ALGÈBRE BILINÉAIRE

I PRODUIT SCALAIRE

1. Définitions

2. Caractérisations

3. Premières propriétés

4. Des exemples

5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire

6. Vecteur unitaire

II ORTHOGONALITÉ

1. Premiers éléments

2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées

3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

4. Un exemple classique

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES ET DE BASES ORTHONORMÉES

1. L'aspect théorique

2. L'aspect pratique version 1

3. L'aspect pratique version 2

4. Dans un concours

IV PROJECTION ORTHOGONALE

1. Définition

2. Premières caractérisations

3. Expression de la projection orthogonale p_F dans une base orthonormée de F

4. L'aspect pratique

5. Le théorème fondamental : la caractérisation d'une projection orthogonale par minimisation de la norme

6. Une remarque importante

7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

20. Endomorphismes antisymétriques

21. Décomposition spectrale d'une matrice symétrique

22. Caractérisation des normes euclidiennes

VIII DES ERREURS À ÉVITER

IX PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES TOUTES FAITES

1. Produit scalaire

2. Orthogonal d'un sous-espace

3. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

4. Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels

X LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

ALGÈBRE BILINÉAIRE

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de l'algèbre bilinéaire...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Notons que le programme d'algèbre bilinéaire de 2014 est très proche du précédent.

I PRODUIT SCALAIRE

► 1. Définitions

Déf. 1 On appelle **produit scalaire** sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda\, x + y, z) = \lambda\, \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$ (φ est linéaire à gauche).
2. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, \lambda\, y + z) = \lambda\, \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$ (φ est linéaire à droite) .
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (φ est symétrique).
4. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$ (φ est positive).
5. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (φ est définie).

Ainsi un produit scalaire sur E est **une forme bilinéaire sur E, symétrique et définie positive.**

Dans toute la suite nous utiliserons, le plus souvent la notation $< .,. >$ pour désigner un produit scalaire. On trouve assez souvent les notations : $(.|.)$ ou $(.,.)$.

Déf. 2 • On appelle **espace préhilbertien réel**, tout couple $(E, < .,. >)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x,y) \to < x,y >$ un produit scalaire sur E.

• On appelle **espace vectoriel euclidien**, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

► 2. Caractérisations

Th. 1 **P** Soit $(x,y) \to < x,y >$ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E si et seulement si :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < \lambda\, x + y, z > = \lambda < x,z > + < y,z >$.
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ < y,x > = < x,y >$.
3. $\forall x \in E,\ < x,x > \geqslant 0$.
4. $\forall x \in E,\ < x,x > = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

Th. 2 **P** Soit $(x,y) \to < x,y >$ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E si et seulement si :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x, \lambda\, y + z >= \lambda\ < x,y > + < x,z >$.
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ < y,x >=< x,y >$.
3. $\forall x \in E,\ < x,x > \geqslant 0$.
4. $\forall x \in E,\ < x,x >= 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

★ Notons donc que $< .,. >$ linéaire à gauche (resp à droite) et symétrique donne $< .,. >$ bilinéaire et symétrique.

▲▲▲ Dans toute la suite $< .,. >$ est un produit scalaire sur E donc $(E, < .,. >)$ est un espace préhilbertien réel.

Lorsque cela sera néssaire, nous préciserons si E est un espace euclidien. A défaut E est donc un espace préhilbertien.

▶ 3. Premières propriétés

Prop. 1

1. $\boxed{\forall x \in E,\ < x, 0_E >=< 0_E, x >= 0.}$
2. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ < -x, y >= - < x,y >=< x, -y > .}$

Prop. 2 **P** p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de E.

$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles de réels. Alors :

$$\boxed{< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, y_j >= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i\, \mu_j\ < x_i, y_j >.}$$

▶ 4. Des exemples

1 $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{< x,y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2 $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\boxed{< X,Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^tXY = {}^tYX.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3 $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E on pose

$$\boxed{< A,B >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{ij} = \mathrm{tr}({}^tA \times B).}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

4 $E=\mathbb{R}_n[X]$. Si $P=\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\boxed{<P,Q>=\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k.}$$

$<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

5 $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ et p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $[a,b]$.

Si f et g sont deux éléments de E on pose :

$$\boxed{<f,g>=\int_a^b f(t)\,g(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t.}$$

$<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

▸ 5. Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Th. 3 **L'inégalité de Cauchy-Schwarz**. Soient x et y deux éléments de E.

1. $\boxed{|<x,y>|\leqslant\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}}$ et $\boxed{(<x,y>)^2\leqslant<x,x><y,y>.}$
2. $|<x,y>|=\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$ si et seulement si (x,y) est liée.

Cor. 1 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k\Big|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.}\qquad\boxed{\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\sum_{k=1}^{n} y_k^2.}$$

Cor. 2 Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$.

$$\boxed{\Big|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.}$$

$$\boxed{\Big(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2\leqslant\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\,\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Déf. 3 On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

N1 $\forall x\in E,\ N(x)=0\iff x=0_E$.

N2 $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$.

N3 $\forall(x,y)\in E^2,\ N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$.

Th. 4 et **déf. 4** L'application qui à tout élément x de E associe $\sqrt{<x,x>}$ est une norme sur E.

C'est **la norme associée au produit scalaire** $<.,.>$. On parle de **norme euclidienne**.

Dans la suite nous noterons $\|x\|$ la norme d'un élément x de E c'est à dire le réel positif $\sqrt{<x,x>}$, nous désignerons alors par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $<.,.>$.

Th. 5
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkovski).

Th. 6 **Inégalité de Cauchy-Schwarz again** x et y sont deux éléments de E.

1. $|< x,y >| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ et $\boxed{(< x,y >)^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2.}$
2. $|< x,y >| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si (x,y) est liée.

Prop. 3
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Th. 7 **Identités remarquables** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2.} \quad \boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x,y > + \|y\|^2.}$$

$$\boxed{< x+y, x-y >= \|x\|^2 - \|y\|^2.}$$

Th. 8 **Encore une identité remarquable** x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E.

$$\boxed{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} < x_i, x_j >.}$$

Th. 9 **Identités de polarisation** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x,y >= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].} \quad \boxed{< x,y >= \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

$$\boxed{< x,y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

Th. 10 **Identité du parallélogramme** $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

▶ 6. Vecteur unitaire

Déf. 5 Un **vecteur unitaire ou normé** de E est un vecteur dont la norme vaut 1.

★ Au niveau des polynômes il ne faudra pas confondre les deux notions d'unitaire. Une bonne lecture du texte ou le contexte permettent de lever les ambiguités.

Prop. 4
1. Si x est un vecteur non nul de E, $\dfrac{1}{\|x\|}\,x$ est un vecteur unitaire de E.
2. Un droite vectorielle de E contient exactement deux vecteurs unitaires qui sont opposés.

II ORTHOGONALITÉ

▶ 1. Premiers éléments

Déf. 6 1. On dit que deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $< x, y >= 0$.

2. Un **élément x de E est orthogonal à une partie A** de E si x est orthogonal à tous les éléments de A.

3. **Deux parties A et B de E sont orthogonales** si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B.

4. **L'orthogonal d'une partie A de E** est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A. On note $A^\perp$ cet orthogonal et $A^{\perp\perp}$ l'orthogonal de $A^\perp$.

Th. 11 **Théorème de Pythagore**. x et y sont deux éléments de E

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

ou : $< x, y >= 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Prop. 5 Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux :

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Th. 12 1. $E^\perp = \{0_E\}$. $\boxed{\text{P}}$

2. $\{0_E\}^\perp = E$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- $F \subset F^{\perp\perp}$.

★ $\boxed{\text{P}}$ $E^\perp = \{0_E\}$ s'utilise souvent de la manière suivante. Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E. Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E.

Prop. 6 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. $F \subset G$ donne $G^\perp \subset F^\perp$.

Prop. 7 $\boxed{\text{P}}$ F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Prop. 8 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^\perp$.

iii) $G \subset F^\perp$.

Prop. 9 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$.

P 1. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= 0\}$.

P 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

▶ 2. Bases orthogonales et bases orthonormales ou orthonormées

Déf. 7 Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthogonale** de E si les éléments de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famillle orthonormale** ou **orthonormée** d'éléments de E si les éléments de cette famille sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Prop. 10 1. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs **non nuls** est libre.

2. Toute famille orthonormée est libre.

Déf. 8 • On appelle **base orthogonale** de E toute famille orthogonale de E qui en est une base.

• On appelle **base orthonormale ou orthonormée** de E toute famille orthonormale ou orthonormée de E qui en est une base.

Avant 2005 le programme parlait de base orthonormale. Entre 2005 et 2103 il parlait de base orthonormée. Après 2014 le programme mentionne les deux appellations. Qu'on se le dise...

Th. 13 **PP** Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont othonormées pour les produits scalaires canoniques de ces espaces vectoriels.

Th. 14 **PP** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k.}$$

Th. 15 **PP** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$.

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^tXY = {}^tXY.} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|.}$$

Prop. 11 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel réel E.

1. Il existe un produit scalaire $< ., . >$ sur E et un seul qui rend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée.
2. $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E,\ < x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$
3. Dans les espaces vectoriels réels usuels, le produit scalaire canonique est celui qui rend la base canonique orthonormée.

Déf. 9 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle vérifie $P\,{}^tP = {}^tPP = I_n$.

Prop. 12 Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et son inverse est sa transposée.

Th. 16 **Changement de bases orthonormées.**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ **deux bases orthonormées** de E.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale. Ainsi $P\,{}^tP = {}^tPP = I_n$ et $P^{-1} = {}^tP$.

Prop. 13 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une **famille** d'éléments de E.

Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Th. 17 Dans un espace vectoriel euclidien on peut compléter une famille orthonormée en une base orthonormée.

Th. 18 Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une base orthonormée.

Th. 19 On suppose que E est de dimension $\boxed{n}$.

1. Toute famille orthogonale de $\boxed{n}$ vecteurs non nuls de E est une base orthogonale de E.
2. Toute famille orthonormée de $\boxed{n}$ vecteurs de E est une base orthonormée de E.

▶ 3. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien

Th. 20 Soit F un sous-espace vectoriel d'un **espace vectoriel euclidien E**.

- $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.
- $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

P **SD** Ce résultat ne vaut pas dans un espace préhilbertien réel quelconque. Néanmoins il reste vrai dans le cas important où E est un espace préhilbertien réel et où F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

★★ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, on évitera de dire que $G = F^\perp$ ou $F = G^\perp$.

F et G orthogonaux signifie $F \subset G^\perp$ ou (et !!) $G \subset F^\perp$. Cependant :

Prop. 14 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux et supplémentaires** alors $G = F^\perp$ (et $F = G^\perp$).

★ Notons que ce résultat vaut dans un prélhibertien mais pas sa réciproque.

Prop. 15 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et E.

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de F et $\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E.

Prop. 16 **P** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et de E.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F qui se complète en une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

$F^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$. Mieux $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

Prop. 17 $\boxed{\textbf{P}}$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base $\boxed{\textbf{orthonormée}}$ de E. a_1, a_2, ..., a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle engendrée par $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.

▸ 4. Un exemple classique

Prop. 18 • Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prop. 19 Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$. Rappelons que $\dim \mathcal{S}_n(R) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(R) = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

III CONSTRUCTION DE BASES ORTHOGONALES ET DE BASES ORTHONORMÉES

▶ 1. L'aspect théorique

Th. 1 Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Il existe une base **orthonormée** de E et une seule $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est LA base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

Il convient de noter que :

• w_1 est **LE** vecteur unitaire de $\text{Vect}(u_1)$ qui vérifie $< w_1, u_1 > > 0$.

• Pour tout k élément de $[\![2, n]\!]$, w_k est **LE** vecteur unitaire de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ dans $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ qui vérifie $< w_k, u_k > > 0$.

▶ 2. L'aspect pratique version 1

P On se replace dans la situation du théorème précédent.

Pour construire la base $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ on utilise la méthode de Schmidt basée sur l'algorithme suivant.

• On construit d'abord w_1. Pour cela on pose $w_1 = \lambda\, u_1$ et on cherche λ tel que $\|w_1\| = 1$ et $< w_1, u_1 >> 0$.

• Supposons que l'on ait construit $(w_1, w_2, \dots, w_{k-1})$ pour k dans $[\![2, n-1]\!]$. On construit alors w_k.

Pour cela on pose $w_k = \lambda_1\, w_1 + \lambda_2\, w_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\, w_{k-1} + \lambda_k\, u_k$.

En écrivant que w_k est orthogonal à w_i on exprime λ_i en fonction de λ_k pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On trouve alors λ_k en utilisant $\|w_k\| = 1$ et $< w_k, u_k >> 0$.

Notons que : $w_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}\, u_1$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $w_k = \dfrac{1}{\|t_k\|}\, t_k$ avec $t_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} < u_k, w_i > \, w_i$.

▶ 3. L'aspect pratique version 2

Le conseil du Coach La méthode précédente est intéressante mais assez lourde. La machine le fait très bien nous un peu moins bien... Le fait de normer les vecteurs à chaque étape complique les calculs et les expressions. Le mieux est donc de commencer par construire "une" base orthogonale et d'en déduire la base orthonormée mentionnée dans le résultat théorique en multipliant chacun des vecteurs par l'inverse de leur norme. Ce qui suit propose une méthode pour réaliser cet objectif.

PP Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Pour construire cette base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à partie de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ on procède de la manière suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ famille orthogonale de E telle que :
$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ $(k \in [\![1, n-1]\!])$.

On construit alors v_k. Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On obtient alors $v_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i$.

Th. 2 Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ la famille d'éléments de E définie par la récurrence suivante :

$$v_1 = u_1 \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >} v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2} v_i.$$

1. $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k).$$

2. Posons $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|} v_k$. $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est l'unique base orthonormée de E telle que :
   1. $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
   2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

PP **La pratique pour les esprits simples...**

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

Pour construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ à partie de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ on procède de la manière suivante.

Étape 1 On pose $v_1 = u_1$.

Étape 2 On pose $v_2 = u_2 + \alpha\, v_1$ et on cherche α pour que v_2 soit orthogonal à v_1.

Étape 3 On pose $v_3 = u_3 + \beta\, v_1 + \gamma\, v_2$ et on cherche β et γ pour que v_3 soit orthogonal à v_1 et v_2.

Et ainsi de suite...

Ne reste plus qu' à poser, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|} v_k$. $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est une base orthonormée de E.
Mieux c'est LA base orthonormée de E déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

▶ 4. Dans un concours

Dans les concours les deux questions classiques sont :

Construire la base orthonormée déduite de $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n})$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Montrer que $(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \dots, \mathbf{w_n})$ est la base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

IV PROJECTION ORTHOGONALE

Dans cette section, sauf mention du contraire, E est un espace vectoriel euclidien.

On note $< .,. >$ le produit scalaire défini sur E et $\|.\|$ la norme associée. On rappelle alors que si F est un sous-espace vectoriel de E, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

▶ 1. Définition

Déf. 1 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. La **projection orthogonale** sur F n'est autre que la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

★ Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E on peut définir la projection orthogonale sur F dès que $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E. C'est par exemple le cas si F est de dimension finie.

▶ 2. Premières caractérisations

Prop. 1 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F.
Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases} .}$$

En clair les propriétés $p_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ sont caractéristiques de la projection orthogonale de x sur F.

Th. 3 **PP** F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F.
Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ < x - y, z >= 0 \end{cases} .}$$

On retiendra de ce résultat qu'il n'est pas nécessaire de connaître $\mathbf{F}^\perp$ pour trouver la projection orthogonale de x sur F.

▶ 3. Expression de la projection orthogonale $\mathbf{p_F}$ dans une base orthonormée de F.

Th. 4 **PP** F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base orthonormée de F**.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, u_k > \ u_k.}$$

★ J'ai noté p la dimension de F alors que c'est k dans programme... Mais j'assume...

Th. 5 $\boxed{\textbf{P}}$ E est un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E.

F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est $\boxed{\textbf{une base orthonormée}}$ de F.

Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, U_k est la matrice de u_k dans la base $\mathcal{B}$. p_F est la projection orthogonale sur F.

Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\,{}^tU_k$, donc $\boxed{M_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\,{}^tU_k.}$

Notons que ce résultat est un "+" du programme 2014.

Cor. 1 $\boxed{\textbf{P}}$ D est une droite vectorielle de E et p_D est la projection orthogonale sur D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = < x, u > u.}$

Si u **est un vecteur non nul de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.}$

Cor. 2 $\boxed{\textbf{P}}$ E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et p_H est la projection orthogonale sur H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - < x, u > u.}$

Si u est **un vecteur non nul orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.}$

▸ 4. L'aspect pratique

$\boxed{\textbf{P}}$ $(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....). F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base **quelconque** de F.

x est un élément de E. Pour trouver $p_F(x)$ on peut :

$\boxed{\textbf{M1}}$ • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ (resp. $p_F(x) \in F$ et $\forall z \in F,\ < x - p_F(x), z >= 0$).

$\boxed{\textbf{M2}}$ • Construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x, w_k > w_k.$

$\boxed{\textbf{M3}}$ • Poser $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k\, u_k$. On cherche alors $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ en écrivant que $x - p_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de F. On obtient rapidement :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >=< p_F(x), u_i >= \sum_{k=1}^{p} < u_k, u_i >\ x_k = \sum_{k=1}^{p} < u_i, u_k >\ x_k.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues que l'on résout.

Ce système s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (< u_i, u_j >)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \\ \vdots \\ < x, u_p > \end{pmatrix}$.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (A est la matrice de la restriction du produit scalaire à F dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$). Le système admet donc une solution et une seule (ce qui n'est pas un scoop...).

• Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^{\perp}}$ ($F^{\perp}$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^{\perp}}$.

▶ 5. Le théorème fondamental : la caractérisation d'une projection orthogonale par minimisation de la norme

Déf. 2 Soient A une partie non vide d'un espace préhilbertien E et x un élément de E.

La distance de x à A est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-z\|\,;\, z\in A\}$. On la note $\mathbf{d(x,A)}$.

$\boxed{d(x,A)=\operatorname*{Inf}_{z\in A}\|x-z\|.}$

★ Il convient de remarquer que $d(x,A)$ existe toujours car $\{\|x-z\|\,;\, z\in A\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ mais qu'il n'existe pas toujours un élément a de A tel que $d(x,A)=\|x-a\|$. Autrement dit $\operatorname*{Min}_{z\in A}\|x-z\|$ n'existe pas toujours.

Th. 6 **"Théorème de meilleure approximation"**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\boxed{\textbf{euclidien}}$ E et p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$).

Soit x un élément de E.

1. • $\forall z\in F,\ \|x-p_F(x)\|\leqslant\|x-z\|$.

   • Si t est un élément de F tel que : $\forall z\in F,\ \|x-t\|\leqslant\|x-z\|$ alors $t=p_F(x)$.

2. Autrement dit $\operatorname*{Min}_{z\in F}\|x-z\|$ existe et vaut $\|x-p_F(x)\|$. De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

$p_F(x)$ est donc l'unique élément de F tel que $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$.

$\boxed{\text{La projection orthogonale de } x \text{ sur } F \text{ est } \textbf{la meilleure approximation} \text{ de } x \text{ par un élément de } F.}$

3. $d^2(x,F)=\|x-p_F(x)\|^2=\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2=\|x\|^2-<x,p_F(x)>=\|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

★ On est prié de remarquer que ce théorème contient 3 choses.

• $\boxed{\text{L'EXISTENCE d'un minimum}}$ pour la partie $\{\|x-z\| \mid z\in F\}$ de $\mathbb{R}^+$.

• $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum ou qui "réalise la distance de x à F".

• Le carré de la distance de x à F vaut $\|x-p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2-<x,p_F(x)>$ ou encore $\|p_{F^\perp}(x)\|^2$. $\boxed{\mathbf{P}}$ Notons que la quantité $\|x\|^2-<x,p_F(x)>$ est souvent la plus simple à calculer.

La formulation du programme...

Th. 7 **Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\boxed{\textbf{euclidien}}$ E et p_F la projection orthogonale sur F.

x et y sont deux éléments de E.

$\boxed{y=p_F(x)\Longleftrightarrow y\in F \text{ et } \|x-y\|=\operatorname*{Inf}_{z\in F}\|x-z\|}$ ou $\boxed{y=p_F(x)\Longleftrightarrow y\in F \text{ et } \|x-y\|=\operatorname*{Min}_{z\in F}\|x-z\|.}$

▶ 6. Une remarque importante

★★ Il est important de savoir que ce qui précède vaut encore dans un espace préhilbertien réel E pourvu que $F\oplus F^\perp=E$. Rappelons que c'est le cas lorsque F est de dimension finie. D'où l'importance de connaître les démonstrations de ces résultats que les concepteurs recyclent souvent lorsqu'ils souhaitent vous faire travailler dans les préhilbertiens réels quelconques.

▶ 7. Une application du théorème fondamental. Méthode des moindres carrés

Th. 8 **Méthode des moindres carrés.**

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\boxed{\textbf{le rang de A est p}}$.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. $\underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX-B\|$ existe.
2. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0-B\| = \underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX-B\|$.
3. ${}^tAA$ est inversible.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou $\boxed{{}^tAAX_0 = {}^tAB}$.

P Pour trouver X_0, il est préférable de résoudre le système $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tAAX_0 = {}^tAB$ plutôt que de calculer directement l'inverse de ${}^tAA$.

Notons que le programme de 2014 dit que *"la formule donnant la valeur du point réalisant le minimum n'est pas exigible"*. Alors il est sans doute utile d'apprendre à la retrouver...

V ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

▶ 0. Quelques rappels sur les matrices symétriques (resp. antisymétriques)

Déf. 3 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

A est **symétrique** si ${}^tA = A$ ou si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

A est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$ ou si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Prop. 2 • L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ si $n \geqslant 1$.

• Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ est une matrice symérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ est une matrice antisymérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 3 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

▶ 1. Définition d'un endomorphisme symétrique

Déf. 4 Soit f un endomorphisme de E. f est **symétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, f(y) >$.

▶ 2. Caractérisations des endomorphismes symétriques

Prop. 4 **Caractérisation des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E.

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, < f(e_i), e_j > = < e_i, f(e_j) >$.

Th. 9 **PP** **Caractérisation fondamental des endomorphismes symétriques**

Ici E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B}$ est une base **orthonormée** de E et f un endomorphisme de E.

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

★★ Surtout ne pas oublier l'hypothèse $\mathcal{B}$ est une base **orthonormée**

▶ 3. Quelques propriétés

Prop. 5 f est un endomorphisme **symétrique** de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.

Un petit '+" du programme 2014...

Prop. 6 1. Id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont des endomorphismes symétriques de E.

2. Si f et g sont deux endomorphismes symétriques de E et si λ est un réel, λf et $f+g$ sont des endomorphismes symétriques de E.

2'. L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Si E est de dimension n non nul, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

3. Si f est un endomorphisme symétrique et bijectif de E, f^{-1} est un endomorphisme symétrique (et bijectif) de E.

▶ 4. Une nouvelle caractérisation des projections orthogonales

Th. 10 **P** p est une projection (ou un projecteur) de E.

p est une projection orthogonale (ou un projecteur orthogonal) si et seulement p est un endomorphisme symétrique.

Un petit '+" du programme 2014...

Th. 11 p est un endomorphisme de E (ou une application de E dans E...).

p est une projection orthogonale de E si et seulement si p est un endomorphisme symétrique de E vérifiant $p \circ p = p$.

Cor. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si A est symétrique et vérifie $A^2 = A$.

▶ 5. Réduction d'un endomorphisme symétrique et d'une matrice symétrique

Prop. 7 Soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

2. Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale de E.

Th. 12 **Le théorème fondamental sur la réduction des endomorphismes symétriques.**

Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. f est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f (donc f se diagonalise dans une base orthonormée).

Prop. 8 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$).

2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

3. Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Th. 13 **Le théorème fondamental sur la réduction des matrices symétriques de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

3. Il existe une matrice **orthogonale** P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

★★ Notons que dans le résultat précédent on parle de matrices symétriques à coefficients réels. $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais n'est pas diagonalisable.

▶ 6. L'aspect pratique de la réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Th. 14 **PPP** f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

On obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f.

Th. 15 **PPP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

- P est une matrice orthogonale.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Th. 16 **PP** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k\, {}^tX_k.}$$

Th. 17 **P** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

VI SAVOIR FAIRE

SF 1 Montrer qu'une application est un produit scalaire.

SF 2 Montrer que "$< A, B >= \mathrm{tr}({}^t AB)$" est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

SF 3 Montrer que "$< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$" et "$< P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$" sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$.

SF 4 Gérer les produits scalaires les plus usuels.

SF 5 "Manipuler" des produits scalaires et des normes.

SF 6 Utiliser les identités remarquables.

SF 7 Utiliser les identités de polarisation, autrement dit exprimer le produit scalaire en fonction de la norme.

SF 8 Utiliser Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.

SF 9 Construire une base orthogonale (resp. orthonormée) à partir d'une base.

SF 10 Construire une base orthogonale (resp. orthonormée) à partir d'une base en utilisant la méthode de Schmidt.

SF 11 Montrer qu'une base est LA base orthonormée déduite d'une base donnée par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

SF 12 Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.

SF 13 Passer d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.

SF 14 Montrer qu'une matrice est orthogonale.

SF 15 Utiliser Pythagore.

SF 16 Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel ; en particulier d'une droite et d'un hyperplan.

SF 17 Lorsque E est un espace vectoriel euclidien, utiliser $E^{\perp} = \{0_E\}$ pour montrer qu'un vecteur est nul ou que deux vecteurs sont égaux.

SF 18 Définir analytiquement une projection orthogonale.

SF 19 Reconnaître une projection orthogonale.

SF 20 Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.

SF 21 Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

SF 22 Utiliser la méthode des moindres carrés.

SF 23 Montrer qu'un endomorphisme est symétrique. Montrer qu'une matrice est symétrique.

SF 24 Diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique. C'est à dire trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

SF 25 Savoir utiliser une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice symétrique ou d'un endomorphisme symétrique dans les problèmes les plus usuels.

SF 26 Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) c'est à dire que ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

SF 27 Étudier le signe d'une forme quadratique.

VII COMPLÉMENTS

▶ 1. Égalité dans l'inégalité triangulaire

Prop. 9 x et y sont deux éléments de E.

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda\, x$.

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $y = 0_E$ ou $\exists \lambda' \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda'\, y$.

▶ 2. Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Prop. 10 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien $(E, < .,. >)$ et f est un endomorphisme de E. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\big(< e_i, f(e_j) > \big)$.

▶ 3. Une caractérisation des bases orthonormées

Prop. 11 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une famille quelconque d'éléments de E.

$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale.

▶ 4. Un peu plus sur les matrices orthogonales

Prop. 12
1. Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. L'inverse d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prop. 13 $\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|}$.

P P orthogonale donne $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$ est une évidence très pratique.

Prop. 14 **P** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si ses colonnes constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si ses colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

Prop. 15 **P** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P est orthogonale si et seulement si ses lignes constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si ses lignes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

Prop. 16 Les seules valeurs propres possibles dans $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1.

▶ 5. Matrice d'un produit scalaire

Prop. 17 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E.

• La matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **la matrice du produit scalaire** $< ., . >$.

• Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$, $< x, y >= {}^tXAY$.

• A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.

• Si A' est la matrice de $< ., . >$ dans $\mathcal{B}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $A' = {}^tPAP$.

• Une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique à valeurs propres strictement positives.

▶ 6. Encore des propriétés des endomorphismes symétriques

Prop. 18 **Caractérisation des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et f un endomorphisme de E.

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, < f(e_i), e_j >=< e_i, f(e_j) >$.

Prop. 19 Soit f un endomorphisme symétrique de E.

• $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.

• $\boxed{(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f}$ et $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

Prop. 20 Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel $\boxed{\textbf{euclidien}}$ E.

• $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

• $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

▶ 7. Caractérisations des matrices symétriques

Prop. 21 **Caractérisations des matrices symétriques**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $< ., . >$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, {}^tAY >$.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes.

   i) A est symétrique.

   ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, AY >$.

   iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = {}^tXAY$.

▶ 8. Caractérisation des projections orthogonales again

Prop. 22 Soit p une projection (ou un projecteur) de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) p est une projection orthogonale.

ii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

▶ 9. Encadrement de Rayleigh

Th. 18 Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha \|X\|^2 \leqslant {}^tXSX = < SX, X > \leqslant \beta \|X\|^2$ ou

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \alpha \leqslant \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta}.$$

- Mieux : $\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Min}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \alpha$ et $\underset{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Max}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \beta$.
- Si X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \|X\|^2 = {}^tXSX = < SX, X > \Longleftrightarrow X \in \text{SEP }(A, \alpha)$.
- Si X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = < SX, X >= \beta \|X\|^2 \Longleftrightarrow X \in \text{SEP }(A, \beta)$.

▶ 10. Matrices symétriques positives (resp. définies positives)

Th. 19 et **déf. 5** Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) S a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

Si S vérifie l'une de ses propriétés, on dit que S est une **matrice symétrique positive**.

Prop. 23 Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) S est une matrice symétrique positive.

ii) Il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

Th. 20 et **déf. 6** Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) S a toutes ses valeurs propres strictement positives.

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

Si S vérifie l'une de ses propriétés, on dit que S est une **matrice symétrique définie positive**.

Prop. 24 Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) S est une matrice symétrique définie positive.

ii) Il existe une matrice **inversible** M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

▶ 11. Racine carrée symétrique et positive (resp. définie positive) d'une matrice symétrique et positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop. 25 Si S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives), il existe une matrice symétrique T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives) et une seule telle que $T^2 = S$.

▶ 12. Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien

Th. 21 E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E et y un élément de F.

1. Il existe au plus un élément de y de F tel que : $\|x-y\| = \operatorname*{Inf}_{z\in F} \|x-z\|$
2. Soit y un élément de F. $\|x-y\| = \operatorname*{Inf}_{z\in F} \|x-z\|$ si et seulement si $x-y$ est orthogonale à F.

Cela est utile lorsque les conditions d'application du théorème de meilleure approximation ne sont pas toutes réunies

▶ 13. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien

Th. 22 et **déf. 7** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$. f^* est l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

f^* est **l'adjoint** de f.

Prop. 26 f est un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
2. $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
3. $(f^*)^* = f^{**} = f$.
4. Si f est un automorphisme, f^* est également un automorphisme et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
5. Si g est un second endomorphisme de E : $(\lambda f)^* = \lambda\, f^*$, $(f+g)^* = f^* + g^*$ et $(f\circ g)^* = g^* \circ f^*$.
6. $\operatorname{Sp} f^* = \operatorname{Sp} f$. $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} f,\ \dim \mathrm{SEP}\ (f,\lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f^*,\lambda)$. f et f^* sont simultanément diagonalisables.
7. $\operatorname{Ker}(f^*\circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(f\circ f^*) = \operatorname{Im} f$.
8. $f\circ f^*$ (resp. $f^*\circ f$) est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives.

▶ 14. Endomorphisme orthogonal

Déf. 8 f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est **un endomorphisme orthogonal** si $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$ autrement dit si f conserve le produit scalaire.

Prop. 27 f est **une application** d'un espace préhilbertien E dans lui même. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est un endomorphisme orthogonal.
2. f est un endomorphisme vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.
3. f vérifie $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.

Notons que 3. donne la linéarité de f.

Prop. 28 f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x)\| = \|x\|$ autrement dit si et seulement si f conserve la norme.

Prop. 29 f est un endomorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien E.

1. f est injectif (mais pas nécessairement surjectif).
2. Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.
3. Si g est un second endomorphisme orthogonal de E, $g \circ f$ est un endomorphisme orthogonal de E.
4. Les seules valeurs propres (réelles ! !) possibles de f sont -1 et 1.

Prop. 30 f est un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel **euclidien** E.

f est un automorphisme de E et f^{-1} est un automorphisme orthogonal de E.

Prop. 31 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E de de dimension n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est un endomorphisme orthogonal.
2. Il existe une base orthonormée de E qui se transforme par f en une base orthonormée de E.
3. Toute base orthonormée de E se transforme par f est une base orthonormée de E.

Prop. 32 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E et A est la matrice de f dans une base **orthonormée** de E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si A est une matrice orthogonale.

Prop. 33 On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [-1,1]} \quad \text{et} \quad \boxed{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n} \quad \text{et} \quad \boxed{n \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.}$$

► 15. Base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Prop. 34 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. a) Pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, il existe un polynôme normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

2. On pose $P_0 = 1$.

a) Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, P_k est de degré k.

b) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!],\ Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|} P_k$.

a) $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Mieux, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

▶ 16. Décomposition polaire d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Prop. 35 A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique S à valeurs propres positives ou nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

2. On suppose A **inversible**.

Il existe une unique matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. C'est **la décomposition polaire** de A.

▶ 17. Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Prop. 36 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

▶ 18. Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive

Prop. 37 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives (A est définie positive).

Il existe une matrice R, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et une seule telle que $A = {}^tRR$.

▶ 19. Théorème de Courant-Fischer

Prop. 38 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(E'_1, E'_2, \dots, E'_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

$$\boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_k}{\text{Min}}\ \underset{\substack{X\in F\\ X\neq 0}}{\text{Sup}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k} \quad \text{et} \quad \boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_{n+1-k}}{\text{Max}}\ \underset{\substack{X\in F\\ X\neq 0}}{\text{Inf}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k.}$$

▶ 20. Endomorphismes antisymétriques

Prop. 39 $(E, <\ ,\ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n.

f est un endomorphisme de E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E et $A = (a_{ij})$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On dit que f est un endomorphisme **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

1. a) f est antisymétrique si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ < f(e_i), e_j >= - < e_i, f(e_j) >$.

b) f est antisymétrique si et seulement si A est symétrique autrement dit si et seulement si ${}^tA = -A$.

2. f est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E,\ < x, f(x) >= 0$.

Dans la suite f est un endomorphisme antisymétrique de E.

Prop. 40 $(E, < \ , \ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n. f est un endomorphisme antisymétrique de **E**.

1. $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$.
2. $\boxed{\mathrm{Sp}\, f \subset \{0\}.}$ $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}.}$
3. $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}}$.
4. $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives ou nulles.
5. Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^{\perp}$ est également stable par f.

Prop. 41 $(E, < \ , \ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n. f est un endomorphisme antisymétrique de **E**.

Il existe une base orthonormé de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & (O) & \\ & & & 0 & -a_p & & & \\ & & & a_p & 0 & & & \\ & (O) & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

à quelques abus près...

▶ 21. Décomposition spectrale d'une matrice symétrique

Prop. 42 S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont ses valeurs propres distinctes.

Pour tout élément k de $[\![1, p]\!]$ on note P_k la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale f_k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace propre SEP (S, λ_k) de S associé à la valeur propre λ_k.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$ et que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, P_k$.

▶ 22. Une caractérisation des normes euclidiennes

Prop. 43 Une norme sur un espace vectoriel réel est la norme d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

VIII DES ERREURS À ÉVITER

★ Dire que $(x, y) \to < x, y >$ est linéaire (on peut uniquement parler de linéarité à droite ou à gauche).

★ La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est orthogonale car u_k et u_{k+1} sont orthogonaux pour tout k élément de $[\![1, p-1]\!]$.

★ $\|u\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, u$ est un vecteur unitaire.

x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien $(E, < ., . >)$.

★★ $< x, y >= 0$ donne $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

★★ $< x, y >= 0$ et $y \neq 0_E$ donne $x = 0_E$.

★ $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de E donc c'est une famille libre.

★ $\|x\| =< x, x >$.

F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E et G est un sous-espace vectoriel de F.

★ Confondre l'orthogonal $G^\perp$ de G dans E et l'orthogonal H de G dans F. Notons que $H = F \cap G^\perp$.

★★ F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. F et G orthogonaux donne $F^\perp = G$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace préhilbertien E. $u = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k$ sont deux éléments de E.

★ Ecrire : $< u, v >=< \sum_{k=1}^{n} u_k\, e_k, \sum_{k=1}^{n} v_k\, e_k >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k < e_k, e_k >$.

★ f est un endomorphisme symétrique car sa matrice est symétrique (il faut évoquer la matrice de f dans une base <u>orthonormée</u>).

★ A est symétrique donc A est diagonalisable (il faut parler de matrice à coefficients réels).

★ f est un endomorphisme symétrique $\boxed{\text{réel}}$ donc il existe une base orthonormée... (le corps de base est nécessairement $\mathbb{R}$!)

★★ Dire qu'une base de vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique est orthonormée.

IX PRATIQUES OU RHÉTORIQUES USUELLES

▸ 1. Produit scalaire

Soit à montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

• On montre si nécessaire que $< u, v >$ a un sens pour tout couple (u, v) d'éléments de E.

• $\boxed{\text{Soient } \lambda \text{ un réel , } u, v \text{ et } w \text{ trois éléments de } E}$.

- $< \lambda u + v, w >= \cdots = \lambda < u, w > + < v, w >$.
- $< u, v >= \cdots =< v, u >$.
- On montre que $< u, u >\geqslant 0$.
- $\boxed{\text{Supposons que } < u, u >= 0 \text{ et montrons que } u = 0_E}$...

$\boxed{\text{Ce qui précède suffit pour dire que } < ., . > \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

▸ 2. Orthogonal d'un sous-espace

F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E. On suppose que $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et on se propose de déterminer $F^\perp$.

Soit $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_n$ un élément de E.

$v \in F^\perp \iff < v, u_1 >=< v, u_2 >= \cdots < v, u_p >= 0 \iff \cdots$

► 3. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

f est un endomorphisme symétrique de E ayant p valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E. $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (f, λ_i).

$E = \bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (f, λ_i) et SEP (f, λ_1), SEP (f, λ_2), ..., SEP (f, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de E.
- $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = {}^tP M_{\mathcal{B}}(f) P$.

► 4. Diagonalisation d'une matrice symétrique à coefficients réels

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant p valeurs deux à deux distinctes. $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Pour tout i élément de $[\![1, p]\!]$ on construit une base $\boxed{\text{orthormale}}$ $\mathcal{B}_i$ de SEP (A, λ_i).

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p}$ SEP (A, λ_i) et SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2), ..., SEP (A, λ_p) sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n (ok pour alpha ?).

Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à cette base $\mathcal{B}'$. Alors :

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$ avec $D =$Diag$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

X LES BONS COUPS DE BILI-NÉAIRE THE KID POUR AMÉLIORER TON EUCLIDIENNE ATTITUDE

Dans la suite, sauf mention du contraire, $< .,. >$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $\|.\|$ est la norme associée.

Niveau 1

C 1 $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

C 2 $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\boxed{< X, Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^t XY = {}^t Y X.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C 3 $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de E, on pose :

$$\boxed{< A, B >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{ij} = \mathrm{tr}({}^t A \times B).}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E. C'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

C 4 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$ sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\boxed{< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k.}$$

$< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

C 5 p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de E.

$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, y_j >= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i\, \mu_j\ < x_i, y_j >.}$$

C 6 **Inégalité de Cauchy-Schwarz** x et y sont deux éléments de E.

1. $\boxed{|<x,y>| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$ et $\boxed{(<x,y>)^2 \leqslant \|x\|^2\,\|y\|^2.}$

2. $|<x,y>| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si (x,y) est liée.

C 7 **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$**

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.} \qquad \boxed{\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\sum_{k=1}^{n} y_k^2.}$$

C 8 **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans "$\mathcal{C}([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbb{R})$"**

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$.

$$\boxed{\Big|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.}$$

$$\boxed{\Big(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\,\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$

C 9 • $\forall x\in E,\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_E$.

• $\forall x\in E,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

• $\forall (x,y)\in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ (inégalité de Minkovski).

C 10 x et y sont deux éléments de E.

1. $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ si et seulement si $x=0_E$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+,\ y=\lambda\,x$.

2. $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ si et seulement si $y=0_E$ ou $\exists\lambda'\in\mathbb{R}^+,\ x=\lambda'\,y$.

C 11 $\forall (x,y)\in E^2,\ \Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

• $\forall (x,y)\in E^2,\ \Big|\|x\|-\|y\|\Big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

C 12 1. Si x est un vecteur non nul de E, $\dfrac{1}{\|x\|}\,x$ est un vecteur unitaire de E.

2. Un droite vectorielle de E contient exactement deux vecteurs unitaires qui sont opposés.

C 13 **Identités remarquables** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2.} \qquad \boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2<x,y> + \|y\|^2.}$$

$$\boxed{<x+y,x-y> = \|x\|^2 - \|y\|^2.}$$

C 14 **Identités remarquables** x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E.

$$\boxed{\|x_1+x_2+\cdots+x_p\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} <x_i,x_j>}$$

C 15 **Identités de polarisation** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].} \qquad \boxed{< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

$$\boxed{< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].}$$

C 16 **Identités du parrallélogramme** x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.}$$

C 17 **Théorème de Pythagore**. x et y sont deux éléments de E.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

C 18 Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux :

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

C 19 1. $E^\perp = \{0_E\}$. Autrement dit un vecteur de E est nul si et seulement il appartient à $E^\perp$.

2. $\{0_E\}^\perp = E$.

C 20 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- $F \subset F^{\perp\perp}$.
- $F \subset G$ donne $G^\perp \subset F^\perp$.
- Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.
- F et G sont orthogonaux $\Longleftrightarrow F \subset G^\perp \Longleftrightarrow G \subset F^\perp$.

C 21 F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$.

P 1. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= 0\}$.

P 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

C 22 F et G sont deux sous-espaces d'un espace préhilbertien réel E.

- $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
- Si E **est de dimension finie** : $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C 23 Soit F un sous-espace vectoriel d'un **espace vectoriel euclidien** E.

- $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.
- $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

• G est un sous-espace vectoriel de E. $G = F^{\perp}$ si et seulement G est un (ou le...) supplémentaire de F dans E orthogonal à F.

C 24 • L'ensembles des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• L'ensembles des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ si $n \geqslant 1$.

• Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ est une matrice symérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ est une matrice antisymérique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

C 25 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour le produit scalaire canonique, l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

C 26 1. Toute famille orthogonale constituée de vecteurs **non nuls** est libre.

2. Toute famille orthonormée est libre.

C 27 Tout espace vectoriel **euclidien** possède une base orthonormée.

C 28 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \ e_k}.$$

C 29 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$.

$$\boxed{< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = {}^tXY =< X, Y >.} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^tXX} = \|X\|.}$$

C 30 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel réel E.

1. Il existe un produit scalaire $< .,. >$ sur E et un seul qui rend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée.

2. $\forall x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \in E,\ < x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$

3. Dans les espaces vectoriels réels usuels, le produit scalaire canonique est celui qui rend la base canonique orthonormée.

C 31 **Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien $(E, < ., . >)$ et f est un endomorphisme de E. $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\big(< e_i, f(e_j) > \big)$.

C 32 **Matrice orthogonale** P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) P orthogonale.

i') P vérifie $P\,{}^tP = {}^tPP = I_n$.

ii) P vérifie $P\,{}^tP = I_n$.

iii) P vérifie ${}^tPP = I_n$.

iv) P est inversible et son inverse est sa transposée.

v) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$ $\quad$ ($\|.\|$ est la norme euclidienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

vi) Les colonnes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

vii) Les colones de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

viii) Les lignes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

ix) Les lignes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

C 33 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ **deux bases orthonormées** de E.

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

C 34 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une **famille** d'éléments de E.

Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

C 35 1. Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. L'inverse d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C 36 Les seules valeurs propres possibles dans $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1.

C 37 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et E.

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de F et $\mathcal{B}''$ est une base orthonormée de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base orthonormée de E.

C 38 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E distinct de $\{0_E\}$ et de E. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F.

1. $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ se complète en une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

2. $F^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$. Mieux $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

C 39 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base $\boxed{\textbf{orthonormée}}$ de E. a_1, a_2, ..., a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle engendrée par $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$.

C 40 **Aspect théorique de l'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base **quelconque** de E.

Il existe une base $\boxed{\textbf{orthonormée}}$ de E et une seule $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est LA base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

C 41 **Aspect pratique de l'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base quelconque de E.

▶ Pour construire cette base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ à partir de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ on procède de la manière suivante.

• On pose $v_1 = u_1$.

• Supposons que l'on ait construit $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ famille orthogonale de E telle que :
$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ $(k \in [\![1, n-1]\!])$.

On construit alors v_k. Pour cela on pose $v_k = u_k + \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\, v_{k-1}$.

En écrivant que v_k est orthogonal à v_i on calcule λ_i pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$.

On obtient alors $v_k = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{< v_i, v_i >}\, v_i = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< u_k, v_i >}{\|v_i\|^2}\, v_i$.

▶ On pose $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|}\, v_k$. $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est l'unique base orthonormée de E telle que :

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

C 42 F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F. Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases} \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ < x - y, z >= 0 \end{cases}}$$

C 43 F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est $\boxed{\textbf{une base orthonormée de } F}$.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, u_k >\ u_k}$$

C 44 E est un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E.

F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est $\boxed{\textbf{une base orthonormée}}$ de F.

Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, U_k est la matrice de u_k dans la base $\mathcal{B}$. p_F est la projection orthogonale sur F.

Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\, {}^tU_k$, donc $\boxed{M_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k\, {}^tU_k}$.

C'est un "+" du programme 2014.

C 45 D est une droite vectorielle de E et p_D est la projection orthogonale sur D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = \, < x, u > u.}$

Si u **est un vecteur non nul de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u}$.

C 46 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et p_H est la projection orthogonale sur H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - < x, u > u}$.

Si u est **un vecteur non nul orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u}$.

C 47 D est une droite vectorielle de E et s_D est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{s_D(x) = 2 < x, u > u - x.}$

C 48 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et s_H est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H**, pour tout élément x de E : $\boxed{s_H(x) = x - 2 < x, u > u}$.

C 49 **Recherche pratique d'une projection orthogonale** $(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....).

F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base **quelconque** de F.

x est un élément de E. Pour trouver $p_F(x)$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ (resp. $p_F(x) \in F$ et $\forall z \in F,\ < x - p_F(x), z >= 0$).

M2 • Construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x, w_k > \ w_k$.

M3 • Poser $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k\, u_k$. On cherche alors $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ en écrivant que $x - p_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de F. On obtient rapidement :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >=< p_F(x), u_i >= \sum_{k=1}^{p} < u_k, u_i > \ x_k = \sum_{k=1}^{p} < u_i, u_k > \ x_k.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues que l'on résout.

Ce système s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (< u_i, u_j >)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \\ \vdots \\ < x, u_p > \end{pmatrix}$.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (A est la matrice de la restriction du produit scalaire à F dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$). Le système admet donc une solution et une seule (ce qui n'est pas un scoop...).

► Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^\perp}$ ($F^\perp$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.

C 50 **Théorème de meilleure approximation**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel **euclidien** E et p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$).

Soit x un élément de E.

1. • $\forall z \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - z\|$.

• Si t est un élément de F tel que : $\forall z \in F,\ \|x - t\| \leqslant \|x - z\|$ alors $t = p_F(x)$.

2. Autrement dit $\underset{z\in F}{\mathrm{Min}}\, \|x - z\|$ existe et vaut $\|x - p_F(x)\|$. De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

$p_F(x)$ est donc l'unique élément de F tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

La projection orthogonale de x sur F est **la meilleure approximation** de x par un élément de F.

3. $d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - < x, p_F(x) >= \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

C 51 La formulation du programme... **Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.**

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel **euclidien** E et p_F la projection orthogonale sur F.

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{y = p_F(x) \Longleftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \underset{z\in F}{\mathrm{Inf}}\, \|x - z\|} \text{ ou } \boxed{y = p_F(x) \Longleftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \underset{z\in F}{\mathrm{Min}}\, \|x - z\|.}$$

C 52 **Méthode des moindres carrés.**

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que **le rang de A est p**.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. $\underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}} \|AX - B\|$ existe.
2. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}} \|AX - B\|$.
3. ${}^tAA$ est inversible.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

C 53 **Caractérisations des matrices symétriques**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $< ., . >$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, {}^tAY >$.

2. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est symétrique.

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < AX, Y >=< X, AY >$.

iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = {}^tXAY.$

$\boxed{\textbf{C 54}}$ **Caractérisation des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E.

f est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, < f(e_i), e_j >=< e_i, f(e_j) >.$

$\boxed{\textbf{C 55}}$ **Caractérisation fondamentale des endomorphismes symétriques**

E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base $\boxed{\boxed{\textbf{orthonormée}}}$ de E et f un endomorphisme de E.

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (${}^tA = A$).

$\boxed{\textbf{C 56}}$ L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Si E est de dimension n non nul, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

$\boxed{\textbf{C 57}}$ Si f est un endomorphisme symétrique et bijectif de E, f^{-1} est un endomorphisme symétrique (et bijectif) de E.

$\boxed{\textbf{C 58}}$ f est un endomorphisme **symétrique** de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

$\boxed{\textbf{C 59}}$ Soit f un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien E .

- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux.
- $\boxed{(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f}$ et $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

$\boxed{\textbf{C 60}}$ Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel $\boxed{\textbf{euclidien}}$ E.

- $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
- $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux.

$\boxed{\textbf{C 61}}$ **Caractérisations des projections orthogonales again**

1. p est une projection (ou un projecteur) de E.

p est une projection orthogonale (ou un projecteur orthogonal) si et seulement p est un endomorphisme symétrique.

2. p est un endomorphisme de E (ou une application de E dans E...).

p est une projection orthogonale de E si et seulement si p est un endomorphisme symétrique de E vérifiant $p \circ p = p$.

3. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si A est symétrique et vérifie $A^2 = A$.

C'est un "+" du programme 2014.

$\boxed{\textbf{C 62}}$ Soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

2. Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale de E.

C 63 **Le théorème fondamental sur la réduction des endomorphismes symétriques.**

Soit f un endomorphisme symétrique de E **espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle**.

1. f est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f (donc f se diagonalise dans une base orthonormée).

C 64 A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A$).

2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

3. Si $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C 65 **Le théorème fondamental sur la réduction des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est diagonalisable.

2. Mieux, il existe une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

3. Il existe une matrice **orthogonale** P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

C 66 **L'aspect pratique de la réduction des endomorphismes symétriques**

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

On obtient une base **orthonormée** de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de f.

C 67 **L'aspect pratique de la réduction des matrices symétriques**

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On obtient une base **orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base **orthonormée** de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

- P est une matrice orthogonale.
- ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

C 68 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, X_k\, {}^tX_k}$$

C 69 1. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.

Alors $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

2. **Variante** $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = PD{}^tP$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les colonnes de P constituent une base othonormée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

C 70 **Décomposition spectrale d'une matrice symétrique.**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont ses valeurs propres distinctes.

Pour tout élément k de $[\![1, p]\!]$ on note P_k la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale f_k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace propre SEP (S, λ_k) de S associé à la valeur propre λ_k.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$ et que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, P_k$.

C 71 **Matrice symétrique positive**

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

C 72 **Matrice symétrique définie positive**

Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

Niveau 2

C 73 **Encadrement de Rayleigh** Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit α sa plus petite valeur propre et soit β sa plus grande valeur propre.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha\,\|X\|^2 \leqslant {}^tXSX = < SX, X > \leqslant \beta\,\|X\|^2$ ou $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \alpha \leqslant \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \beta}$.

Mieux :

$$\operatorname*{Min}_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \alpha \quad \text{et} \quad \operatorname*{Max}_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \beta$$

C 74 **Matrice symétrique positive again**

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

iii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

C 75 **Matrice symétrique définie positive again**

Soit une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

iii) Il existe une matrice **inversible** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

C 76 **Adjoint d'un endomorphisme**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

f^* est l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$.

1. f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >$. **f* est l'adjoint de f.**
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
3. $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
4. $(f^*)^* = f^{**} = f$.
5. Si f est un automorphisme, f^* est également un automorphisme et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
6. Si g est un second endomorphisme de $E : (\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f+g)^* = f^* + g^*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
7. $\operatorname{Sp} f^* = \operatorname{Sp} f$. $\forall \lambda \in \operatorname{Sp} f,\ \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f^*, \lambda)$. f et f^* sont simultanément diagonalisables.
8. $\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Im} f$.
9. $f \circ f^*$ (resp. $f^* \circ f$) est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives.

C 77 **Endomorphisme orthogonal**

• f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est **un endomorphisme orthogonal** si $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$ autrement dit si f conserve le produit scalaire.

• f est **une application** d'un espace préhilbertien E dans lui même. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est un endomorphisme orthogonal.
2. f est un endomorphisme vérifinant $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.
3. f vérifie $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.

Notons que 3. donne la linéarité de f.

• f est un endomorphisme d'un espace préhilbertien E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x)\| = \|x\|$ autrement dit si et seulement si f conserve la norme.

• f est un endomorphisme orthogonal d'un espace préhilbertien E.

1. f est injectif (mais pas nécessairement surjectif).

2. Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.

3. Si g est un second endomorphisme orthogonal de E, $g \circ f$ est un endomorphisme orthogonal de E.

4. Les seules valeurs propres (réelles !!) possibles de f sont -1 et 1.

• f est un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel **euclidien** E.

f est un automorphisme de E et f^{-1} est un automorphisme orthogonal de E.

• f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E de de dimension n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est un endomorphisme orthogonal.

ii) Il existe une base orthonormée de E qui se transforme par f en une base orthonormée de E.

iii) Toute base orthonormée de E se transforme par f est une base orthonormée de E.

• f est un endomorphisme d'un espace vectoriel **euclidien** E et A est la matrice de f dans une base **orthonormée** de E.

f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si A est une matrice orthogonale.

• On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [-1,1]} \quad \text{et} \quad \boxed{\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Big| \leqslant n} \quad \text{et} \quad \boxed{n \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.}$$

C 78 Racine carrée symétrique et positive (resp. définie positive) d'une matrice symétrique et positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives), il existe une matrice symétrique T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles (resp. strictement positives) et une seule telle que $T^2 = S$.

C 79 Matrice d'un produit scalaire

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien E.

• La matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **la matrice du produit scalaire** $< .,. >$.

• Si x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$, $< x, y >= {}^tXAY$.

• A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.

• Si A' est la matrice de $< .,. >$ dans $\mathcal{B}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $A' = {}^tPAP$.

• Une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique à valeurs propres strictement positives.

C 80 Caractérisation des projections orthogonales again.

Soit p une projection (ou un projecteur) de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) p est une projection orthogonale.

ii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

C 81 **Base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. a) Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, il existe un polynôme normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

2. On pose $P_0 = 1$.

a) Pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, P_k est de degré k.

b) $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On pose $\forall k \in [\![0, n]\!],\ Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|}\, P_k$.

a) $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Mieux, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ déduite de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

C 82 **Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien**

E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E et y un élément de F.

1. Il existe au plus un élément de y de F tel que : $\|x - y\| = \operatorname{Inf}_{z \in F} \|x - z\|$.

2. Soit y un élément de F. $\|x - y\| = \operatorname{Inf}_{z \in F} \|x - z\|$ si et seulement si $x - y$ est orthogonale à F.

C 83 **Décomposition polaire d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique S à valeurs propres positives ou nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

2. On suppose A **inversible**.

Il existe une unique matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice symétrique S à valeurs propres strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. C'est **la décomposition polaire** de A.

C 84 **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

C 85 **Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive**.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives (A est définie positive).

Il existe une matrice R, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et une seule telle que $A = {}^tRR$.

C 86 **Théorème de Courant-Fischer.**

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

$$\boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_k}{\text{Min}}\ \underset{\substack{X\in F\\X\neq 0}}{\text{Sup}}\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}=\lambda_k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underset{F\in\mathcal{F}_{n+1-k}}{\text{Max}}\ \underset{\substack{X\in F\\X\neq 0}}{\text{Inf}}\ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}=\lambda_k.}$$

$\boxed{\textbf{C 87}}$ **Endomorphisme antisymétrique**.

$(E, <\ ,\ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n.

f est un endomorphisme de E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de E et $A = (a_{ij})$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On dit que f est un endomorphisme **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

1. a) f est antisymétrique si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ < f(e_i), e_j >= - < e_i, f(e_j) >$.

b) f est antisymétrique si et seulement si A est symétrique autrement dit si et seulement si ${}^tA = -A$.

2. f est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E,\ < x, f(x) >= 0$.

$\boxed{\textbf{Dans la suite f est un endomorphisme antisymétrique de E.}}$

3 a) $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

b) $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

c) $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.

d) $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives ou nulles.

e) Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^{\perp}$ est également stable par f.

4. Il existe une base orthonormé de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & (O) & \\ & & & 0 & -a_p & & \\ & & & a_p & 0 & & \\ & (O) & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

à quelques abus près...

$\boxed{\textbf{C 88}}$ **Une caractérisation des normes euclidiennes**

Une norme sur un espace vectoriel réel est la norme d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

C 89 Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E. Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E.