

# ESPACES VECTORIELS

## I GÉNÉRALITÉS

1. Définition
2. Règles de calcul dans un espace vectoriel

## II SOUS-ESPACES VECTORIELS

1. Définition
2. Caractérisations
3. Intersection de sous-espaces vectoriels

## III SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE

1. Notion de combinaison linéaire
2. Définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille
3. Propriétés

## IV FAMILLES GÉNÉRATRICES

1. Définition
2. Propriétés

## V FAMILLES LIBRES ET FAMILLES LIÉES

1. Définition
2. Caractérisations
3. Propriétés

## VI BASES

0. Cardinal d'une famille d'éléments d'un ensemble
1. Définitions
2. Caractérisation
3. Quatre résultats théoriques fondamentaux
4. La base canonique de  $\mathbb{K}^n$

## VII DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

1. Définition
2. Caractérisation des bases en dimension finie
3. Dimension et sous-espaces vectoriel
4. Rang d'une famille de vecteurs

**VIII HYPERPLANS**

1. Définition
2. Equations d'un hyperplan

**IX SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS**

1. Définition
2. Propriétés

**X SOMME DIRECTE DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS**

1. Définition
2. Caractérisations

**XI SOMME ET SOMME DIRECTE DE  $p$  SOUS-ESPACES VECTORIELS**

1. Définitions
2. Caractérisations

**XII SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES**

1. Définition
2. Caractérisations
3. Pratiquement
4. Existence et construction d'un supplémentaire

**XIII SAVOIR FAIRE****XIV COMPLÉMENTS**

1. Montrer "économiquement" qu'un ensemble est un espace vectoriel
2. Des dimensions classiques
3. Des bases classiques de  $\mathbb{K}_n[X]$
4. Famille liée
5. Extraction de base
6. Réunion de deux sous-espaces vectoriels
7. Intersection d'hyperplans
8. Suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2
9. Récurrences linéaires d'ordre  $p$
10. L'équation différentielle  $y' + ay = 0$

**XV DES PHRASES DE RHÉTORIQUES TOUTES FAITES****XVI DES ERREURS À NE PAS FAIRE**

# ESPACES VECTORIELS

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

**P** Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des espaces vectoriels, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

**SD** Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit  $\mathbb{K}$  est le corps des réels ou des complexes.

## I GÉNÉRALITÉS

### ► 1. Définition

**Déf. 1** On appelle **espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$**  (ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) tout triplet  $(E, +, \cdot)$  où  $E$  est un ensemble,  $+$  une loi interne sur  $E$  et  $\cdot$  une loi externe sur  $E$  à opérateurs dans  $\mathbb{K}$  tels que :

1.  $+$  est associative dans  $E$ .
2.  $E$  possède un élément neutre pour  $+$  noté  $0_E$ .
3. Tout élément  $u$  de  $E$  possède un (unique) symétrique pour  $+$  dans  $E$  noté  $-u$ .
4.  $+$  est commutative dans  $E$ .
5. Pour tout  $u$  dans  $E$  :  $1 \cdot u = u$ .
6. Pour tout  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{K}^2$  et tout  $u$  dans  $E$  :  $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ .
7. Pour tout  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{K}^2$  et tout  $u$  dans  $E$  :  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ .
8. Pour tout  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$  et tout  $(u, v)$  dans  $E^2$  :  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ .

Si  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  **scalaires**.

Dans la suite nous parlerons le plus souvent du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  au lieu du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  et nous écrirons  $\alpha u$  à la place de  $\alpha \cdot u$ . Nous écrirons également  $u - v$  à la place de  $u + (-v)$ .

### ► 2. Règles de calcul dans un espace vectoriel

**Prop. 1**  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments de  $\mathbb{K}$  et  $u$  et  $v$  sont deux éléments du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1.  $\alpha 0_E = 0_E$ .
2.  $0 u = 0_E$ .
3.  $\alpha u = 0_E$  si et seulement si  $\alpha = 0$  ou  $u = 0_E$ .
4.  $(-1)u = -u$ .
- 4'.  $(-\alpha)u = -\alpha u$ .
5.  $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$ .
6.  $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ .

---

## II SOUS-ESPACES VECTORIELS

---

### ► 1. Définition

**Déf. 2**  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  une partie de  $E$ .  
 $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $(E, +, \cdot)$  si  $F$  est stable pour  $+$  et  $\cdot$  et si muni des lois induites  $F$  possède une structure d'espace vectoriel.

### ► 2. Caractérisations

**Th. 1** **P**  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  une partie de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i)  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- ii)  $F$  est non vide et stable par  $+$  et  $\cdot$ .
- ii') -  $F$  est non vide ;
  - $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$  ;
  - $\forall u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u \in F$ .
- iii) -  $F$  est non vide ;
  - $\forall (u, v) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u + v \in F$ .

**P** Le plus souvent on utilise iii) pour montrer qu'une partie  $F$  d'un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel  $E$  est un sous-espace de  $E$ .

**P** Pour montrer qu'une partie  $F$  de  $E$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  on peut par exemple :

- Montrer que  $0_E$  n'appartient pas à  $F$ .
- **Exhiber**  $\lambda$  dans  $K$  et  $u$  dans  $F$  tel que  $\lambda u$  n'appartient pas à  $F$ .
- **Exhiber**  $u$  et  $v$  dans  $F$  tel que  $u + v$  n'appartient pas à  $F$ .

### ► 3. Intersection de sous-espaces vectoriels

**Prop. 2** L'intersection d'une famille (non vide!) de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

---

## III SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE

---

### ► 1. Notion de combinaison linéaire

**Déf. 3**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
 Un élément  $u$  de  $E$  est **combinaison linéaire** de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  s'il existe  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  dans  $\mathbb{K}^p$  tel que :

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  sont les coefficients de la combinaison linéaire.

## ► 2. Définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille

**Th. 2 et déf. 4**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les éléments de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$ , au sens de l'inclusion, qui contient  $u_1, u_2, \dots, u_p$ .

On le note  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ; on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

## ► 3. Propriétés

**Prop. 3** **P** On ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  d'éléments du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ :

- En permutant les vecteurs de la famille.
- En supprimant un vecteur de la famille combinaison linéaire des autres.
- En multipliant un vecteur de la famille par un scalaire **non nul**.
- En remplaçant un vecteur par une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la famille pourvu que le coefficient de ce vecteur dans la combinaison linéaire ne soit pas nul.

# IV FAMILLES GÉNÉRATRICES

## ► 1. Définition

**Déf. 5** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  d'éléments de  $E$  est une **famille génératrice** de  $F$  si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est  $F$ .

## ► 2. Propriétés

**Prop. 4** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  d'éléments de  $E$  est une famille génératrice de  $F$  si et seulement si :

- Tous les éléments de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  sont dans  $F$ .
- Tout élément de  $F$  est combinaison linéaire de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

★ On n'oubliera pas dans la pratique de vérifier le premier point... sauf si c'est une évidence.

# V FAMILLES LIBRES ET FAMILLES LIÉES

## ► 1. Définition

**Déf. 6**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une **famille libre** si :

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Dans ce cas on dit encore que les vecteurs de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  sont **linéairement indépendants**.

**Déf. 7**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une **famille liée** d'éléments si elle n'est pas libre autrement dit si :

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq 0_{\mathbb{K}^p}.$$

Dans ce cas on dit encore que les vecteurs de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  sont **linéairement dépendants**.

**P** "Concrètement"  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1.  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre si une combinaison linéaire de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  égale à  $0_E$  a nécessairement tous ses coefficients nuls.

2.  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est liée s'il existe une combinaison linéaire de cette famille égale à  $0_E$  dont au moins un coefficient n'est pas nul.

## ► 2. Caractérisations

**Th. 3**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i)  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille libre.

ii) Tout élément de  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est de manière unique combinaison linéaire de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

Ce théorème exprime la philosophie et l'intérêt de la notion de famille libre.

**Cor.** **P**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille libre d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  et  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  sont deux éléments de  $\mathbb{K}^n$ .

$$\text{Si } \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^p \beta_k u_k \text{ alors } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_k = \beta_k.$$

★ Il est essentiel avant d'appliquer ce résultat de mentionner la liberté de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

**Th. 4**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i)  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille liée.

ii) **Un** des vecteurs de la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est combinaison linéaire des autres.

**Prop. 5**  $(u, v)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i)  $(u, v)$  est une famille liée.

ii)  $u = 0_E$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{K}, v = \lambda u$ .

ii)  $v = 0_E$  ou  $\exists \lambda' \in \mathbb{K}, u = \lambda' v$ .

★ On évitera de dire directement que si  $(u, v)$  est une famille liée alors  $\exists \lambda \in \mathbb{K}, v = \lambda u$  (resp.  $\exists \lambda' \in \mathbb{K}, u = \lambda' v$ ).

**Prop. 6**  $(u_1, u_2, \dots, u_{p+1})$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On suppose que  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- i)  $(u_1, u_2, \dots, u_{p+1})$  est une famille libre.
- ii)  $u_{p+1}$  n'est pas combinaison linéaire de  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

### ► 3. Propriétés

**Prop. 7**  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- Toute famille d'éléments de  $E$  contenant  $0_E$  est liée.
- Une famille libre d'éléments de  $E$  ne contient pas le vecteur nul.
- Si  $v$  est un élément de  $E$ ,  $(v)$  est libre si et seulement si  $v$  est différent de  $0_E$ .
- Toute famille d'éléments de  $E$  contenant deux vecteurs égaux est liée.
- Une famille libre d'éléments de  $E$  a tous ses vecteurs distincts.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

## VI BASES

### ► 0. Cardinal d'une famille d'éléments d'un ensemble

**Déf. 8** Soit  $(h_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments d'un ensemble quelconque.

**Le cardinal de la famille**  $(h_i)_{i \in I}$  est le cardinal de son ensemble d'indexation donc ici c'est le cardinal de l'ensemble  $I$ .

Dans le cas particulier où  $I = \llbracket 1, p \rrbracket$ , la famille se note souvent  $(h_1, h_2, \dots, h_p)$  et son cardinal est  $p$ .

★ On évitera de confondre le cardinal de la famille  $(h_i)_{i \in I}$  avec le cardinal de l'ensemble  $\{h_i ; i \in I\}$ .

### ► 1. Définitions

**Déf. 9**  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Une famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  d'éléments de  $E$  est une **base de**  $E$  si tout élément de  $E$  est de manière unique combinaison linéaire de la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

**Déf. 10** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Soit  $u$  est un élément de  $E$ , il existe un unique  $n$ -uplet  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  tel que :

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est la **famille des coordonnées** de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

On dit encore que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (ou  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  !) sont **les coordonnées** ou les composantes de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée (ou composée) de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

### ► 2. Caractérisation

**Th. 5**  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Une famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  d'éléments de  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de  $E$ .

### ► 3. Quatre résultats théoriques fondamentaux

**Th. 6** P **Théorème de la base incomplète.**

Toute famille libre d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel peut être complétée en une base.

**Th. 7** Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **non réduit au vecteur nul** possède une base.

**Th. 8**

1. Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  le cardinal d'une famille libre de  $E$  est inférieur au cardinal d'une famille génératrice de  $E$ .
2. Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  le cardinal d'une famille libre de  $E$  est inférieur au cardinal d'une base de  $E$ .
3. Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  le cardinal d'une famille génératrice de  $E$  est supérieur au cardinal d'une base de  $E$ .

**Th. 9** Deux bases d'un même espace vectoriel ont même cardinal.

Le programme nous propose ces quatre résultats uniquement dans des espaces vectoriels admettant une famille génératrice finie...

### ► 4. La base canonique de $\mathbb{K}^n$

**Th. 10 et déf. 11** Pour tout  $i$  dans  $[1, n]$ ,  $e_i$  est l'élément de  $\mathbb{K}^n$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $i^{\text{ème}}$  qui vaut 1.

1.  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ .
2. La famille des coordonnées dans la base canonique d'un élément  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  est  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

## VII DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

### ► 1. Définition

**Déf. 12** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . La **dimension** de  $E$  sur  $\mathbb{K}$  est zéro si  $E = \{0_E\}$  et c'est le cardinal commun à toutes les bases de  $E$  si  $E \neq \{0_E\}$ .

On la note  $\dim_{\mathbb{K}} E$  ou  $\dim E$  s'il n'y a aucune ambiguïté sur  $\mathbb{K}$ .

**Déf. 13** Un espace vectoriel est de type fini ou de **dimension finie** si sa dimension est finie donc s'il est réduit au vecteur nul ou s'il possède une base finie.

**Prop. 8** Un espace vectoriel est de type fini ou de dimension finie si et seulement si il est réduit au vecteur nul ou s'il possède une famille génératrice finie.

### ► 2. Caractérisation des bases en dimension finie

**Th. 11**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille d'éléments de  $E$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ).

Si la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre :  $p \leq n$ .

Si la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est génératrice :  $p \geq n$ .



**Th. 12** PP  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille d'éléments de  $E$  de cardinal  $n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i)  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .
- ii)  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une famille libre de  $E$ .
- iii)  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une famille génératrice de  $E$ .

### ► 3. Dimension et sous-espaces vectoriels

**Th. 13**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace de  $E$ . Alors  $\dim F \leq \dim E$ .

**Th. 14**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**  $n$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .

1.  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .
2. P Si  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .
3. P Soit  $G$  un second sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $F \subset G$  et si  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

★★ L'hypothèse  $E$  est de dimension finie est ici essentielle et on n'oubliera pas de la mentionner lorsque l'on utilisera ces résultats.

**Déf. 14** Un sous-espace vectoriel de dimension 1 s'appelle une **droite vectorielle**.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 s'appelle un **plan vectoriel**.

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle, un sous-espace de dimension  $n - 1$  s'appelle un **hyperplan**. Plus généralement un hyperplan est un sous-espace vectoriel qui possède un supplémentaire de dimension 1.

### ► 4. Rang d'une famille de vecteurs

**Déf. 15** Le **rang d'une famille finie de vecteurs**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p).$$

Nécessairement le rang de  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est inférieur ou égal à  $\text{Min}(p, \dim E)$ .

## VIII HYPERPLANS

### ► 1. Définition

**Déf. 16** Dans un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle, un sous-espace de dimension  $n - 1$  s'appelle un **hyperplan**. Plus généralement un hyperplan est un sous-espace vectoriel qui possède un supplémentaire de dimension 1.

## ► 2. Equations d'un hyperplan

**Th. 15 et déf. 17**  $n$  est dans  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Si  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  non tous nuls.

$H = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in E \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$  est un hyperplan.

2. Réciproquement, soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Il existe une famille  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ , non tous nuls, telle que  $H = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in E \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$ .

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$  est une **équation de H dans la base  $\mathcal{B}$** .

Si  $\lambda$  est un élément non nul de  $\mathbb{K}$ ,  $(\lambda a_1) x_1 + (\lambda a_2) x_2 + \dots + (\lambda a_n) x_n = 0$  est encore une équation de  $H$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Si  $a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \dots + a'_n x_n = 0$  est encore une équation de  $H$  dans la base  $\mathcal{B}$  alors il existe un élément non nul  $\mu$  de  $\mathbb{K}$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a'_k = \mu a_k$ .

## IX SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

### ► 1. Définition

**Déf. 18**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

La **somme de F et G** est l'ensemble des éléments de  $E$  somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ . On la note  $F + G$ .

$$F + G = \{u \in E \mid \exists (v, w) \in F \times G, u = v + w\} = \{v + w \mid v \in F \text{ et } w \in G\}.$$

### ► 2. Propriétés

**Th. 16** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1.  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $F$  et  $G$ .
2.  $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  (au sens de l'inclusion) qui contient  $F$  et  $G$ .

**Prop. 9**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , non réduits au vecteur nul.

$\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_G$ ) est une base de  $F$  (resp.  $G$ ).

" $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une famille génératrice de  $F + G$ .

**Th. 17**  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Ou en dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

## X SOMME DIRECTE DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

### ► 1. Définition

**Déf. 19**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

$F$  et  $G$  sont en **somme directe** si tout élément de  $F + G$  est de manière unique somme d'un élément de  $F$  et de  $G$ .

Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe on écrit  $F + G = F \oplus G$ .

### ► 2. Caractérisations

**Th. 18** P  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i)  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

i') Tout élément de  $F + G$  est de manière unique somme d'un élément de  $F$  et de  $G$ .

ii)  $\forall w \in F + G, \exists ! (u, v) \in F \times G, w = u + v$ .

ii)  $\forall (u, v) \in F \times G, u + v = 0_E \Rightarrow u = v = 0_E$ .

iii)  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Th. 19**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , non réduits au vecteur nul.

$\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_G$ ) est une base de  $F$  (resp.  $G$ ).

1.  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si " $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une famille libre de  $F + G$ .

2.  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si " $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une base de  $F + G$ .

**Déf. 20**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , non réduits au vecteur nul.

$\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_G$ ) est une base de  $F$  (resp.  $G$ ).

On suppose que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. " $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une base de  $F + G$ .

On dit que " $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une **base adaptée à la somme directe  $F \oplus G$** .

**Th. 20**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

1. P Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe :  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ .

2. P Si  $E$  est de dimension finie :

$F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ .

**XI SOMME ET SOMME DIRECTE DE p SOUS-ESPACES VECTORIELS**

► **1. Définitions**

**Déf. 21**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .  
 La **somme de**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  est l'ensemble des éléments de  $E$  somme d'un élément de  $F_1$ , d'un élément de  $F_2, \dots$ , d'un élément de  $F_p$ .  
 On la note  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  ou  $\sum_{k=1}^p F_k$ .  

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \{u \in E \mid \exists (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, u = u_1 + u_2 + \dots + u_p\}.$$

**Th. 21**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .  
 1.  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $F_1, F_2, \dots, F_p$ .  
 1.  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  (au sens de l'inclusion) qui contient  $F_1, F_2, \dots, F_p$ .

**Déf. 22**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .  
 $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe si tout élément de  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est de manière **unique** somme d'un élément de  $F_1$ , d'un élément de  $F_2, \dots$ , d'un élément de  $F_p$ .  
 On écrit alors  $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  ou  $\sum_{k=1}^p F_k = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ .

► **2. Caractérisations**

**Th. 22** **SD**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont p sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.  
 i)  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe.  
 i') Tout élément de  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est de manière unique somme d'un élément de  $F_1, F_2, \dots, F_p$ .  
 i'')  $\forall u \in F_1 + F_2 + \dots + F_p, \exists ! (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, u = u_1 + u_2 + \dots + u_p$ .  
 ii) **P**  

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, u_1 + u_2 + \dots + u_p = 0_E \Rightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0_E.$$
  
 iii) Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ :  $F_1 + F_2 + \dots + F_k \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ .  
 iv) Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ :  $\left( \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} F_i \right) \cap F_j = \{0_E\}$ .

★ ii) est précieux pour montrer que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est directe.

★  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \{0_E\}$  ne suffit pas pour dire que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est directe.

★  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_p = \{0_E\}$  ne suffit pas pour dire que la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est directe.

**Th. 23**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont  $p$  sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_{F_k}$  est une base de  $F_k$ .

- P**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe si et seulement si " $\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{F_p}$ " est une famille libre de la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ .
- $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe si et seulement si " $\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{F_p}$ " est une base de la somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ .

**Déf. 23**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont  $p$  sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_{F_k}$  est une base de  $F_k$ .

On suppose que  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe. Alors " $\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{F_p}$ " est une base de  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ .

On dit que " $\mathcal{B}_{F_1} \cup \mathcal{B}_{F_2} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{F_p}$ " est une **base adaptée à la somme directe**  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ .

**Th. 24**  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont  $p$  sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

- P** Si  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe alors  $\dim \left( \sum_{k=1}^p F_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim F_k$ .
- P** Si  $E$  est de dimension finie :

$F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe **si et seulement si**  $\dim \left( \sum_{k=1}^p F_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim F_k$ .

## XII SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES

### ► 1. Définition

**Déf. 24** Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  sont **supplémentaires** si tout élément de  $E$  est de manière unique somme d'un élément de  $F$  et de  $G$ .

### ► 2. Caractérisations

**Th. 25**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
- Tout élément de  $E$  est de manière unique somme d'un élément de  $F$  et de  $G$ .
- $\forall w \in E, \exists ! (u, v) \in F \times G, w = u + v$ .
- $E = F \oplus G$ .
- $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Th. 26**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

$\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_G$ ) est une base de  $F$  (resp.  $G$ ).

**P**  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si " $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ " est une base de  $E$ .

**Th. 27**  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

On suppose que **E est de dimension finie**.

**P**  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim E = \dim F + \dim G.$$

★★ L'hypothèse  $E$  est de dimension finie est ici essentielle et on n'oubliera pas de la mentionner lorsque l'on utilisera ce résultat.

### ► 3. Pratiquement

$F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels non nuls de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .

Si  $E$  est de dimension finie, pour montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires on essaiera le plus souvent :

- de montrer que  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim E = \dim F + \dim G$  ;
- ou de trouver une base de  $F$  et une base de  $G$  dont la concaténée est une base de  $E$ .

Si  $E$  est de dimension quelconque, pour montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires on pourra se donner un élément quelconque  $w$  de  $E$  et de montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple  $(u, v)$  de  $F \times G$  tel que  $w = u + v$ .

### ► 4. Existence et construction d'un supplémentaire

**Th. 28** Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède au moins un supplémentaire.

**Th. 29** **P**  $F$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $E$  est de dimension  $n$ , que  $F$  n'est ni  $E$  ni  $\{0_E\}$  et que  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une base de  $F$ .

Si  $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$  est une famille d'éléments de  $E$  qui complète  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  en une base de  $E$  alors  $G = \text{Vect}(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

---

XIII SAVOIR FAIRE

---

- Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est libre (resp. liée ; resp. génératrice).
- Simplifier le sous-espace vectoriel engendré par une famille. En trouver une base.
- Montrer qu'une famille d'éléments d'un espace vectoriel est une base de cet espace.
- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Trouver une base d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.
- Utiliser la caractérisation des bases en dimension finie.
- Utiliser le théorème de la base incomplète.
- Extraire une base d'une famille génératrice.
- Montrer que deux ou  $p$  sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont supplémentaires.
- Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension quelconque sont supplémentaires. Pratique de l'analyse synthétique.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

---

XIV COMPLÉMENTS

---

► 1. Montrer “économiquement” qu'un ensemble est un espace vectoriel

**P** Pour montrer qu'un “ensemble”  $H$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  il suffit de trouver un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  contenant  $H$  et tel que  $H$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ .

► 2. Des dimensions classiques

1.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{K}$ .
2.  $\mathbb{K}^n$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ .
3. Si  $E$  et  $E'$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $q$  sur  $\mathbb{K}$  :  $E \times E'$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p+q$ .  $\dim(E \times E') = \dim E + \dim E'$ .

Notons que si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $E$  et  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_q)$  une base de  $E'$ ,

$((e_1, 0_{E'}), \dots, (e_p, 0_{E'}), (0_E, e'_1), \dots, (0_E, e'_q))$  est une base de  $E \times E'$

4.  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont  $p$  espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .  $\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_p$ .
5. Si  $E$  et  $E'$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :  $\dim \mathcal{L}(E, E') = \dim E \times \dim E'$ .
6.  $\dim \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = pq$      $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$      $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = n$      $\dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) = n$

7.  $\mathbb{K}_n[X]$  est un espace vectoriel de dimension  $n+1$  sur  $\mathbb{K}$ .

8.  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$  et 1 sur  $\mathbb{C}$ !

### ► 3. Des bases classiques de $\mathbb{K}_n[X]$

**Prop. 10** Si  $P_1, P_2, \dots, P_r$  sont  $r$  éléments non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  de degrés deux à deux distincts alors  $(P_1, P_2, \dots, P_r)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont  $n+1$  éléments non nuls de  $\mathbb{K}_n[X]$  de degrés deux à deux distincts alors  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Prop. 11**  $n$  est dans  $\mathbb{N}$  et  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont  $n+1$  éléments de  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg P_k = k$ .  
 $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$  et une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Prop. 12**  $n$  est dans  $\mathbb{N}$  et  $a$  est un élément de  $\mathbb{K}$ .

1.  $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

2. Les coordonnées d'un élément  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  dans cette base sont  $\left(P(a), P'(a), \frac{P''(a)}{2!}, \dots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$   
 C'est la formule de Taylor!

**Prop. 13**  $n$  est dans  $\mathbb{N}^*$ .  $a$  et  $b$  sont deux éléments distincts de  $\mathbb{K}$ .

$\left((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), (X-a)^{n-2}(X-b)^2, \dots, (X-a)(X-b)^{n-1}, (X-b)^n\right)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Prop. 14** **Polynômes d'interpolation de Lagrange.**

**SD**  $n$  est dans  $\mathbb{N}^*$ .  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont  $n+1$  éléments deux à deux distincts de  $\mathbb{K}$ .

1. Pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , il existe un unique élément  $L_k$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}.$$

Pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_k = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}$ .

2.  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Si  $P$  est un élément de  $\mathbb{K}_n[X]$  ses coordonnées dans cette base sont  $(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$ .

3. Soit  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un élément de  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = \alpha_i$ .  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k$

### ► 4. Famille liée

**Prop. 15**  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille d'éléments d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  telle que  $(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$  soit libre.  
 $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est liée si et seulement si  $u_p$  est combinaison linéaire de  $(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$ .

**Prop. 16** Si tous les éléments d'une famille  $(v_1, v_2, \dots, v_{r+1})$  de  $r+1$  vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  sont combinaison linéaire de  $r$  vecteur alors cette famille est liée.



► **5. Extraction de base**

**Prop. 17** De toute famille génératrice d'un espace vectoriel non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.

► **6. Réunion de deux sous-espaces vectoriels**

**Prop. 18** 1. En général la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace.  
2. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel si et seulement si :  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

► **7. Intersection d'hyperplans**

**Prop. 19** 1. Si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux hyperplans **distincts** d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  alors  $H_1 \cap H_2$  est de dimension  $n - 2$ .  
2. Si  $H_1, H_2, \dots, H_p$  sont  $p$  hyperplans d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  alors

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$$

**Prop. 20**  $F$  est un sous espace vectoriel de dimension  $p$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .  
Si  $F$  est distinct de  $E$ ,  $F$  est l'intersection de  $n - p$  hyperplans de  $E$ .

► **8. Suite définie par une récurrence linéaire d'ordre 2**

**Th. 30**  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $\mathbb{K}$ . On suppose  $b$  non nul.  
 $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$  est l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  telles que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .  
1.  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites d'éléments de  $\mathbb{K}$  indexées par  $\mathbb{N}$ .  
2.  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$  est de dimension 2 sur  $\mathbb{K}$ .

**Th. 31**  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $\mathbb{C}$ . On suppose  $b$  non nul.  
 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  est l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  de complexes telles que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .  
 $\Delta$  est le discriminant de l'équation :  $z \in \mathbb{C}$  et  $z^2 - az - b = 0$ .  
1. Si  $\Delta$  n'est pas nul l'équation admet deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ .  $((z_1^n), (z_2^n))$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ .  
2. Si  $\Delta$  est nul l'équation admet une solution et une seule  $z$ .  $((z^n)_{n \geq 0}, (nz^n)_{n \geq 0})$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ .

**Th. 32**  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $\mathbb{R}$ . On suppose  $b$  non nul.  
 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  est l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels telles que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .  
 $\Delta$  est le discriminant de l'équation :  $z \in \mathbb{C}$  et  $z^2 - az - b = 0$ .  
1. Si  $\Delta$  est strictement positif l'équation admet deux solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$ .  $((r_1^n)_{n \geq 0}, (r_2^n)_{n \geq 0})$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ .  
2. Si  $\Delta$  est nul l'équation admet une solution et une seule  $r$ .  $((r^n)_{n \geq 0}, (nr^n)_{n \geq 0})$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ .  
3. Si  $\Delta$  est strictement négatif l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$ .  
 $((\rho^n \sin(n\theta))_{n \geq 0}, (\rho^n \cos(n\theta))_{n \geq 0})$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ .

## ► 9. Récurrences linéaires d'ordre $p$

**Prop. 21**  $p$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  sont  $p$  éléments de  $\mathbb{K}$ .

L'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}$$

est un espace vectoriel de dimension  $p$  sur  $\mathbb{K}$ .

## ► 10. L'équation différentielle $y' + ay = 0$

**Prop. 22**  $a$  est une application continue d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{S}$  est l'ensemble des applications dérivables  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = 0$ .

- $\mathcal{S}$  est une droite vectorielle de l'espace vectoriel des applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Si  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ ,  $(e^{-A})$  est une base de  $\mathcal{S}$ .

★ Notons que ce résultat était au programme avant 2013...

## XV DES PHRASES DE RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

### ► 1. Famille libre ou liée

- Pour montrer que  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille libre de  $E$ .

Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$  tel que  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E$ . Montrons que :  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$

- Pour savoir si une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$  est libre ou liée.

Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$  □  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E$   $\iff$  □  $\dots$

- Pour montrer que  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille liée de  $E$  on exhibe  $p$  éléments  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , non tous nuls tels que  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E$ .

### ► 2. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit à montrer que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires.

**Analyse-unicité** Soit  $u$  un élément de  $E$ . SUPPOSONS que  $u = v + w$  avec  $v$  dans  $F$  et  $w$  dans  $G$ . On exprime alors  $v$  et  $w$  en fonction de  $u$ . On obtient :  $v = \varphi(u)$  et  $w = \psi(u)$ .

**Synthèse-existence** Soit  $u$  un élément de  $E$ . POSONS  $v = \varphi(u)$  et  $w = \psi(u)$ . On montre alors que :  $u = v + w$ ,  $v \in F$  et  $w \in G$ .

## XVII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★  $u$  est un élément d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\lambda$  est un scalaire. Écrire  $\frac{u}{\lambda}$  ou  $u\lambda$ .

★ Confondre un vecteur avec ses coordonnées (ou la matrice de ses coordonnées) dans une base.

Par exemple arriver à

•  $F = \text{Vect} \left( (1, 0, -1), (2, -3, 4) \right)$  lorsque  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui n'est pas  $\mathbb{K}^3$ .

•  $\text{Ker } f = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$  lorsque  $f$  est une application linéaire dont l'espace vectoriel de départ n'est pas  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

★  $F$  et  $G$  étant deux sous-espaces vectoriels de  $E$  :  $F \cap G = \emptyset$ .

★  $(u, v)$  liée équivaut à :  $\exists \lambda \in \mathbb{K}, y = \lambda x$ .

★ La somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est directe car  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_p = \{0_E\}$ .

★ La somme  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est directe car  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \{0_E\}$ .

★  $E = F \oplus G$ . Soit  $x$  un élément de  $E$ .

- $x$  appartient à  $F$  ou à  $G$  ...
- Comme  $x$  n'appartient pas à  $F$  alors  $x$  appartient à  $G$ .

En clair confondre  $G$  avec le complémentaire de  $F$ .

★  $F, G, H$  sont trois sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Écrire  $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$  et  $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$ .

Notons que l'on a quand même :  $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$  et  $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ .

★  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $A$  est un élément de  $E$ . Dire que  $\text{Vect}(A)$  est l'ensemble des multiples de  $A$ .

★ Pour montrer la liberté de  $(X^2 - 1, X^2 + X + 1, X^2 - X + 1)$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

On part de trois éléments  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  de  $\mathbb{K}$  tels que  $\alpha(X^2 - 1) + \beta(X^2 + X + 1) + \gamma(X^2 - X + 1) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ .

Écrire : en faisant  $X = 1$  on obtient...

★ écrire  $F \cap G = 0_E$  à la place de  $F \cap G = \{0_E\}$ .