ALGÈBRE BILINÉAIRE

I PRODUIT SCALAIRE

1. Définitions

2. Caractérisation

3. Premières propriétés

4. Quatre exemples

5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire

II ORTHOGONALITÉ

1. Premiers éléments

2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées

3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES ET DE BASES ORTHONORMÉES

1. L'aspect théorique

2. L'aspect pratique version 1.

3. L'aspect pratique version 2.

4. Dans un concours

IV PROJECTION ORTHOGONALE

1. Définition

2. Caractérisation

3. Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée

4. L'aspect pratique

5. Le théorème fondamental

6. Une remarque importante

7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

ALGÈBRE BILINÉAIRE

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de l'algèbre bilinéaire ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I PRODUIT SCALAIRE

1. Définitions

Déf. 1 On appelle **produit scalaire** sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda\, x + y, z) = \lambda\, \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$ (φ est linéaire à gauche).
2. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, \lambda\, y + z) = \lambda\, \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$ (φ est linéaire à droite) .
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (φ est symétrique).
4. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$ (φ est positive).
5. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (φ est définie).

Ainsi un produit scalaire sur E est **une forme bilinéaire sur E, symétrique et définie positive.**

Dans toute la suite nous utiliserons, le plus souvent la notation $< .,. >$ pour désigner un produit scalaire. On trouve assez souvent les notations : $(.|.)$ ou $(.,.)$

Déf. 2 • On appelle **espace préhilbertien réel**, tout couple $(E, < .,. >)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x,y) \to < x,y >$ un produit scalaire sur E.

• On appelle **espace vectoriel euclidien**, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

2. Caractérisation

Th. 1 **P** Soit $(x,y) \to < x,y >$ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E si et seulement si :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < \lambda\, x + y, z > = \lambda < x,z > + < y,z >$

   (ou $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x, \lambda\, y + z > = \lambda < x,y > + < x,z >$).
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ < y,x > = < x,y >$.
3. $\forall x \in E,\ < x,x > \geqslant 0$.
4. $\forall x \in E,\ < x,x > = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

Dans toute la suite $< .,. >$ est un produit scalaire sur E donc $(E, < .,. >)$ est un espace préhilbertien réel.

3. Premières propriétés

Prop. 1

1. $\forall x \in E,\ < x, 0_E > = < 0_E, x > = 0$.
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ < -x, y > = - < x,y > = < x, -y >$.

Prop. 2 **P** p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de E. $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, y_j >= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \lambda_i\, \mu_j\ < x_i, y_j >}$$

► 4. Quatre exemples

1 $E=\mathbb{R}^n$. Si $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2 $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\boxed{< X, Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^t XY = {}^t YX.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3 $E=\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux éléments de E on pose

$$\boxed{< A, B >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{ij} = \mathrm{tr}({}^t A\times B).}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4 $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $[a,b]$.

Si f et g sont deux éléments de E on pose :

$$\boxed{< f, g >= \int_a^b f(t)\, g(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

► 5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Th. 2 **L'inégalité de Cauchy-Schwarz**. Soient x et y deux éléments de E.

$$\boxed{|< x, y >| \leqslant \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}}$$

$|< x, y >| = \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$ si et seulement si (x,y) est liée.

Cor. 1 Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}$$

Cor. 2 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}}$$

Déf. 3 1. On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

N1 $\forall x \in E,\ N(x)=0 \Longleftrightarrow x=0_E$.

N2 $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x)=|\lambda| N(x)$.

N3 $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$.

2. N est une norme sur E et x un élément de E. x est **unitaire ou normé** si sa norme $N(x)$ vaut 1.

Th. 3 et **déf. 4** L'application qui à tout élément x de E associe $\sqrt{<x,x>}$ est une norme sur E.

C'est **la norme associée au produit scalaire** $<.,.>$. On parle de **norme euclidienne**.

Dans la suite nous noterons $\|x\|$ la norme d'un élément x de E c'est à dire le réel positif $\sqrt{<x,x>}$, nous désignerons alors par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $<.,.>$.

Th. 4
- $\forall x \in E,\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_E$.
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ (inégalité de Minkovski).

Th. 5 **Inégalité de Cauchy Schwarz** (again) x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{|<x,y>| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

$|<x,y>| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si (x,y) est liée.

Prop. 3
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.
- Si x est un vecteur non nul de E, $\dfrac{1}{\|x\|}\,x$ est un vecteur unitaire de E.

Th. 6 **Identités remarquables** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2=\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2} \quad \boxed{\|x-y\|^2=\|x\|^2-2<x,y>+\|y\|^2}$$

$$\boxed{<x+y,x-y>=\|x\|^2-\|y\|^2}$$

Th. 7 **Encore une identité remarquable** x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E.

$$\boxed{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} < x_i, x_j >}$$

Th. 8 **Identités de polarisation** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{2} \left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right]} \quad \boxed{< x, y >= \frac{1}{2} \left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 \right]}$$

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{4} \left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right]}$$

Th. 9 **Identité du parallélogramme** $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

II ORTHOGONALITÉ

▸ 1. Premiers éléments

Déf. 5

1. On dit que deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $< x, y >= 0$.
2. Un **élément x de E est orthogonal à une partie A** de E si x est orthogonal à tous les éléments de A.
3. **Deux parties A et B de E sont orthogonales** si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B.
4. **L'orthogonal d'une partie A de E** est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A. On note $A^\perp$ cet orthogonal et $A^{\perp\perp}$ l'orthogonal de $A^\perp$.

Th. 10 **Théorème de Pythagore**. x et y sont deux éléments de E

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

ou : $< x, y >= 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Prop. 4 Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux :

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

Th. 11

1. $E^\perp = \{0_E\}$ $\boxed{\textbf{P}}$
2. $\{0_E\}^\perp = E$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   - $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
   - $F \subset F^{\perp\perp}$.

★ $\boxed{\mathbf{P}}$ $E^{\perp} = \{0_E\}$ s'utilise souvent de la manière suivante. Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E. Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E.

Prop. 5 $\boxed{\mathbf{P}}$ F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Prop. 6 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^{\perp}$.

iii) $G \subset F^{\perp}$.

Prop. 7 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_q)$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ 1. $F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= 0\}$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

▶ 2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées

Déf. 6 Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthogonale** de E si les éléments de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famillle orthonormale** ou **orthonormée** d'éléments de E si les éléments de cette famille sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Th. 12 1. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs $\boxed{\boxed{\textbf{non nuls}}}$ est libre.

2. Toute famille orthonormée est libre.

Déf. 7 On appelle **base orthogonale** (resp. **base orthonormale ou orthonormée**) de E toute famille orthogonale (resp. orthonormale ou orthonormée) de E qui en est une base.

Avant 2003 le programme parlait de base orthonormale. Après 2003 il parle de base orthonormée. Qu'on se le dise.

Th. 13 $\boxed{\mathbf{PP}}$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une $\boxed{\textbf{base orthonormée}}$ de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \ e_k} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(< x, e_k > \big)^2}}$$

Th. 14 $\boxed{\mathbf{PP}}$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une $\boxed{\textbf{base orthonormée}}$ de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^tXY} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^tXX}}$$

Déf. 8 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle vérifie $P\,{}^tP = {}^tPP = I_n$.

Th. 15 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et son inverse est sa transposée.

Th. 16 **Changement de bases orthonormées**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ **deux bases orthonormées** de E.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale. Ainsi $P\,{}^tP = {}^tPP = I_n$ et $P^{-1} = {}^tP$.

Th. 17 Dans un espace vectoriel euclidien on peut compléter une famille orthonormée en une base orthonormée.

Th. 18 Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une base orthonormée.

Th. 19 On suppose que E est de dimension $\boxed{n}$.

Toute famille orthogonale de $\boxed{n}$ vecteurs non nuls de E est une base orthogonale de E.

Toute famille orthonormée de $\boxed{n}$ vecteurs de E est une base orthonormée de E

▸ 3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

Th. 20 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E.

• $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.

• $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

★ Ce résultat ne vaut pas dans un espace préhilbertien réel quelconque. Néanmoins il reste vrai dans le cas important où E est un espace préhilbertien réel et où Fest un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

★★ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, on évitera de dire que $G = F^\perp$ ou $F = G^\perp$.

F et G orthogonaux signifie $F \subset G^\perp$ ou (et ! !) $G \subset F^\perp$. Cependant :

Prop. 8 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et supplémentaires alors $G = F^\perp$ (et $F = G^\perp$)

Prop. 9 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E.

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de F et $\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E

Prop. 10 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et de E.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F qui se complète en une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

$F^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$. Mieux $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ est une base orthnormée de $F^\perp$.

Th. 21 **P** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. a_1, a_2, ..., a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$.

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES ET DE BASES ORTHONORMÉES

▶ 1. L'aspect théorique

Th. 22 Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base quelconque de E.

Il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de E et une seule $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est la base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

Il convient de noter que :

• w_1 est **LE** vecteur unitaire de $\text{Vect}(u_1)$ qui vérifie $< w_1, u_1 > > 0$.

• Pour tout k élément de $[\![2, n]\!]$, w_k est **LE** vecteur unitaire de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ $\boxed{\text{dans}}$ $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ qui vérifie $< w_k, u_k > > 0$.

▶ 2. L'aspect pratique version 1. Orthonormalisation de Schmidt

$\boxed{\textbf{P}}$ On se replace dans la situation du théorème précédent.

Pour construire la base $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ on utilise la méthode de Schmidt basée sur l'algorithme suivant.

• On construit d'abord w_1. Pour cela on pose $w_1 = \lambda\, u_1$ et on cherche λ tel que $\|w_1\| = 1$ et $< w_1, u_1 >> 0$.

• Supposons que l'on ait construit $(w_1, w_2, \ldots, w_{k-1})$ pour k dans $[\![2, n-1]\!]$. On construit alors w_k.

Pour cela on pose $w_k = \lambda_1\, w_1 + \lambda_2\, w_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\, w_{k-1} + \lambda_k\, u_k$.

En écrivant que w_k est orthogonal à w_i on exprime λ_i en fonction de λ_k pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On trouve alors λ_k en utilisant $\|w_k\| = 1$ et $< w_k, u_k >> 0$.

Notons que : $w_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}\, u_1$ et $\forall k \in [\![2, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|t_k\|}\, t_k$ avec $t_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} < u_k, w_i > \ w_i$.

▶ 3. L'aspect pratique version 2.

Le conseil du Coach La méthode précédente est intéressante mais assez lourde. La machine le fait très bien nous un peu moins bien... Le fait de normer les vecteurs à chaque étape complique les calculs et les expressions. Le mieux est donc de commencer par construire "une" base orthogonale et d'en déduire la base orthonormée mentionnée dans le résultat théorique en multipliant chacun des vecteurs par l'inverse de leur norme. Ce qui suit propose une méthode pour réaliser cet objectif.

PP Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Pour construire cette base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à partie de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ on procède de la manière suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ famille orthogonale de E telle que :
$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ ($k \in [\![1, n-1]\!]$).

On construit alors v_k. Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On obtient alors $v_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i$.

Th. 23 Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la famille d'éléments de E définie par la récurrence suivante :

$$v_1 = u_1 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i.$$

1. $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

2. Posons $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|} v_k$. $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est l'unique base orthonormée de E telle que :

    1. $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

    2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

▶ 4. Dans un concours

Dans les concours les deux questions classiques sont :

Construire la base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Montrer que $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est la base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

IV PROJECTION ORTHOGONALE

Dans cette section E est un espace vectoriel euclidien. On note $< .,. >$ le produit scalaire défini sur E et $\|.\|$ la norme associée. On rappelle alors que si F est un sous-espace vectoriel de E, F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

▸ 1. Définition

Déf. 9 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. La **projection orthogonale** sur F n'est autre que la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

▸ 2. Caractérisations

Th. 24 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F. Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}}$$

En clair les propriétés $p_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$ sont caractéristiques de la projection orthogonale de x sur F.

Th. 25 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F. Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \; < x - y, z >= 0 \end{cases}}$$

On retiendra de ce résultat qu'il n'est pas nécessaire de connaître $F^{\perp}$ pour trouver la projection orthogoanle de x sur F.

▸ 3. Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée

Th. 26 F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est **une base orthonormée de F**.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > \; e_k}$$

▶ 4. L'aspect pratique

P $(E, <.,.>)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....). F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base quelconque de F.

x est un élément de E. Pour trouver les coordonnées de $p_F(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

M2 • Construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x, w_k > w_k$.

M3 • Poser $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k\, u_k$. En écrivant que $x - P_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $\mathcal{B}$ on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= \sum_{k=1}^{p} x_k < u_k, u_i >.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues qui s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (< u_i, u_j >)$ (A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \\ \vdots \\ < x, u_p > \end{pmatrix}$

• Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^\perp}$ ($F^\perp$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.

▶ 5. Le théorème fondamental

Th. 27 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E et p_F la projection orthogonale sur F. Soit x un élément de E.

1. • $\forall z \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - z\|$.

 • Si t est un élément de F tel que : $\forall z \in F,\ \|x - t\| \leqslant \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.

2. Autrement dit $\|x - p_F(x)\|$ est le minimum de l'ensemble $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ et $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F.

3. $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - < x, p_F(x) >$.

★ On est prié de remarquer que ce théorème contient 3 choses.

• L'existence d'un minimum pour la partie $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ de $\mathbb{R}^+$.

• $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

• Le carré de la distance de x à F vaut $\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2 - < x, p_F(x) >$.

▶ 6. Une remarque importante

★★ Il est important de savoir que ce qui précède vaut encore dans un espace préhilbertien réel E pourvu que $F \oplus F^\perp = E$. Rappelons que c'est le cas lorsque F est de dimension finie. D'où l'importance de connaître les démonstrations de ces résultats que les concepteurs recyclent souvent lorsqu'ils souhaitent vous faire travailler dans les préhilbertiens réels quelconques.

▶ 7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

Th. 28 **Méthode des moindres carrés.**

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est } p}$.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. ${}^tAA$ est inversible.
2. $\underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$ existe.
3. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \underset{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

V ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

▶ 1. Définition

Déf. 10 Soit f un endomorphisme de E. f est **symétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, f(y) >$.

▶ 2. Caractérisation des endomorphismes symétriques

Th. 29 Ici E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de E et f un endomorphisme de E.

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (${}^t A = A$).

▶ 3. Quelques propriétés

Prop. 11 1. Id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont des endomophismes symétriques de E.

2. Toute projection orthogonale de E est un endomorphisme symétrique de E.

Mieux une projection de E est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

3. Si f et g sont deux endomorphismes symétriques de E et si λ est un réel, λf et $f+g$ sont des endomorphismes symétriques de E.

3'. L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. Si f est un endomophisme symétrique et bijectif de E, f^{-1} est un endomorphisme symétrique (et bijectif) de E.

▶ 4. Réduction d'un endomorphisme symétrique et d'une matrice symétrique.

Th. 30 Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. Deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

2. Deux sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3. f est diagonalisable.

4. Mieux, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f (f se diagonalise dans une base orthonormée).

Th. 31 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$).

2. Deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3. Deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

4. A est diagonalisable.

5. Mieux, il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

6. Il existe une matrice orthogonale P, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^t PAP$ soit diagonale.

★★ Notons que dans le résultat précédent on parle de matrices symétriques à coefficients réels. $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais n'est pas diagonalisable.

▶ 5. L'aspect pratique de la réduction

Th. 32 **PPP** f est un endomophisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

On obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f.

Th. 33 **PPP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

1. P est une matrice orthogonale.
2. ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Th. 34 **PP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, X_k \, {}^tX_k}$$

Th. 35 **P** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

▶ 6. Signe d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique.

★ Dans cette section les produits scalaires sont les produits scalaires canoniques. Les résultats qui suivent seront surtout utilisés dans le chapitre sur les fonctions numériques de plusieurs variables.

Déf. 11 On appelle **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$, l'application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) =< f(x), x >$.

Déf. 12 On appelle **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ associée à une matrice symétrique $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique associe le réel $q(x) = {}^tXAX =< AX, X >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\, x_i\, x_j$.

Th. 36 Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$.

1. Si toutes les valeurs propres de f sont positives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \geqslant 0$.
2. Si toutes les valeurs propres de f sont négatives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant 0$.
3. Si toutes les valeurs propres de f sont strictement positives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) > 0$.
4. Si toutes les valeurs propres de f sont strictement négatives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) < 0$.

Th. 37 Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à un matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \geqslant 0$.
2. Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant 0$.
3. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) > 0$.
4. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(x) < 0$.

VI SAVOIR FAIRE

• Montrer qu'une application est un produit scalaire.

• Développer des produits scalaires.

• Construire une base orthogonale (resp. orthonormée) à partir d'une base en utilisant la méthode de Schmidt.

• Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.

• Passer d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.

• Utiliser Pythagore.

• Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; en particulier d'une droite et d'un hyperplan.

• Définir analytiquement une projection orthogonale.

• Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.

• Diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique. C'est à dire trouver une base orthonormée de vecteurs propres...

• Gérer les produits scalaires les plus usuels.

• Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) c'est à dire que ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

• Utiliser la méthode des moindres carrés.

VII COMPLÉMENTS

▶ 1. Une caractérisation des bases orthonormées

Th. 38 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une famille quelconque d'éléments de E.

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale.

▶ 2. Une caractérisation des matrices orthogonales

Th. 39 $\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|}$.

▶ 3. Matrice d'un produit scalaire

Prop. 12 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E.

- La matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **la matrice du produit scalaire** $< ., . >$.
- Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$, $< x, y >= {}^tXAY$.
- A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
- Si A' est la matrice de $< ., . >$ dans $\mathcal{B}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $A' = {}^tPAP$.

▶ 4. Endomorphisme symétrique

Prop. 13 **Caractérisation des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in N^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et f un endomorphisme de E.

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, < f(e_i), e_j >=< e_i, f(e_j) >$.

Prop. 14 Soit f un endomorphisme symétrique de E. Si F est un sous- espace vectoriel de E stable par f, $F^\perp$ est encore stable par f.

Prop. 15 Soit f un endomorphisme symétrique de E.

- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.
- $\boxed{(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f}$ et $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$ (avec égalité si E est de dimension finie).

▶ 5. Caractérisations des matrices symétriques

Th. 40 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $< ., . >$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est symétrique.
ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, AY >$.
iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = {}^tXAY$.

▶ 6. Caractérisation des projections orthogonales.

Th. 41 Soit p une projection (ou un projecteur) de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) p est une projection orthogonale.

ii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ < p(x), y >=< x, p(y) >$.

▶ 7. Matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Th. 42 et **déf. 13** Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A a toutes ses valeurs propres positives

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0$

Si A vérifie l'une de ses propriétés, on dit que A est une **matrice symétrique positive**.

Th. 43 et **déf. 14** Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A a toutes ses valeurs propres strictement positives

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0$

Si A vérifie l'une de ses propriétés, on dit que A est une **matrice symétrique définie positive**.

VIII DES ERREURS À ÉVITER

★ Dire que $(x, y) \to < x, y >$ est linéaire (on peut uniquement parler de linéarité à droite ou à gauche).

★ La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est orthogonale car u_k et u_{k+1} sont orthogonaux pour tout k élément de $[\![1, p-1]\!]$.

★ $\|u\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, u$ est un vecteur unitaire.

x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien $(E, < ., . >)$.

★★ $< x, y >= 0$ donne $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

★★ $< x, y >= 0$ et $y \neq 0_E$ donne $x = 0_E$.

★ $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale de E donc c'est une famille libre.

★ $\|x\| =< x, x >$

F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E et G est un sous-espace vectoriel de F.

★ Confondre l'orthogonal $G^\perp$ de G dans E et l'orthogonal H de G dans F. Notons que $H = F \cap G^\perp$

★★ F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. F et G orthogonaux donne $G^\perp = G$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace préhilbertien E. $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ et $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k$ sont deux éléments de E.

★ Ecrire : $< u, v >=< \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\, e_k, \sum_{k=1}^{n} v_k\, e_k >= \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k < e_k, e_k >$

★ f est un endomorphisme symétrique car sa matrice est symétrique (il faut évoquer la matrice de f dans une base <u>orthonormée</u>).

★ A est symétrique donc A est diagonalisable (il faut parler de matrice à coefficients réels).

★ f est un endomorphisme symétrique $\boxed{\text{réel}}$ donc il existe une base orthonormée... (le corps de base est nécessairement $\mathbb{R}$!)

★★ Dire qu'une base de vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique est orthonormée.

IX PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES

▸ 1. Produit scalaire

Soit à montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

- On montre si nécessaire que $< u, v >$ a un sens pour tout couple (u, v) d'éléments de E.
- $\boxed{\text{Soient } \lambda \text{ un réel , } u, v \text{ et } w \text{ trois éléments de } E}$.
  - $< \lambda u + v, w >= \cdots = \lambda < u, w > + < v, w >$.
  - $< u, v >= \cdots =< v, u >$.
  - On montre que $< u, u >\geqslant 0$.
  - $\boxed{\text{Supposons que } < u, u >= 0 \text{ et montrons que } u = 0_E}$...

$\boxed{\text{Ce qui précède suffit pour dire que } < .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

▸ 2. Orthogonal d'un sous-espace

F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. On suppose que $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et on se propose de déterminer $F^\perp$.

Soit $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_n$ un élément de E.

$v \in F^\perp \iff < v, u_1 >=< v, u_2 >= \cdots < v, u_p >= 0 \iff \cdots$

▸ 3. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

f est un endomorphisme symétrique de E ayant p valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E. $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (f, \lambda_i)$ et SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E.
- $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P = {}^tPM_{\mathcal{B}}(f)P$.

► 4. Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant p valeurs deux à deux distinctes. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthormale}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (A, \lambda_i)$ et SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2), ..., SEP (A, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à cette base $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

X LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID

POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

---

c.1 On pose $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ < A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$. $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

c.2 $(E, < ., . >)$ est un espace préhilbertien. $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire.

- $| < x, y > | = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si la famille (x, y) est liée.
- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda\, x$.

---

c.3 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.

---

c.4 $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} < x_i, x_j >$.

---

c.5 F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien réel E.

- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
- Si E est de dimension finie : $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

---

c.6 Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E. Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E.

---

c.7 Une droite vectorielle d'un espace préhilbertien contient exactement deux vecteurs unitaires et ces vecteurs sont opposés.

---

c.8 Toute famille orthogonale $\boxed{\text{de vecteurs non nuls}}$ est libre.

---

c.9 Toute famille orthonormée est libre.

---

c.10 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E. Pour tout élément u de E :

$$u = \sum_{k=1}^{n} < u, e_k > e_k$$

---

c.11 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base **orthonormée** de F sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément u de E :

$$p_F(u) = \sum_{k=1}^{r} < u, e_k > e_k$$

---

c.12 La matrice de passage P d'une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E à une deuxième base orthonormée de E vérifie ${}^tPP = P^tP = I_n$. Elle est donc inversible et son inverse est sa transposée.

---

c.13 Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

iii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$

---

c.14 Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

iii) Il existe une matrice <u>inversible</u> A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$

---

c.15 Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha \|X\|^2 \leqslant {}^tXSX =< SX, X >\leqslant \beta \|X\|^2$ ou $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \alpha \leqslant \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta}$.

Mieux :

$$\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Min}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \alpha \quad \text{et} \quad \underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Max}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \beta$$

---

c.16 Si f est un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien E et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, $F^\perp$ est également stable par f.

---

c.17 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E.

$\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

---

c.18 Soit f un endomorphisme symétrique de E.

- $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont orthogonaux.
- $\boxed{(\text{Im}\, f)^\perp = \text{Ker}\, f}$ et $\text{Im}\, f \subset (\text{Ker}\, f)^\perp$ (avec égalité si E est de dimension finie).

---

c.19 Si f est un endomorphisme antisymétrique $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives.

---

c.20 Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ${}^tMM$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles (... et réciproquement).

---

c.21 Si M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ${}^tMM$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives (... et réciproquement).

---

c.22 Toute projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

---

c.23 Toute projection qui est un endomorphisme symétrique est une projection orthogonale.

---

c.24 Si p est une projection orthogonale d'un espace préhilbertien E, $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

---

c.25 Si p est une projection d'un espace préhilbertien E et si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ alors p est une projection orthogonale.

---

c.26 D est une droite vectorielle d'un espace préhilbertien E, u est un élément non nul de D et p est la projection orthogonale sur D.

$$\forall x \in E,\ p(x) = \frac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.$$

---

c.27 H est un hyperplan d'un espace préhilbertien E, u est un élément non nul de E orthogonal à H et p est la projection orthogonale sur H.

$$\forall x \in E,\ p(x) = x - \frac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.$$

---

c.28 $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ est la norme associée.

Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^tPP = I_n$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

---

c.29 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E.

- La matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice du produit scalaire $< .,. >$.
- Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$, $< x, y >= {}^tXAY$.
- A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
- Si A' est la matrice de $< .,. >$ dans $\mathcal{B}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $A' = {}^tPAP$.

---

c.30 F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de F et p_F est la projection orthogonale sur F. Soit x un élément de E. Posons $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} z_k\, e_k$.

$(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ est la solution du système à p équations à p inconnues :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} < e_k, e_i >\ z_k =< x, e_i > .$$

Ce système s'écrit matriciellement $AZ = B$ où $A = (< e_i, e_j >)$ $(A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, e_1 > \\ < x, e_2 > \\ \vdots \\ < x, e_p > \end{pmatrix}$.

---

c.31 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Il existe une base orthonormée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes normalisés et une seule telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k).$$

$P_0 = 1$ et pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, P_k est l'unique polynôme normalisé de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$.

---

c.32 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

f^* est l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

• f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, f^*(y) >$.

• $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

• $(f^*)^* = f^{**} = f$

• Si g est un second endomorphisme de E : $(\lambda f)^* = \lambda\, f^*$, $(f + g)^* = f^* + g^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

---

c.33 Si S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives (resp. strictement positives), il existe une matrice symétrique T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives (resp. strictement positives) et une seule telle que $T^2 = S$.
