

ALGÈBRE BILINÉAIRE

I PRODUIT SCALAIRE

1. Définitions
2. Caractérisation
3. Premières propriétés
4. Des exemples
5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire
6. Vecteur unitaire

II ORTHOGONALITÉ

1. Premiers éléments
2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées
3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES

ET DE BASES ORTHONORMÉES

1. L'aspect théorique
2. L'aspect pratique version 1.
3. L'aspect pratique version 2.
4. Dans un concours

IV PROJECTION ORTHOGONALE

1. Définition
2. Caractérisation
3. Expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée
4. L'aspect pratique
5. Le théorème fondamental : la caractérisation d'une projection orthogonale par minimisation de la norme.
6. Une remarque importante
7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

V ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

1. Définition
2. Caractérisation des endomorphismes symétriques
3. Quelques propriétés
4. Une nouvelle caractérisation des projections orthogonales
5. Réduction d'un endomorphisme symétrique et d'une matrice symétrique.
6. L'aspect pratique de la réduction

VI SAVOIR FAIRE

VII COMPLÉMENTS

1. Matrice d'un endomorphisme symétrique des une base orthonormée
2. Une caractérisation des bases orthonormées
3. Une caractérisation des matrices orthogonales
4. Matrice d'un produit scalaire
5. Endomorphisme symétrique
6. Caractérisations des matrices symétriques
7. Caractérisation des projections orthogonales again.
8. Matrices symétriques positives (resp. définies positives).
9. Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien.
10. Adjoint d'un endomorphisme
11. Caractérisation des normes euclidiennes.

VIII DES ERREURS À ÉVITER

IX PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES

TOUTES FAITES

1. Produit scalaire
2. Orthogonal d'un sous-espace
3. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique
4. Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels

X LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID

POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

ALGÈBRE BILINÉAIRE

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de l'algèbre bilinéaire ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

I PRODUIT SCALAIRE

► 1. Définitions

Déf. 1 On appelle **produit scalaire** sur E toute application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} vérifiant :

1. $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$ (φ est linéaire à gauche).
2. $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$ (φ est linéaire à droite).
3. $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ (φ est symétrique).
4. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$ (φ est positive).
5. $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$ (φ est définie).

Ainsi un produit scalaire sur E est **une forme bilinéaire sur E , symétrique et définie positive.**

Dans toute la suite nous utiliserons, le plus souvent la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour désigner un produit scalaire. On trouve assez souvent les notations : $(\cdot | \cdot)$ ou (\cdot, \cdot)

Déf. 2 • On appelle **espace préhilbertien réel**, tout couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ un produit scalaire sur E .

• On appelle **espace vectoriel euclidien**, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

► 2. Caractérisation

Th. 1 **P** Soit $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ une application de E^2 dans \mathbb{R} .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si :

1. $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
(ou $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$).
2. $\forall (x, y) \in E^2, \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$.
4. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$.

▲▲▲ Dans toute la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E donc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Lorsque cela nécessaire, nous préciserons si E est un espace euclidien. A défaut E est donc un espace préhilbertien.

► 3. Premières propriétés

- Prop. 1**
1. $\forall x \in E, \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0$.
 2. $\forall (x, y) \in E^2, \langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle = \langle x, -y \rangle$.

Prop. 2 **P** p et q sont deux éléments de \mathbb{N}^* . $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont deux familles d'éléments de E .
 $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont deux familles d'éléments de \mathbb{R} . Alors :

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^q \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j \rangle$$

► 4. Des exemples

1 $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de \mathbb{R}^n , on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

$\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . C'est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

2 $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y = {}^t Y X.$$

$\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3 $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E on pose

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij} = \text{tr}({}^t A \times B).$$

$\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur E . C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k.$$

$\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

5 $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[a, b]$ ($a < b$) et p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $[a, b]$.

Si f et g sont deux éléments de E on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) p(t) dt.$$

$\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur E .

► 5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Th. 2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient x et y deux éléments de E .

1. $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$
2. $|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si et seulement si (x, y) est liée.

Cor. 1 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de \mathbb{R}^n .

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

Cor. 2 Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

Déf. 3 On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) toute application N de E dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

- N1 $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E.$
- N2 $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x).$
- N3 $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Th. 3 et déf. 4 L'application qui à tout élément x de E associe $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .

C'est la **norme associée au produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On parle de **norme euclidienne**.

Dans la suite nous noterons $\|x\|$ la norme d'un élément x de E c'est à dire le réel positif $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, nous désignerons alors par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Th. 4**
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E.$
 - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$
 - $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkovski).

Th. 5 **Inégalité de Cauchy Schwarz** (again) x et y sont deux éléments de E .

1. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$
2. $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si (x, y) est liée.

- Prop. 3**
- $\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
 - $\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Th. 6 **Identités remarquables** x et y sont deux éléments de E .

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Th. 7 **Encore une identité remarquable** x_1, x_2, \dots, x_p sont p éléments de E .

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle x_i, x_j \rangle$$

Th. 8 **Identités de polarisation** x et y sont deux éléments de E .

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2]$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$$

Th. 9 **Identité du parallélogramme** $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

► 6. Vecteur unitaire

Déf. 5 Un vecteur unitaire ou normé de E est un vecteur de norme 1.

★ Au niveau des polynômes il ne faudra pas confondre les deux notions d'unitaire. Une bonne lecture du texte ou le contexte permettent de lever les ambiguïtés.

Prop. 4 1. Si x est un vecteur non nul de E , $\frac{1}{\|x\|} x$ est un vecteur unitaire de E .

2. Une droite vectorielle de E contient exactement deux vecteurs unitaires qui sont opposés.

II ORTHOGONALITÉ

► 1. Premiers éléments

Déf. 6

1. On dit que deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $\langle x, y \rangle = 0$.
2. Un élément x de E est **orthogonal à une partie A** de E si x est orthogonal à tous les éléments de A .
3. Deux parties A et B de E sont **orthogonales** si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B .
4. L'**orthogonal d'une partie A de E** est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A . On note A^\perp cet orthogonal et $A^{\perp\perp}$ l'orthogonal de A^\perp .

Th. 10 **Théorème de Pythagore.** x et y sont deux éléments de E
 x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
 ou : $\langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Prop. 5 Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux :

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

Th. 11

1. $E^\perp = \{0_E\}$ P
2. $\{0_E\}^\perp = E$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E .
 - F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
 - $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
 - $F \subset F^{\perp\perp}$.

★ P $E^\perp = \{0_E\}$ s'utilise souvent de la manière suivante. Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E . Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E .

Prop. 6 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E . $F \subset G$ donne $G^\perp \subset F^\perp$.

Prop. 7 P F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E . Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Prop. 8 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) F et G sont orthogonaux.
- ii) $F \subset G^\perp$.
- iii) $G \subset F^\perp$.

Prop. 9 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par (u_1, u_2, \dots, u_p) et (v_1, v_2, \dots, v_q) .

P 1. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x, u_i \rangle = 0\}$.

P 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \langle u_i, v_j \rangle = 0$.

► 2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées

Déf. 7 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

$(x_i)_{i \in I}$ est une **famille orthogonale** de E si les éléments de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

$(x_i)_{i \in I}$ est une **famille orthonormale** ou **orthonormée** d'éléments de E si les éléments de cette famille sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Th. 12 1. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs **non nuls** est libre.
2. Toute famille orthonormée est libre.

Déf. 8 On appelle **base orthogonale** (resp. **base orthonormale** ou **orthonormée**) de E toute famille orthogonale (resp. orthonormale ou orthonormée) de E qui en est une base.

Avant 2005 le programme parlait de base orthonormale. Entre 2005 et 2103 il parlait de base orthonormée. Après 2014 le programme mentionne les deux appellations. Qu'on se le dise...

Th. 13 **PP** Les bases canoniques de \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont orthonormées pour les produits scalaires canoniques de ces espaces vectoriels.

Th. 14 **PP** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une **base orthonormée** de E . Soit x un élément de E .

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle)^2}$$

Th. 15 **PP** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une **base orthonormée** de E . Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans \mathcal{B}

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{{}^t X X}$$

Déf. 9 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle vérifie $P {}^t P = {}^t P P = I_n$.

Th. 16 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et son inverse est sa transposée.

Th. 17 Changement de bases orthonormées

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ **deux bases orthonormées** de E .

La matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale. Ainsi $P {}^t P = {}^t P P = I_n$ et $P^{-1} = {}^t P$.

Th. 18 Dans un espace vectoriel euclidien on peut compléter une famille orthonormée en une base orthonormée.

Th. 19 Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une base orthonormée.

Th. 20 On suppose que E est de dimension n .
 Toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base orthogonale de E .
 Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base orthonormée de E

► 3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

Th. 21 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E .

- $E = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.
- F^\perp est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F .

★ Ce résultat ne vaut pas dans un espace préhilbertien réel quelconque. Néanmoins il reste vrai dans le cas important où E est un espace préhilbertien réel et où F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

★★ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E , on évitera de dire que $G = F^\perp$ ou $F = G^\perp$.
 F et G orthogonaux signifie $F \subset G^\perp$ ou (et !!) $G \subset F^\perp$. Cependant :

Prop. 10 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et supplémentaires alors $G = F^\perp$ (et $F = G^\perp$).

★ Notons que ce résultat vaut dans un préhilbertien mais pas sa réciproque.

Prop. 11 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et E .
 Si \mathcal{B}' est une base orthonormée de F et \mathcal{B}'' est une base orthonormée de F^\perp alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E .

Prop. 12 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et de E .
 Soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une base orthonormée de F qui se complète en une base orthonormée (e_1, e_2, \dots, e_n) de E .
 F^\perp est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$. Mieux $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F^\perp .

Th. 22 **P** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E . a_1, a_2, \dots, a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ dans \mathcal{B} .
2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ dans \mathcal{B} est la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n$.

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES ET DE BASES ORTHONORMÉES

► 1. L'aspect théorique

Th. 23 Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une base quelconque de E .

Il existe une base orthonormée de E et une seule (w_1, w_2, \dots, w_n) telle que pour tout k appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
2. $\langle w_k, u_k \rangle$ est strictement positif.

(w_1, w_2, \dots, w_n) est la base orthonormée déduite de (u_1, u_2, \dots, u_n) par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

Il convient de noter que :

- w_1 est **LE** vecteur unitaire de $\text{Vect}(u_1)$ qui vérifie $\langle w_1, u_1 \rangle > 0$.
- Pour tout k élément de $\llbracket 2, n \rrbracket$, w_k est **LE** vecteur unitaire de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ dans $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ qui vérifie $\langle w_k, u_k \rangle > 0$.

► 2. L'aspect pratique version 1. Orthonormalisation de Schmidt

P On se replace dans la situation du théorème précédent.

Pour construire la base (w_1, w_2, \dots, w_n) on utilise la méthode de Schmidt basée sur l'algorithme suivant.

- On construit d'abord w_1 . Pour cela on pose $w_1 = \lambda u_1$ et on cherche λ tel que $\|w_1\| = 1$ et $\langle w_1, u_1 \rangle > 0$.
- Supposons que l'on ait construit $(w_1, w_2, \dots, w_{k-1})$ pour k dans $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$. On construit alors w_k .

Pour cela on pose $w_k = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k u_k$.

En écrivant que w_k est orthogonal à w_i on exprime λ_i en fonction de λ_k pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$.

On trouve alors λ_k en utilisant $\|w_k\| = 1$ et $\langle w_k, u_k \rangle > 0$.

Notons que : $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $w_k = \frac{1}{\|t_k\|} t_k$ avec $t_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, w_i \rangle w_i$.

► 3. L'aspect pratique version 2.

Le conseil du Coach La méthode précédente est intéressante mais assez lourde. La machine le fait très bien nous un peu moins bien... Le fait de normer les vecteurs à chaque étape complique les calculs et les expressions. Le mieux est donc de commencer par construire "une" base orthogonale et d'en déduire la base orthonormée mentionnée dans le résultat théorique en multipliant chacun des vecteurs par l'inverse de leur norme. Ce qui suit propose une méthode pour réaliser cet objectif.

PP Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une base quelconque de E .

Pour construire cette base orthogonale (v_1, v_2, \dots, v_n) à partir de (u_1, u_2, \dots, u_n) on procède de la manière suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ famille orthogonale de E telle que :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \quad (k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket).$$

On construit alors v_k . Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$.

$$\text{On obtient alors } v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Th. 24 Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une base quelconque de E .

Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) la famille d'éléments de E définie par la récurrence suivante :

$$v_1 = u_1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

1. (v_1, v_2, \dots, v_n) est une base orthogonale de E telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

2. Posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_k = \frac{1}{\|v_k\|} v_k$. (w_1, w_2, \dots, w_n) est l'unique base orthonormée de E telle que :

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

2. $\langle w_k, u_k \rangle$ est strictement positif.

PP La pratique pour les esprits simples...

Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une base quelconque de E .

Pour construire une base orthonormée (w_1, w_2, \dots, w_n) à partir de (u_1, u_2, \dots, u_n) on procède de la manière suivante.

Étape 1 On pose $v_1 = u_1$.

Étape 2 On pose $v_2 = u_2 + \alpha v_1$ et on cherche α pour que v_2 soit orthogonal à v_1 .

Étape 3 On pose $v_3 = u_3 + \beta v_1 + \gamma v_2$ et on cherche β et γ pour que v_3 soit orthogonal à v_1 et v_2 .

Et ainsi de suite...

Ne reste plus qu'à poser, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket, w_k = \frac{1}{\|v_k\|} v_k$. (w_1, w_2, \dots, w_n) est une base orthonormée de E .

Mieux c'est LA base orthonormée de E déduite de (u_1, u_2, \dots, u_n) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

► 4. Dans un concours

Dans les concours les deux questions classiques sont :

Construire la base orthonormée déduite de (u_1, u_2, \dots, u_n) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Montrer que (w_1, w_2, \dots, w_n) est la base orthonormée déduite de (u_1, u_2, \dots, u_n) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

IV PROJECTION ORTHOGONALE

Dans cette section, sauf mention du contraire, E est un espace vectoriel euclidien.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire défini sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée. On rappelle alors que si F est un sous-espace vectoriel de E , F et F^\perp sont supplémentaires.

► 1. Définition

Déf. 10 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E . La **projection orthogonale** sur F n'est autre que la projection sur F parallèlement à F^\perp .

★ Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E on peut définir la projection orthogonale sur F dès que F^\perp est un supplémentaires de F dans E . C'est par exemple le cas si F est de dimension finie.

► 2. Premières caractérisations

Th. 25 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E . p_F est la projection orthogonale sur F . Si x et y sont deux éléments de E :

$$p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

En clair les propriétés $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ sont caractéristiques de la projection orthogonale de x sur F .

Th. 26 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E . p_F est la projection orthogonale sur F . Si x et y sont deux éléments de E :

$$p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \langle x - y, z \rangle = 0 \end{cases}$$

On retiendra de ce résultat qu'il n'est pas nécessaire de connaître F^\perp pour trouver la projection orthogonale de x sur F .

► 3. Expression de la projection orthogonale p_F dans une base orthonormée de F .

Th. 27 **PP** F est un sous-espace vectoriel de E et (u_1, u_2, \dots, u_k) est **une base orthonormée de F** . p_F est la projection orthogonale sur F . Pour tout élément x de E :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i$$

J'ai noté k la dimension de F pour être conforme au programme, mais un p aurait sans doute été plus heureux...

Th. 28 **P** E est un espace vectoriel euclidien et \mathcal{B} est une **base orthonormée** de E .

F est un sous-espace vectoriel de E et (u_1, u_2, \dots, u_k) est **une base orthonormée** de F .

Pour tout i dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, U_i est la matrice de u_i dans la base \mathcal{B} . p_F est la projection orthogonale sur F .

Alors la matrice de p_F dans la base \mathcal{B} est $\sum_{i=1}^k U_i {}^t U_i$, donc $M_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{i=1}^k U_i {}^t U_i$.

Notons que ce résultat est un "+" du programme 2014.

Cor. 1 **P** D est une droite vectorielle de E et p_D est la projection orthogonale sur D .

Si u est un vecteur unitaire de D , pour tout élément x de E : $p_D(x) = \langle x, u \rangle u$.

Si u est un vecteur non nul de D , pour tout élément x de E : $p_D(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

Cor. 2 **P** E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et p_H est la projection orthogonale sur H .

Si u est un vecteur unitaire orthogonal à H Pour tout élément x de E : $p_H(x) = x - \langle x, u \rangle u$.

Si u est un vecteur non nul orthogonal à H Pour tout élément x de E : $p_H(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

► 4. L'aspect pratique

P $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien...). F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F . (u_1, u_2, \dots, u_p) est une base quelconque de F .

x est un élément de E . Pour trouver $p_F(x)$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

M2 • Construire une base orthonormée (w_1, w_2, \dots, w_k) de F et utiliser : $p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, w_i \rangle w_i$.

M3 • Poser $p_F(x) = \sum_{i=1}^k x_i u_i$. On cherche alors (x_1, x_2, \dots, x_k) en écrivant que $x - p_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base (u_1, u_2, \dots, u_p) de F . On obtient rapidement :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle x, u_j \rangle = \langle p_F(x), u_j \rangle = \sum_{i=1}^k \langle u_i, u_j \rangle x_i.$$

Ceci donne un système linéaire de k équations à k inconnues que l'on résout.

Ce système s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (\langle u_i, u_j \rangle)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \langle x, u_1 \rangle \\ \langle x, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_k \rangle \end{pmatrix}$.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ (A est la matrice de la restriction du produit scalaire à F dans la base (u_1, u_2, \dots, u_k)). Le système admet donc une solution et une seule (ce qui n'est pas un scoop...).

• Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine p_{F^\perp} (F^\perp est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \text{Id}_E - p_{F^\perp}$.

► 5. Le théorème fondamental : la caractérisation d'une projection orthogonale par minimisation de la norme.

Déf. 11 Soient A une partie non vide d'un espace préhilbertien E et x un élément de E .

La distance de x à A est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x - z\| ; z \in A\}$. On la note $d(x, A)$.

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

★ Il convient de remarquer que $d(x, A)$ existe toujours car $\{\|x - z\|; z \in A\}$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} mais qu'il n'existe pas toujours un élément a de A tel que $d(x, A) = \|x - a\|$. Autrement dit $\text{Min}_{z \in A} \|x - z\|$ n'existe pas toujours.

Th. 29 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E et p_F (resp. p_{F^\perp}) la projection orthogonale sur F (resp. F^\perp).

Soit x un élément de E .

1. • $\forall z \in F, \|x - p_F(x)\| \leq \|x - z\|$.
 • Si t est un élément de F tel que $\forall z \in F, \|x - t\| \leq \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.
2. Autrement dit $\text{Min}_{z \in F} \|x - z\|$ existe et vaut $\|x - p_F(x)\|$. De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

$p_F(x)$ est donc l'unique élément de F tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F .

$$3. d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, p_F(x) \rangle = \|p_{F^\perp}(x)\|^2.$$

★ On est prié de remarquer que ce théorème contient 3 choses.

- L'EXISTENCE d'un minimum pour la partie $\{\|x - z\| \mid z \in F\}$ de \mathbb{R}^+ .
- $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum ou qui "réalise la distance de x à F ".
- Le carré de la distance de x à F vaut $\|x - p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2 - \langle x, p_F(x) \rangle$ ou encore $\|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

La formulation du programme...

Th. 30 **Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E et p_F la projection orthogonale sur F .

x et y sont deux éléments de E .

$$y = p_F(x) \iff y \in F \text{ et } \|x - y\| = \text{Inf}_{z \in F} \|x - z\| \quad \text{ou} \quad y = p_F(x) \iff y \in F \text{ et } \|x - y\| = \text{Min}_{z \in F} \|x - z\|$$

► **6. Une remarque importante**

★★ Il est important de savoir que ce qui précède vaut encore dans un espace préhilbertien réel E pourvu que $F \oplus F^\perp = E$. Rappelons que c'est le cas lorsque F est de dimension finie. D'où l'importance de connaître les démonstrations de ces résultats que les concepteurs recyclent souvent lorsqu'ils souhaitent vous faire travailler dans les préhilbertiens réels quelconques.

► 7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

Th. 31 Méthode des moindres carrés.

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de A est p .

$\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. $\text{Min}_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ existe.
2. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \text{Min}_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$.
3. tAA est inversible.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Notons que le programme de 2014 dit que "la formule donnant la valeur du point réalisant le minimum n'est pas exigible". Alors il est sans doute utile d'apprendre à la retrouver...

V ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

► 1. Définition

Déf. 12 Soit f un endomorphisme de E . f est **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Déf. 13 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
 A est **symétrique** si ${}^t A = A$ ou si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i} = a_{i,j}$.

► 2. Caractérisation des endomorphismes symétriques

Th. 32 **P** Ici E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), \mathcal{B} est une base **orthonormée** de E et f un endomorphisme de E .

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice A dans la base \mathcal{B} est symétrique (${}^t A = A$).

► 3. Quelques propriétés

Th. 33 f est un endomorphisme **symétrique** de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , F^\perp est stable par f .

Prop. 13

1. Id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont des endomorphismes symétriques de E .
2. Si f et g sont deux endomorphismes symétriques de E et si λ est un réel, λf et $f + g$ sont des endomorphismes symétriques de E .
- 2'. L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
3. Si f est un endomorphisme symétrique et bijectif de E , f^{-1} est un endomorphisme symétrique (et bijectif) de E .

► 4. Une nouvelle caractérisation des projections orthogonales

Th. 34 **P** p est une projection (ou un projecteur) de E .
 p est une projection orthogonale (ou un projecteur orthogonal) si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Un petit '+' du programme 2014...

Th. 35 p est un endomorphisme de E (ou une application de E dans E ...).

p est une projection orthogonale de E si et seulement si p est un endomorphisme symétrique de E vérifiant $p \circ p = p$.

Cor. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si A est symétrique et vérifie $A^2 = A$.

► 5. Réduction d'un endomorphisme symétrique et d'une matrice symétrique.

Prop. 14 Soit f un endomorphisme symétrique de E .

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
2. Si $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille orthogonale de E .

Th. 36 **Le théorème fondamental sur la réduction des endomorphismes symétriques.**

Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. f est diagonalisable.
2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f (donc f se diagonalise dans une base orthonormée).

Prop. 15 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \text{Sp}_{\mathbb{C}} A$).
2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.
3. Si $(X_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(X_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille orthogonale $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Th. 37 **Le théorème fondamental sur la réduction des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. A est diagonalisable.
2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .
3. Il existe une matrice **orthogonale** P , de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

★★ Notons que dans le résultat précédent on parle de matrices symétriques à coefficients réels. $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais n'est pas diagonalisable.

► **6. L'aspect pratique de la réduction**

Th. 38 **PPP** f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle. On obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concaténant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f .

Th. 39 **PPP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concaténant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A .
2. Si \mathcal{B} est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B} alors :
 1. P est une matrice orthogonale.
 2. ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Th. 40 **PP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$$A = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k {}^tX_k$$

Th. 41 **P** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[[1, n]]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P .

Alors (C_1, C_2, \dots, C_n) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

VI SAVOIR FAIRE

SF 1 Montrer qu'une application est un produit scalaire.

SF 2 Montrer que " $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ " est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

SF 3 Montrer que " $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ " et " $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ " sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$.

SF 4 "Manipuler" des produits scalaires et des normes.

SF 5 Utiliser les identités remarquables.

SF 6 Utiliser Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

SF 7 Exprimer le produit scalaire en fonction de la norme.

SF 8 Construire une base orthogonale (resp. orthonormée) à partir d'une base en utilisant la méthode de Schmidt.

SF 9 Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.

SF 10 Passer d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.

SF 11 Montrer qu'une matrice est orthogonale.

SF 12 Utiliser Pythagore.

SF 13 Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; en particulier d'une droite et d'un hyperplan.

SF 14 Lorsque E est un espace vectoriel euclidien, utiliser $E^\perp = \{0_E\}$ pour montrer qu'un vecteur est nul ou que deux vecteurs sont égaux.

SF 15 Définir analytiquement une projection orthogonale.

SF 16 Reconnaître une projection orthogonale.

SF 17 Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.

SF 18 Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

SF 19 Utiliser la méthode des moindres carrés.

SF 20 Montrer qu'un endomorphisme est symétrique. Montrer qu'une matrice est symétrique.

SF 21 Diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique. C'est à dire trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

SF 22 Savoir utiliser une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice symétrique ou d'un endomorphisme symétrique dans les problèmes les plus usuels.

SF 23 Gérer les produits scalaires les plus usuels.

SF 24 Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) c'est à dire que ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

SF 25 Étudier le signe d'une forme quadratique.

VII COMPLÉMENTS

► 1. Matrice d'un endomorphisme des une base orthonormée

Th. 42 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et f est un endomorphisme de E .

La matrice de f dans la base \mathcal{B} est $(\langle e_i, f(e_j) \rangle)$ ou $(\langle f(e_j), e_i \rangle)$

► 2. Une caractérisation des bases orthonormées

Th. 43 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une famille quelconque d'éléments de E .

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ dans la base orthonormée \mathcal{B} est orthogonale.

► 3. Des caractérisation des matrices orthogonales

Th. 44 $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$.

P P orthogonale donne $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$ est une évidence très pratique.

► **Th. 45** **P** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si ses colonnes constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si ses colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

► **Th. 46** **P** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si ses lignes constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si ses lignes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

► 4. Matrice d'un produit scalaire

Prop. 16 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E .

- La matrice $A = (\langle e_i, e_j \rangle)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **la matrice du produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans \mathcal{B} , $\langle x, y \rangle = {}^t X A Y$.
- A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
- Si A' est la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans \mathcal{B}' et si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' : $A' = {}^t P A P$.

► 5. Endomorphisme symétrique

Prop. 17 Caractérisation des endomorphismes symétriques

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et f un endomorphisme de E .

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$.

Prop. 18 Soit f un endomorphisme symétrique de E .

- $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux.
- $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$ et $\text{Im } f \subset (\text{Ker } f)^\perp$.

Prop. 19 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E .

- $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$ et $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$.
- $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

► 6. Caractérisations des matrices symétriques

Th. 47 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) A est symétrique.
- ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.
- iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tYAX = {}^tXAY$.

► 7. Caractérisation des projections orthogonales again.

Th. 48 Soit p une projection (ou un projecteur) de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) p est une projection orthogonale.
- ii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

► 8. Matrices symétriques positives (resp. définies positives).

Th. 49 et déf. 14 Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) A a toutes ses valeurs propres positives
- ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$

Si A vérifie l'une de ses propriétés, on dit que A est une **matrice symétrique positive**.

Th. 50 et déf. 15 Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) A a toutes ses valeurs propres strictement positives
- ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0$

Si A vérifie l'une de ses propriétés, on dit que A est une **matrice symétrique définie positive**.

► 9. Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien.

Th. 51 E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E . x est un élément de E et y un élément de F .

Q1. Montrer qu'il existe au plus un élément de y de F tel que : $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$

Q2. Soit y un élément de F . Montrer que : $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ si et seulement si $x - y$ est orthogonale à F .

Cela est utile lorsque les conditions d'application du théorème de meilleure approximation ne sont pas toutes réunies

► **10. Adjoint d'un endomorphisme**

Th. 52 et déf. 16 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans \mathcal{B} . f^* est l'endomorphisme de E de matrice ${}^t A$ dans \mathcal{B} .

f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

f^* est **l'adjoint** de f .

Prop. 20 f est un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien E .

- $\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$ et $\text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp$.
- Si F est un sous-espace vectoriel E stable par f , F^\perp est stable par f^* .
- $(f^*)^* = f^{**} = f$
- Si g est un second endomorphisme de E : $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f + g)^* = f^* + g^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

► **11. Une caractérisation des normes euclidiennes**

Th. 53 Une norme sur un espace vectoriel réel est la norme d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

VIII DES ERREURS À ÉVITER

★ Dire que $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ est linéaire (on peut uniquement parler de linéarité à droite ou à gauche).

★ La famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est orthogonale car u_k et u_{k+1} sont orthogonaux pour tout k élément de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

★ $\|u\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $v = \frac{1}{\sqrt{2}} u$ est un vecteur unitaire.

x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien $(E, \langle \dots \rangle)$.

★★ $\langle x, y \rangle = 0$ donne $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

★★ $\langle x, y \rangle = 0$ et $y \neq 0_E$ donne $x = 0_E$.

★ (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille orthogonale de E donc c'est une famille libre.

★ $\|x\| = \langle x, x \rangle$

F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E et G est un sous-espace vectoriel de F .

★ Confondre l'orthogonal G^\perp de G dans E et l'orthogonal H de G dans F . Notons que $H = F \cap G^\perp$

★★ F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . F et G orthogonaux donne $F^\perp = G$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace préhilbertien E . $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ sont deux éléments de E .

★ Ecrire : $\langle u, v \rangle = \langle \sum_{k=1}^n u_k e_k, \sum_{k=1}^n v_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n u_k v_k \langle e_k, e_k \rangle$

★ f est un endomorphisme symétrique car sa matrice est symétrique (il faut évoquer la matrice de f dans une base orthonormée).

★ A est symétrique donc A est diagonalisable (il faut parler de matrice à coefficients réels).

★ f est un endomorphisme symétrique réel donc il existe une base orthonormée... (le corps de base est nécessairement \mathbb{R} !)

★★ Dire qu'une base de vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique est orthonormée.

IX PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES

► 1. Produit scalaire

Soit à montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- On montre si nécessaire que $\langle u, v \rangle$ a un sens pour tout couple (u, v) d'éléments de E .
- Soient λ un réel, u, v et w trois éléments de E .
 - $\langle \lambda u + v, w \rangle = \dots = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
 - $\langle u, v \rangle = \dots = \langle v, u \rangle$.
 - On montre que $\langle u, u \rangle \geq 0$.
 - Supposons que $\langle u, u \rangle = 0$ et montrons que $u = 0_E$...

Ce qui précède suffit pour dire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

► 2. Orthogonal d'un sous-espace

F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E . $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E . On suppose que $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et on se propose de déterminer F^\perp .

Soit $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p$ un élément de E .

$v \in F^\perp \iff \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = \dots = \langle v, u_p \rangle = 0 \iff \dots$

► 3. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

f est un endomorphisme symétrique de E ayant p valeurs propres deux à deux distinctes. \mathcal{B} est une base orthonormée de E . $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $\llbracket 1, p \rrbracket$ on construit une base orthonormée \mathcal{B}_i de $\text{SEP}(f, \lambda_i)$.

$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(f, \lambda_i)$ et $\text{SEP}(f, \lambda_1), \text{SEP}(f, \lambda_2), \dots, \text{SEP}(f, \lambda_p)$ sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^t P$ car \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de E .

- $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P = {}^t P M_{\mathcal{B}}(f)P$.

► 4. Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant p valeurs deux à deux distinctes. $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $\llbracket 1, p \rrbracket$ on construit une base orthormale \mathcal{B}_i de $\text{SEP}(A, \lambda_i)$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(A, \lambda_i)$ et $\text{SEP}(A, \lambda_1), \text{SEP}(A, \lambda_2), \dots, \text{SEP}(A, \lambda_p)$ sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à cette base \mathcal{B}' . Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^t P$ car \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^t P A P = P^{-1} A P = D$ avec $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

X LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID

POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

C 1 On pose $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C 2 On pose $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

C 3 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien. $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire.

- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si la famille (x, y) est liée.
- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x$.

$$\boxed{\text{C 4}} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ sont deux éléments de } \mathbb{R}^n. \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

$$\boxed{\text{C 5}} \quad \|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i, x_j \rangle.$$

C 6 F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien réel E .

- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
- Si E est de dimension finie : $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C 7 Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E . Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E .

C 8 Une droite vectorielle d'un espace préhilbertien contient exactement deux vecteurs unitaires et ces vecteurs sont opposés.

C 9 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

C 10 Toute famille orthonormée est libre.

C 11 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E . Pour tout élément u de E :

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k$$

C 12 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ est une base **orthonormée** de F sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E .

p_F est la projection orthogonale sur F . Pour tout élément u de E :

$$p_F(u) = \sum_{k=1}^r \langle u, e_k \rangle e_k$$

C 13 La matrice de passage P d'une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E à une deuxième base orthonormée de E vérifie ${}^t P P = P {}^t P = I_n$. Elle est donc inversible et son inverse est sa transposée.

C 14 Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S X \geq 0$.
- ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
- iii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t A A$

C 15 Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^t X S X > 0$.
- ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.
- iii) Il existe une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t A A$

C 16 Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \alpha \|X\|^2 \leq {}^t X S X = \langle S X, X \rangle \leq \beta \|X\|^2 \text{ ou } \boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \alpha \leq \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} \leq \beta}.$$

Mieux :

$$\min_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} = \alpha \quad \text{et} \quad \max_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} = \beta$$

C 17 f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E . Pour montrer que f est symétrique, le plus souvent il suffit de prendre deux vecteurs u et v quelconques de E et de transformer $\langle f(u), v \rangle$ en une expression symétrique en u et v .

C 18 Si f est un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien E et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , F^\perp est également stable par f .

C 19 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E .

$\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

C 20 Soit f un endomorphisme symétrique de E .

• $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux.

• $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$ et $\text{Im } f \subset (\text{Ker } f)^\perp$ (avec égalité si E est de dimension finie).

C 21 Si f est un endomorphisme antisymétrique $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives.

C 22 Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ${}^t M M$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles (... et réciproquement).

C 23 Si M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ${}^t M M$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives (... et réciproquement).

C 24 Toute projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

C 25 Toute projection qui est un endomorphisme symétrique est une projection orthogonale.

C 26 Si p est une projection orthogonale d'un espace préhilbertien E , $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

C 27 Si p est une projection d'un espace préhilbertien E et si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ alors p est une projection orthogonale.

C 28 D est une droite vectorielle d'un espace préhilbertien E , u est un élément non nul de D et p est la projection orthogonale sur D .

$$\forall x \in E, p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

C 29 H est un hyperplan d'un espace préhilbertien E , u est un élément non nul de E orthogonal à H et p est la projection orthogonale sur H .

$$\forall x \in E, p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

C 30 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ est la norme associée.

Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^tPP = I_n$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$.

C 31 A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. X et Y sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^tAY \rangle.$$

C 32 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E .

- La matrice $A = (\langle e_i, e_j \rangle)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans \mathcal{B} , $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.
- A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
- Si A' est la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans \mathcal{B}' et si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' : $A' = {}^tPAP$.

C 33 F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F et p_F est la projection orthogonale sur F . Soit x un élément de E . Posons $p_F(x) = \sum_{k=1}^p z_k e_k$.

(z_1, z_2, \dots, z_p) est la solution du système à p équations à p inconnues :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{k=1}^p \langle e_k, e_i \rangle z_k = \langle x, e_i \rangle.$$

Ce système s'écrit matriciellement $AZ = B$ où $A = (\langle e_i, e_j \rangle)$ ($A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$), $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_p \rangle \end{pmatrix}$.

C 34 n est un élément de \mathbb{N}^* . Il existe une base orthonormée (P_0, P_1, \dots, P_n) de polynômes normalisés et une seule telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k).$$

$P_0 = 1$ et pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, P_k est l'unique polynôme normalisé de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$.

C 35 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans \mathcal{B} .

f^* est l'endomorphisme de E de matrice tA dans \mathcal{B} .

- f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
- $\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$ et $\text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp$.
- $(f^*)^* = f^{**} = f$
- Si g est un second endomorphisme de E : $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f + g)^* = f^* + g^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

C 36 Si S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives (resp. strictement positives), il existe une matrice symétrique T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives (resp. strictement positives) et une seule telle que $T^2 = S$.