(u-v) = \alpha u - \alpha v$.

II SOUS-ESPACES VECTORIELS

▸ 1. Définition

Déf. 2 $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E.
F est **un sous-espace vectoriel** de $(E,+,\cdot)$ si F est stable pour $+$ et $\cdot$ et si muni des lois induites F possède une structure d'espace vectoriel.

▶ 2. Caractérisations

Th. 1 **P** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) F est un sous-espace vectoriel de E.

ii) F est non vide et stable par $+$ et $\cdot$

ii') - F est non vide

- $\forall (u,v)\in F^2,\ u+v\in F$

- $\forall u\in F, \forall \alpha\in\mathbb{K},\ \alpha u\in F$

iii) - F est non vide

- $\forall (u,v)\in F^2, \forall \alpha\in\mathbb{K},\ \alpha u+v\in F$

▶ 3. Intersection de sous-espaces vectoriels

Prop. 2 L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

III SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE.

▶ 1. Notion de combinaison linéaire

Déf. 3 $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Un élément u de E est **combinaison linéaire** de la famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ s'il existe $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)$ dans $\mathbb{K}^p$ tel que :

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_pu_p=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,u_k$$

α_1, α_2,.., α_p sont les coefficients de la combinaison linéaire.

▶ 2. Définition

Th. 2 et **déf. 4** $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une famille d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les éléments de la famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$.

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, qui contient u_1, u_2, ..., u_p.

On le note $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\dots,u_p)$; on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$.

▶ 3. Propriétés

Th. 3 **P** On ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ d'éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :

a) En permutant les vecteurs de la famille.

b) En supprimant un vecteur de la famille combinaison linéaire des autres.

c) En multipliant un vecteur de la famille par un scalaire non nul.

d) En remplaçant un vecteur par une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la famille pourvu que le coefficient de ce vecteur dans la combinaison linéaire ne soit pas nul.

IV FAMILLES GÉNÉRATRICES

Déf. 5 Soit F un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de E est une **famille génératrice** de F si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est F.

Prop. 3 Soit F un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de E est une famille génératrice de F si et seulement si :

1. Tous les éléments de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ sont dans F
2. Tout élément de F est combinaison linéaire de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

V FAMILLES LIBRES ET FAMILLES LIÉES

▸ 1. Définition

Déf. 6 $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **famille libre** si :

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

Dans ce cas on dit encore que les vecteurs de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ sont **linéairement indépendants**.

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **famille liée** d'éléments si elle n'est pas libre autrement dit si :

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq 0_{\mathbb{K}^p}.$$

Dans ce cas on dit encore que les vecteurs de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ sont **linéairement dépendants**.

P "Concrètement" $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre si une combinaison linéaire de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ égale à 0_E a nécessairement tous ses coefficients nuls.

2. $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est liée s'il existe une combinaison linéaire de cette famille égale à 0_E dont au moins un coefficient n'est pas nul.

▸ 2. Caractérisations

Th. 4 $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille libre.

ii) Tout élément de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est de manière unique combinaison linéaire de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Th. 5 $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille liée.

ii) Un des vecteurs de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est combinaison linéaire des autres.

▶ 3. Propriétés

Prop. 4 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Toute famille d'éléments de E contenant 0_E est liée.
- Une famille libre d'éléments de E ne contient pas le vecteur nul.
- Si v est un élément de E, (v) est libre si et seulement si v est différent de 0_E.
- Toute famille d'éléments de E contenant deux vecteurs égaux est liée.
- Une famille libre d'éléments de E a tous ses vecteurs distincts.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

VI BASES

▶ 1. Définitions

Déf. 7 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'éléments de E est une **base de** E si tout élément de E est de manière unique combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Déf. 8 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si u est un élément de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que : $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est la **famille des coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On dit encore que α_1, α_2, ..., α_n (ou $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$!) sont **les coordonnées** ou les composantes de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

▶ 2. Caractérisation

Th. 6 E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

▶ 3. Quatre théorèmes fondamentaux

Th. 7 $\boxed{\text{P}}$ **Théorème de la base incomplète**.

Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel peut être complétée en une base.

Th. 8 Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel <u>non réduit au vecteur</u> nul possède une base.

Th. 9 1. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E le cardinal d'une famille libre de E est inférieur au cardinal d'une base de E.

2. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E le cardinal d'une famille génératrice de E est supérieur au cardinal d'une base de E.

Th. 10 Deux bases d'un même espace vectoriel ont même cardinal.

VII DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

▶ 1. Définition

Déf. 9 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La **dimension** de E sur $\mathbb{K}$ est zéro si $E = \{0_E\}$, le cardinal commun à toutes les bases de E si $E \neq \{0_E\}$.

On la note $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

Déf. 10 Un espace vectoriel est de type fini ou de **dimension finie** s'il est réduit au vecteur nul ou s'il possède une base finie.

▶ 2. Caractérisation des bases en dimension finie

Th. 11 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille d'éléments de E ($p \in \mathbb{N}^*$).

Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre : $p \leqslant n$.

Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice : $p \geqslant n$.

Th. 12 **P** E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\boxed{\text{n}}$ non nulle et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E de cardinal $\boxed{\text{n}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E.

ii) $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre de E.

iii) $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E.

▶ 3. Dimension et sous-espaces

Th. 13 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E. Alors $\dim F \leqslant \dim E$.

Th. 14 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de <u>dimension finie</u> n et F un sous-espace de E.

1. F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
2. **P** Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
3. **P** Soit G un second sous-espace vectoriel de E.

$$\boxed{\text{Si } F \subset G \text{ et si } \dim F = \dim G \text{ alors } F = G}.$$

Déf. 11 Un sous-espace vectoriel de dimension 1 s'appelle une **droite vectorielle**.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 s'appelle un **plan vectoriel**.

Dans un espace vectoriel de dimension n non nulle, un sous-espace de dimension $n-1$ s'appelle un **hyperplan**. Plus généralement un hyperplan est un sous-espace vectoriel qui possède un supplémentaire de dimension 1.

▶ 4. Rang d'une famille de vecteurs

Déf. 12 Le **rang d'une famille finie de vecteurs** $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

$$\boxed{\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)}.$$

Nécessairement le rang de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est inférieur ou égal à p.

VIII HYPERPLANS

▶ 1. Définition

Déf. 13 Dans un espace vectoriel de dimension n non nulle, un sous-espace de dimension $n-1$ s'appelle un **hyperplan**. Plus généralement un hyperplan est un sous-espace vectoriel qui possède un supplémentaire de dimension 1.

▶ 2. Equations d'un hyperplan

Th. 15 et **déf. 14** n est dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Si $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ $\boxed{\text{non tous nuls}}$.

$H=\{x_1\,e_1+x_2\,e_2+\cdots+x_n\,e_n\in E \mid a_1\,x_1\ +a_2\,x_2\ +\cdots+a_n\,x_n=0\}$ est un hyperplan.

2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E. Il existe une famille $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$, non tous nuls, telle que $H=\{x_1\,e_1+x_2\,e_2+\cdots+x_n\,e_n\in E \mid a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n=0\}$.

$a_1\,x_1+a_2\,x_2+\cdots+a_n\,x_n=0$ est une **équation de H dans la base** $\mathcal{B}$.

Si λ est un élément non nul de $\mathbb{K}$, $(\lambda\,a_1)\,x_1+(\lambda\,a_2)\,x_2+\cdots+(\lambda\,a_n)\,x_n=0$ est encore une équation de H dans la base $\mathcal{B}$.

Si $a'_1\,x_1+a'_2\,x_2+\cdots+a'_n\,x_n=0$ est encore une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ alors il existe un élément non nul μ de $\mathbb{K}$ tel que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ a'_k=\mu\,a_k$.

IX SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES

Déf. 15 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E.

La **somme de F et G** est l'ensemble des éléments de E somme d'un élément de F et d'un élément de G. On la note $F+G$.

$$\boxed{F+G=\{u\in E \mid \exists(v,w)\in F\times G,\ u=v+w\}=\{v+w \mid v\in F \text{et } w\in G\}}$$

Th. 16 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

2. $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient F et G.

Prop. 5 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, non réduits au vecteur nul.

$\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) est une base de F (resp. G).

"$\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$" est une famille génératrice de $F+G$.

Th. 17 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E.

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G.$$

Ou en dimension finie :

$$\boxed{\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)}.$$

X SOMME DIRECTE DE DEUX SOUS-ESPACES

▶ 1. Définition

Déf. 16 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

F et G sont en **somme directe** si tout élément de $F+G$ est de manière $\boxed{\text{unique}}$ somme d'un élément de F et de G.

Si F et G sont en somme directe on écrit $F+G = F \oplus G$.

▶ 2. Caractérisations

Th. 18 $\boxed{\boxed{\text{P}}}$ F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) F et G sont en somme directe.

i') Tout élément de $F+G$ est de manière unique somme d'un élément de F et de G.

i") $\forall w \in F+G,\ \exists\,!\,(u,v) \in F \times G,\ w = u+v$.

ii) $\boxed{\forall (u,v) \in F \times G,\ u+v = 0_E \Rightarrow\ u = v = 0_E}$.

iii) $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$.

Th. 19 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, non réduits au vecteur nul.

$\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) est une base de F (resp. G).

F et G sont en somme directe si et seulement si "$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$" est une famille libre de $F+G$.

F et G sont en somme directe si et seulement si "$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$" est une base de $F+G$.

Th. 20 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{\boxed{\text{P}}}$ Si F et G sont en somme directe : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

2. <u>Si E est de dimension finie</u> : F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

XI SOMME ET SOMME DIRECTE DE p SOUS-ESPACES

Deuxième année

▶ 1. Définitions

Déf. 17 F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

La **somme de** F_1**,** F_2**, ...,** F_p est l'ensemble des éléments de E somme d'un élément de F_1, d'un élément de F_2, ..., d'un élément de F_p.

On la note $F_1 + F_2 \cdots + F_p$ ou $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$.

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_p = \{u \in E \mid\ \exists (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ u = u_1 + u_2 + \cdots + u_p\}.$$

Th. 21 F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F_1, F_2, ..., F_p.

1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient F_1, F_2, ..., F_p.

Déf. 18 F_1, F_2,...,F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

F_1, F_2,...,F_p sont en somme directe si tout élément de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est de manière $\boxed{\text{unique}}$ somme d'un élément de F_1, d'un élément de F_2, ..., d'un élément de F_p

On écrit alors $F_1 + F_2 + \cdots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

▶ 2. Caractérisations

Th. 22 $\boxed{\textbf{SD}}$ F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe.

i') Tout élément de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est de manière unique somme d'un élément de F_1, F_2, ..., F_p.

i") $\forall u \in F_1 + F_2 + \cdots + F_p,\ \exists\,!\ (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ u = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$.

ii) $\boxed{\textbf{P}}$

$$\boxed{\forall (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 0_E \Rightarrow\ u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E.}$$

iii) Pour tout k dans $[\![1, p-1]\!]$: $F_1 + F_2 + \cdots + F_k \cap F_{k+1} = \{0_E\}$.

★ $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \{0_E\}$ ne suffit pas pour dire que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe.

★ $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_p = \{0_E\}$ ne suffit pas pour dire que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe.

Th. 23 F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_{F_k}$ est une base de F_k.

$\boxed{\textbf{P}}$ F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe si et seulement si "$\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{F_p}$" est une famille libre de la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$.

F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe si et seulement si "$\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{F_p}$" est une base de la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$.

Th. 24 F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1. F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe alors $\dim \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim F_k$.

2. Si $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$. F_1, F_2, ..., F_p sont en somme directe $\boxed{\text{si et seulement si}}$ $\dim \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim F_k$.

XII SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

▶ 1. Définition

Déf. 19 Deux sous-espaces vectoriels F et G de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ sont **supplémentaires** si tout élément de E est de manière unique somme d'un élément de F et de G.

▶ 2. Caractérisations

Th. 25 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

i') Tout élément de E est de manière unique somme d'un élément de F et de G.

i") $\forall w \in E,\ \exists\,!\ (u, v) \in F \times G,\ w = u + v$.

ii) $E = F \oplus G$.

iii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

Th. 26 F et G sont deux sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

$\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) est une base de F (resp. G).

P F et G sont supplémentaires si et seulement si "$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$" est une base de E.

Th. 27 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

On suppose que <u>E est de dimension finie</u>.

P F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim E = \dim F + \dim G.$$

▸ 3. Existence et construction d'un supplémentaire

Th. 28 Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède au moins un supplémentaire.

Th. 29 P F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On suppose que E est de dimension n, que F n'est ni E ni $\{0_E\}$ et que $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de F.

Si $(u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n)$ est une famille d'éléments de E qui complète $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ en une base de E alors $G = \mathrm{Vect}(u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n)$ est un supplémentaire de F dans E.

XIII DES RÉSULTATS QU'IL CONVIENT DE RAPPELER

▸ 1. Suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2

Th. 30 a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_\mathbb{K}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$.

1. $\mathcal{S}_\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{S}_\mathbb{K}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

Th. 31 a et b sont deux éléments de $\mathbb{C}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_\mathbb{C}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de complexes telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. Si Δ n'est pas nul l'équation admet deux solutions z_1 et z_2. $\Big((z_1^n), (z_2^n)\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_\mathbb{C}$.

2. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule z. $\Big((z^n)_{n\geqslant 0}, (nz^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_\mathbb{C}$.

Th. 32 a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$. On suppose b non nul.

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Δ est le discriminant de l'équation : $\boxed{z \in \mathbb{C}}$ et $z^2 - az - b = 0$.

1. Si Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions réelles r_1 et r_2. $\Big((r_1^n)_{n\geqslant 0}, (r_2^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

2. Si Δ est nul l'équation admet une solution et une seule r. $\Big((r^n)_{n\geqslant 0}, (nr^n)_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

3. Si Δ est strictement négatif l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ $\Big((\rho^n \sin(n\theta))_{n\geqslant 0}, (\rho^n \cos(n\theta))_{n\geqslant 0}\Big)$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

► 2. L'équation différentielle $y' + ay = 0$

Th. 33 a est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications dérivables f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)\, f(x) = 0$.

• $\mathcal{S}$ est une droite vectorielle de l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$.

• Si A est une primitive de a sur I, (e^{-A}) est une base de $\mathcal{S}$.

XIV SAVOIR FAIRE

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'un famille d'éléments d'un espace vectoriel est libre (resp. liée ; resp. génératrice).
- Simplifier le sous-espace vectoriel engendré par une famille. En trouver une base.
- Montrer qu'un famille d'éléments d'un espace vectoriel est une base de cet espace.
- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Trouver une base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Utiliser la caractérisation des bases en dimension finie.
- Utiliser le théorème de la base incomplète.
- Extraire une base d'une famille génératrice.
- Montrer que deux ou p sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension quelconque sont supplémentaires.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

XV COMPLÉMENTS

► 1. Montrer "économiquement" qu'un ensemble est un espace vectoriel.

P Pour montrer qu'un "ensemble" H est un espace vectoriel il suffit de trouver un espace vectoriel E contenant H et tel que H soit un sous-espace vectoriel de E.

► 2. Des dimensions classiques

1. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

2. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

3. Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions respectives p et q sur $\mathbb{K}$: $E \times E'$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\boxed{\text{p+q}}$. $\boxed{\dim(E \times E') = \dim E + \dim E'}$

4. E_1, E_2, ..., E_p sont p espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. $\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \dim E_1 + \dim E_2 + \cdots + \dim E_p$

5. Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $\dim \mathcal{L}(E, E') = \dim E \times \dim E'$

6. $\boxed{\dim \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = pq}$ $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2}$ $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = n}$ $\boxed{\dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) = n}$

7. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $\boxed{\text{n+1}}$ sur $\mathbb{K}$.

8. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et 1 sur $\mathbb{C}$!

► 3. Des bases classiques de $\mathbb{K}_n[X]$

Prop. 6 Si P_1, P_2, ..., P_r sont r éléments $\boxed{\text{non nuls}}$ de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts alors $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Si P_0, P_1, ..., P_n sont n éléments $\boxed{\text{non nuls}}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts alors $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Prop. 7 n est dans $\mathbb{N}$ et P_0, P_1, ..., P_n sont $n+1$ éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$.

$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ et une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Prop. 8 n est dans $\mathbb{N}$ et a est un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\big(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $\left(P(a), P'(a), \dfrac{P''(a)}{2!}, \ldots, \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$

C'est la formule de Taylor !.

Prop. 9 n est dans $\mathbb{N}^*$. a et b sont deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.

$\Big((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), (X-a)^{n-2}(X-b)^2, \ldots, (X-a)(X-b)^{n-1}, (X-b)^n\Big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Prop. 10 **Polynômes d'interpolation de Lagrange**.

SD n est dans $\mathbb{N}^*$. x_0, x_1, ..., x_n sont $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

1. Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, il existe un unique élément L_k de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}.$$

Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $L_k = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)} \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (X - x_j)$.

2. $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Si P est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$ ses coordonnées dans cette base sont $\big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big)$.

3. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = \alpha_i$. $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$

▶ 4. Famille liée

Prop. 11 $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que $(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1})$ soit libre.

$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée si et seulement si u_p est combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1})$.

Prop. 12 Si tous les éléments d'une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_{r+1})$ de $r+1$ vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont combinaison linéaire de r vecteur alors cette famille est liée.

▶ 5. Extraction de base

Prop. 13 De toute famille génératrice d'un espace vectoriel non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.

▶ 6. Réunion de deux sous-espaces vectoriels

Prop. 14 1. En général la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace.

2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

▶ 7. Intersection d'hyperplans

Prop. 15 1. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ alors $H_1 \cap H_2$ est de dimension $n-2$.

2. Si H_1, H_2, ..., H_p sont p hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ alors

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \geqslant n - p$$

.

Prop. 16 F est un sous espace vectoriel de dimension p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

Si F est distinct de E, F est l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.

▶ 8. Récurrences linéaires d'ordre p.

Prop. 17 p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et a_0, a_1 ,..., a_{p-1} sont p éléments de $\mathbb{K}$.

L'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui vérifient

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+p}=a_0\,u_n+a_1\,u_{n+1}+a_2\,u_{n+2}+\cdots+a_{p-1}\,u_{n+p-1}$$

est un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension } p}$ sur $\mathbb{K}$.

XVI DES PHRASES DE RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

▸ 1. Famille libre

Pour montrer que $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est une famille libre de E.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p$ $\boxed{\text{tel que}}$ $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_pu_p=0_E$. Montrons que : $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$

Pour savoir si une famille $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ de vecteurs de E est libre ou liée.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p$ $\boxed{.}$ $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_pu_p=0_E$ $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $\cdots$.

▸ 2. Sous-espaces supplémentaires

Soit à montrer que deux sous-espaces F et G de E sont supplémentaires.

Analyse-unicité Soit u un élément de E. $\boxed{\text{SUPPOSONS}}$ que $u=v+w$ avec v dans F et w dans G. On exprime alors v et w en fonction de u. On obtient : $v=\varphi(u)$ et $w=\psi(u)$.

Synthèse-existence Soit u un élément de E. $\boxed{\text{POSONS}}$ $v=\varphi(u)$ et $w=\psi(u)$. On montre alors que : $u=v+w$, $v\in F$ et $w\in G$.

XVII DES ERREURS À NE PAS FAIRE.

★ u est un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et λ est un scalaire. Ecrire $\dfrac{u}{\lambda}$ ou $u\lambda$.

★ Confondre un vecteur avec ses coordonnées (ou la matrice de ses coordonnées) dans une base.

Par exemple arriver à

- $F=\mathrm{Vect}\Big((1,0,-1),(2,-3,4)\Big)$ lorsque F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui n'est pas $\mathbb{K}^3$.
- $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ lorsque f est une application linéaire dont l'espace vectoriel de départ n'est pas $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

★ F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E : $F\cap G=\emptyset$.

★ (u,v) liée équivaut à : $\exists\lambda\in\mathbb{K},\ y=\lambda x$.

★ La somme $F_1+F_2+\cdots+F_p$ est directe car $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_p=\{0_E\}$.

★ La somme $F_1+F_2+\cdots+F_p$ est directe car $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow F_i\cap F_j=\{0_E\}$.

★ $E = F \oplus G$. Soit x un élément de E.

- x appartient à F ou à G ...
- Comme x n'appartient pas à F alors x appartient à G.

En clair confondre G avec le complémentaire de F.