Pour F.C.

Exercice 1 E est de dimension finie n et f est un endomorphisme de E.

Q1 Montrer que si f est une projection : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f - Id_E) = n$.

Q2. Montrer la réciproque.

Q1 Supposons que f est une projection.

f est alors la projection sur $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Par conséquent $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Ainsi $n = \dim E = \dim \operatorname{Ker}(f-Id_E) + \dim \operatorname{Ker} f$.

Par conséquent : $\underline{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f-Id_E) = n}$.

Q2 Réciproquement supposons que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}(f-Id_E) = n$.

▲ Remarque.. Notons que SI f est une projection, f est la projection sur $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires. ▼

Posons $F = \operatorname{Ker}(f-Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker} f$.

- $\dim F + \dim G = n = \dim E$ par hypothèse.
- Soit $x \in F \cap G$. $(f-Id_E)(x) = f(x) = 0_E$. $f(x) = x$ et $f(x) = 0_E$. $x = 0_E$.

  Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

Ceci achève de montrer que F et G sont supplémentaires.

(*) Notons alors g la projection sur F parallèlement à G (qui existe maintenant que $E = F \oplus G$). Montrons alors que $f = g$.

Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, x_2) \in F \times G$, $x = x_1 + x_2$. Par définition $g(x) = x_1$.

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = x_1 + 0_E = x_1$ car $x_1 \in F = \operatorname{Ker}(f-Id_E)$ et $x_2 \in G = \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$. $f = g$.

$\underline{f \text{ est bien une projection}}$; la projection sur $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

(*) L'introduction de g est du confort ! On peut faire sans. Dès que l'on montre que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker}(f-Id_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$ donne $f(x) = x_1$ on peut dire, par définition, que f est la projection sur $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 2 E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. F2

Q1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$ si et seulement si $F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

Q2. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0_F\}$.

Q1 $g(f(E)) \subset g(F)$ car $f(E) \subset F$.

Ainsi $g(f(E)) = g(F) \iff \dim g(f(E)) = \dim g(F) \iff \mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}\, g$.

Montrons alors que $g(f(E)) = g(F) \iff F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

- Supposons que $g(f(E)) = g(F)$.

Soit $t \in F$. $g(t) \in g(F) = g(f(E))$; $\exists a \in E$, $g(t) = g(f(a))$; $g(t - f(a)) = 0_G$.

$t - f(a) \in \mathrm{Ker}\, g$. Notons $u = t - f(a)$.

$t = f(a) + u$ avec $f(a) \in \mathrm{Im}\, f$ et $u \in \mathrm{Ker}\, g$. $t \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

Ainsi $F \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. La réciproque est claire car $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ sont dans F.

Alors $g(f(E)) = g(F)$ donne $F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

- Supposons que $F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. Montrons que $g(f(E)) = g(F)$.

Nous avons déjà $g(f(E)) \subset g(F)$. Soit $z \in g(F)$. $\exists t \in F$, $z = g(t)$.

$t \in F$ donc $\exists (t_1, t_2) \in \mathrm{Im}\, f \times \mathrm{Ker}\, g$, $t = t_1 + t_2$. $\exists a \in E$, $t_1 = f(a)$.

$z = g(t) = g(t_1) + g(t_2) \underset{t_2 \in \mathrm{Ker}\, g}{=} g(t_1) = g(f(a))$; $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, $z \in g(f(E))$.

Alors $g(F) \subset g(f(E))$.

Finalement $F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$ donne $g(f(E)) = g(F)$.

Par conséquent $F = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g \iff g(f(E)) = g(F) \iff \mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}\, g$.

Q2 Pour $t \in f(E)$, $h(t) = g(t)$. g étant linéaire, h est une application linéaire de $f(E)$ dans G. Le théorème du rang donne alors

$\mathrm{rg}\, f = \dim f(E) = \dim \mathrm{Im}\, h + \dim \mathrm{Ker}\, h = \dim h(f(E)) + \dim \mathrm{Ker}\, h = \dim g(f(E)) + \dim \mathrm{Ker}\, h$.

$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g\circ f + \dim \mathrm{Ker}\, h$. Ainsi $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f \iff \dim \mathrm{Ker}\, h = 0$.

Soit $x \in F$. $x \in \mathrm{Ker}\, h \iff x \in f(E)$ et $h(x) = 0_G \iff x \in f(E)$ et $g(x) = 0_G \iff x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

$\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$. $\mathrm{Ker}\, h \subset f(E)$

Ainsi $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}\, f \iff \dim \mathrm{Ker}\, h = 0 \iff \mathrm{Ker}\, h = \{0_F\} \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0_F\}$.

$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0_F\}$.

Exercice 3. Endomorphisme dont le carré est $-Id$. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n non nulle.

Q1. f est un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$.

Montrer que si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille d'éléments de E telle que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \dots, e_p, f(e_p))$ soit libre et non génératrice alors il existe un élément e_{p+1} de E tel que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \dots, e_{p+1}, f(e_{p+1}))$ soit libre. En déduire que n est pair. Représenter f par une matrice simple.

Q2. On suppose que n est pair. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -Id_E$.

(Q1) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$. Cette famille n'étant pas génératrice : $F \subsetneq E$. Ainsi $\exists\, e_{p+1} \in E \setminus F$.

__Etape 1__ Montrons que $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p), e_{p+1})$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et soit $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f(e_i) = 0_E$.

Supposons $\alpha_{p+1} \neq 0$. Alors $e_{p+1} = -\frac{1}{\alpha_{p+1}} \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f(e_i) \right] \in F$!!

Ainsi $\alpha_{p+1} = 0$. Ceci donne alors : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f(e_i) = 0_E$. Comme la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$ est libre il vient : $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

Finalement $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

Ceci achève de prouver que __$(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p), e_{p+1})$ est libre.__

__Etape 2__ Montrons que $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p), e_{p+1}, f(e_{p+1}))$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que : $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i f(e_i) = 0_E$

Alors $0_E = f(0_E) = f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i f(e_i) + \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i f^2(e_i) = -\sum_{i=1}^{p+1} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i f(e_i)$

Ainsi
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i f(e_i) = 0_E & (1) \\ -\sum_{i=1}^{p+1} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i f(e_i) = 0_E & (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par α_{p+1}, (2) par $-\beta_{p+1}$ et ajoutons pour faire disparaître $f(e_{p+1})$.

Alors $0_E = \sum_{i=1}^{p+1} (\alpha_i \alpha_{p+1} + \beta_i \beta_{p+1}) e_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{p+1} (\beta_i \alpha_{p+1} - \alpha_i \beta_{p+1}) f(e_i)}_{=0 \text{ si } i = p+1}$. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{p+1} (\alpha_i\alpha_{p+1}+\beta_i\beta_{p+1})e_i + \sum_{i=1}^{p} (\beta_i\alpha_{p+1}-\alpha_i\beta_{p+1}) f(e_i) = 0_E .$$

Comme $(e_1,f(e_1),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1})$ est une famille libre (étape 2) on obtient :

$\forall i\in[\![1,p+1]\!]$, $\alpha_i\alpha_{p+1}+\beta_i\beta_{p+1}=0$ et $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\beta_i\alpha_{p+1}-\alpha_i\beta_{p+1}=0$.

En particulier $\underset{i=p+1}{\alpha_{p+1}^2+\beta_{p+1}^2=0}$. Comme α_{p+1} et β_{p+1} sont réels : $\alpha_{p+1}=\beta_{p+1}=0$.

En reprenant (1) on obtient alors : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f(e_i) = 0_E$.

Comme $(e_1,f(e_1),\dots,e_p,f(e_p))$ est libre on obtient :

$\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\alpha_i=\beta_i=0$.

Ainsi $\forall i\in[\![1,p+1]\!]$, $\alpha_i=\beta_i=0$.

Ceci achève de montrer que $(e_1,f(e_1),\dots,e_p,f(e_p),e_{p+1},f(e_{p+1}))$ est libre.

Alors si $(e_1,f(e_1),\dots,e_p,f(e_p))$ est libre et non génératrice il existe un élément e_{p+1} de E tel que $(e_1,f(e_1),\dots,e_{p+1},f(e_{p+1}))$ est libre.

Étape 3 .. Montrons que n est pair.

Soit S l'ensemble des éléments q de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe une famille $(e_1,\dots,e_q)$ de E produisant une famille $(e_1,f(e_1),e_2,f(e_2),\dots,e_q,f(e_q))$ libre.

Montrons que S est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide et majorée.

. Soit a un élément non nul de E ($\dim E \geq 1$). Montrons que $(a,f(a))$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha a+\beta f(a)=0_E$.

Alors $0_E=f(0_E)=f(\alpha a+\beta f(a))=\alpha f(a)-\beta a$.

$\alpha a+\beta f(a)=0_E$ et $\alpha f(a)-\beta a=0_E$.

$\alpha(\alpha a+\beta f(a))-\beta(\alpha f(a)-\beta a)=0_E$; $(\alpha^2+\beta^2)a=0_E$ et $a\neq 0_E$; $\alpha^2+\beta^2=0$.

Alors $\alpha=\beta=0$ car α et β sont deux réels. Ainsi $(a,f(a))$ est libre donc $1\in S$.

$S\neq\emptyset$.

• Soit $q \in \mathcal{S}$. $\exists (e_1,\dots,e_q) \in E^q$ tel que $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ est libre.
Cette famille est de cardinal $2q$ donc $2q \le \dim E = n$; $q \le \frac{n}{2}$; $q \le E(\frac{n}{2})+1$.
$E(\frac{n}{2})+1$ est un majorant de $\mathcal{S}$ (dans $\mathbb{N}^*$).

<u>$\mathcal{S}$ est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$.</u>

Alors $\mathcal{S}$ possède un plus grand élément p.

$\exists (e_1,\dots,e_p) \in E^p$ tel que $\mathcal{B}=(e_1, f(e_1),\dots,e_p,f(e_p))$ est libre.

Supposons $\mathcal{B}$ non génératrice. Alors d'après ce qui précède il existe e_{p+1} dans E tel que $(e_1,f(e_1),\dots,e_{p+1},f(e_{p+1}))$ est libre. Ainsi $p+1 \in \mathcal{S}$.

Alors $p+1\in \mathcal{S}$ et $p+1 > p = \max \mathcal{S}$!!

Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et génératrice. $\mathcal{B}$ est une base de E.

Alors $\dim E = \operatorname{card} \mathcal{B} = 2p$. $n=\dim E = 2p$.

<u>E est de dimension paire.</u>

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(e_i) = f(e_i)$!! et $f(f(e_i)) = -e_i$. $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & (0) \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

Q2 Réciproquement supposons $n=\dim E$ pair(e).

$\exists p \in \mathbb{N}^*$, $n=2p$.

Soit $(u_1,u_2,\dots,u_p,u_{p+1},\dots,u_{2p})$ une base de E.

Soit f l'unique application linéaire de E dans E qui transforme la base $\mathcal{B}=(u_1,\dots,u_p,u_{p+1},\dots,u_{2p})$ en la famille $(u_{p+1},\dots,u_{2p},-u_1,\dots,-u_p)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f^2(u_i) = f(u_{p+i}) = -u_i$ et $\forall i\in[\![p+1,2p]\!]$, $f^2(u_i) = f(-u_{i-p}) = -f(u_{i-p}) = -u_i$

f^2 et $-\mathrm{Id}_E$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E ; $f^2=-\mathrm{Id}_E$.

Alors <u>$\dim E$ est paire si et seulement si il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2=-\mathrm{Id}_E$</u>

Exercice 4 Projection.

u et v sont deux endomorphismes de E.
Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont deux projections ayant même noyau.

* Supposons que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.
$u \circ u = (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u) = u \circ v = u$.
$u \in \mathcal{L}(E)$ et $u \circ u = u$ donc u est une projection.
On montre de même que v est une projection.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, $u(x) = 0_E$; $v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$ donc $v(x) = v(u(x)) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker} v$.
Ainsi $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$. On montre de même que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.
u et v sont donc deux projections de même noyau.

* Réciproquement supposons que u et v sont deux projections de même noyau.
Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$, $x = x_1 + x_2$. $x_2 = u(x)$.
Alors $x - u(x) = x - x_2 = x_1 \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$, ainsi $v(x - u(x)) = 0_E$.
Par conséquent : $v(x) - v(u(x)) = 0_E$; $v(u(x)) = v(x)$.
$\forall x \in E$, $v(u(x)) = v(x)$. $v \circ u = v$. On montre de même que $u \circ v = u$.

Exercice 5 Endomorphisme d'un espace vectoriel de fonctions.

ESCP 98 E est l'espace vectoriel des applications continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. F est l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. A tout élément f de E on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall t \in [0,1]\, T(f)(t) = \int_0^t \int_v^1 f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Q1. Soit f un élement de E. On pose $g = T(f)$. Montrer que g appartient à F et calculer g''.
Q2. Montrer que T est une application linéaire injective de E dans F.
Q3. Montrer que $\operatorname{Im} T = \{g \in F \mid g(0) = g'(1) = 0\}$.

Q1 $f \in E$. f est continue sur $[0,1]$. $H : v \mapsto \int_v^1 f(u)\,du$ est la primitive de $-f$ sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 1 ; $T(f) : t \mapsto \int_0^t \int_v^1 f(u)\,du\,dv$ est alors la primitive sur $[0,1]$ de H qui prend la valeur 0 en 0.
Ainsi $T(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et $(T(f))' = H$. Alors $(T(f))'$ est dérivable sur $[0,1]$ et $(T(f))'' = H' = -f$.

Ainsi $T(f)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et $(T(f))'' = -f$.
Comme f est continue sur $[0,1]$, $(T(f))''$ est continue sur $[0,1]$.
$T(f)$ est donc $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $(T(f))'' = -f$.

Q2 D'après ce qui précède : $\forall f \in E$, $T(f) \in F$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f_1, f_2) \in E^2$.

$\forall t \in [0,1]$, $T(\lambda f_1 + f_2)(t) = \int_0^t \int_v^1 (\lambda f_1 + f_2)(u)\,du\,dv = \int_0^t \left(\lambda \int_v^1 f_1(u)\,du + \int_v^1 f_2(u)\,du\right)$

$\forall t \in [0,1]$, $T(\lambda f_1 + f_2)(t) = \lambda \int_0^t \int_v^1 f_1(u)\,du + \int_0^t \int_v^1 f_2(u)\,du = \lambda T(f_1)(t) + T(f_2)(t)$.

Donc $T(\lambda f_1 + f_2) = \lambda T(f_1) + T(f_2)$.

Ainsi $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Q3 * Soit $g \in \operatorname{Im} T$. $\exists f \in E$, $T(f) = g$. $\forall t \in [0,1]$, $g(t) = \int_0^t \int_v^1 f(u)\,du\,dv$

Donc $g(0) = 0$.

$\forall t \in [0,1]$, $g'(t) = \int_t^1 f(u)\,du$; $g'(1) = 0$.

Si $g \in \operatorname{Im} T$: $g(0) = g'(1) = 0$.

* Réciproquement soit h un élément de F tel que $h(0) = h'(1) = 0$. Montrons que $h \in \operatorname{Im} T$.

Posons $f = -h''$ ($T(f) = h \Rightarrow (T(f))'' = h'' \Rightarrow -f = h''$ ... you see ?)

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$. $f \in E$.

Montrons alors que $T(f) = h$.

$(T(f))'' = -f = h''$; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(T(f))' = -h' + \lambda$. Or $(T(f))'(1) = h'(1) = 0$; $\lambda = 0$.

Alors $(T(f))' = h'$. $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $T(f) = h + \mu$. Or $T(f)(0) = h(0) = 0$; $\mu = 0$.

Ainsi $T(f) = h$. Alors $h \in \operatorname{Im} T$.

Finalement $\operatorname{Im} T = \{ g \in F \mid g(0) = g'(1) = 0 \}$.

Exercice 6 $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (8+3X)P + (-5X+X^2)P' + (X^2 - X^3)P''$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Soit P un élément de E de degré q strictement plus grand que 3. Préciser le degré de $f(P)$. Qu'en déduire pour $\operatorname{Ker} f$? Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Q1 • f est clairement une application de E dans E.

• Soit $(P,Q) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$f(\lambda P+Q) = (8+3X)(\lambda P+Q) + (-5X+X^2)(\lambda P+Q)' + (X^2-X^3)(\lambda P+Q)''$

$f(\lambda P+Q) = (8+3X)(\lambda P+Q) + (-5X+X^2)(\lambda P'+Q') + (X^2-X^3)(\lambda P''+Q'')$

$f(\lambda P+Q) = \lambda\big((8+3X)P + (-5X+X^2)P' + (X^2-X^3)P''\big) + \big((8+3X)Q + (-5X+X^2)Q' + (X^2-X^3)Q''\big)$

$f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

$\forall (P,Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

f est un endomorphisme de E.

Q2 $\boxed{\text{⚠ Le type de raisonnement sur le degré qui va suivre est très important.}}$

Soit P un élément de E de degré q avec $q \geq 3$.

$\deg (8+3X)P = q+1$, $\deg (-5X+X^2)P' = 2+q-1 = q+1$ et $\deg (X^2-X^3)P'' = 3+q-2 = q+1$.

Alors $\deg\big((8+3X)P + (-5X+X^2)P' + (X^2-X^3)P''\big) \leq q+1$. $\deg f(P) \leq q+1$.

Notons a_q le coefficient de X^q dans P. $a_q \neq 0$.

Calculons le coefficient de X^{q+1} dans $f(P)$. Notons que le coefficient de X^{q-1} dans P' est $q a_q$ et le coefficient de X^{q-2} dans P'' est $q(q-1)a_q$.

Alors 1) le coefficient de X^{q+1} dans $(8+3X)P$ est : $3a_q$

2) le coefficient de X^{q+1} dans $(-5X+X^2)P'$ est : $q a_q$

3) le coefficient de X^{q+1} dans $(X^2-X^3)P''$ est : $-q(q-1)a_q$.

Alors le coefficient de X^{q+1} dans $f(P)$ est : $(3+q-q(q-1))a_q$ ou $(-q^2+2q+3)a_q$.

Notons que $(-q^2+2q+3)a_q = (q+1)(3-q)a_q$. Or $q>3$ et $a_q \neq 0$.

Ainsi $\deg f(P) \leqslant q+1$ et le coefficient de X^{q+1} dans $f(P)$ n'est pas nul.

Alors $\deg f(P) = q+1$.

Si $P\in E$ et si $\deg P = q$ avec $q>3$ alors $\deg f(P) = q+1$.

On $\forall P\in E$, $\deg P > 3 \Rightarrow \deg f(P) = \deg P + 1$.

Supposons que P soit un élément de $\mathrm{Ker} f$ tel que $\deg P > 3$.

Alors $\deg f(P) = \deg P + 1 > 4$. Or $f(P) = 0_E$!!

Par conséquent : $\forall P \in \mathrm{Ker} f$, $\deg P \leqslant 3$. $\mathrm{Ker} f \subset \mathbb{K}_3[X]$.

Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d$ $\mathbb{K}_3[X]$. $P' = 3aX^2+2bX+c$ et $P'' = 6aX+2b$.

$P\in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = 0_E \Leftrightarrow (8+3X)(aX^3+bX^2+cX+d)+(-5X+X^2)(3aX^2+2bX+c)+(X^2-X^3)(6aX+2b)$.

$P\in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow 8aX^3+8bX^2+8cX+8d+3aX^4+3bX^3+3cX^2+3dX-15aX^3-10bX^2-5cX+3aX^4+2bX^3+cX^2$
$+6aX^3+2bX^2-6aX^4-2bX^3=0.$

$P\in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow (3a+3a-6a)X^4+(8a+3b-15a+2b+6a-2b)X^3+(8b+3c-10b+c+2b)X^2$
$+(8c+3d-5c)X+8d=0$

$$P\in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} -a+3b=0 \\ 4c=0 \\ 3c+3d=0 \\ 8d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}.$$

$\mathrm{Ker} f = \{3bX^3+bX^2,\ b\in\mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(3X^3+X^2)$.

Ker f est la droite vectorielle engendrée par $3X^3+X^2$.

Exercice 7 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. P est le plan d'quation $x - y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et D est la droite vectorielle de E engendrée par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3$.

Q1. Vérifier que P et D sont supplémentaires dans E. Donner une base de P.

Q2. Donner la matrice de la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D (on pourra s'intresser aux images par s des vecteurs d'une base de P et d'une base de D.)

Q1 • $\dim P + \dim D = 2+1 = 3 = \dim E$.

• Soit $u \in P \cap D$ $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda(e_1 - e_2 + e_3) = \lambda e_1 - \lambda e_2 + \lambda e_3$ car $u \in D$.

Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont $(\lambda, -\lambda, \lambda)$ et $u \in P$. Ainsi : $\lambda - (-\lambda) + \lambda = 0$.

$3\lambda = 0$. $\lambda = 0$. $u = 0_E$.

Donc $P \cap D = \{0_E\}$.

$P = \{x e_1 + y e_2 + z e_3 \in E \mid y = x + z\}$

$P = \{x e_1 + (x+z) e_2 + z e_3 \; ; \; (x,z) \in \mathbb{K}^2\} = \{x(e_1 + e_2) + z(e_2 + e_3) ; (x,z) \in \mathbb{K}^2\}$.

Alors $P = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$. $(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ est une famille génératrice de P de cardinal 2 et P est de dimension 2.

Ainsi $(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$ est une base de P.

Q2 $P = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $D = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. Alors $\forall u \in P$, $s(u) = u$ et $\forall u \in D$, $s(u) = -u$.

En particulier $s(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, $s(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$ et $s(e_1 - e_2 + e_3) = -(e_1 - e_2 + e_3)$.

Ainsi $\begin{cases} s(e_1) + s(e_2) = e_1 + e_2 & (1) \\ s(e_2) + s(e_3) = e_2 + e_3 & (2) \\ s(e_1) - s(e_2) + s(e_3) = -e_1 + e_2 - e_3 & (3) \end{cases}$

(1)+(2)−(3) donne : $3 s(e_2) = e_1 + e_2 + e_2 + e_3 + e_1 - e_2 + e_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

$s(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 + 2e_3)$. (1) donne $s(e_1) = e_1 + e_2 - s(e_2) = \frac{1}{3}(3e_1 + 3e_2 - 2e_1 - e_2 - 2e_3)$.

$s(e_1) = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 - 2e_3)$. (2) donne $s(e_3) = e_2 + e_3 - s(e_2) = \frac{1}{3}(3e_2 + 3e_3 - 2e_1 - e_2 - 2e_3)$

$s(e_3) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 2e_2 + e_3)$.

Alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 **Endomorphisme de fonction.**

E est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique. Pour tout élément f de E, on pose : $\Phi(f) = f'$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. a) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{g \in E \mid \int_0^1 g(t)\,dt = 0\}$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$ sont supplémentaires.

Q1 Notons E' l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

* $E \subset E'$

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{E'}(x) = 0$. Ainsi $0_{E'}$ est 1 périodique. Alors $0_{E'} \in E$.

Donc E n'est pas vide.

* Soit $(f,g) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(f,g) \in E^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)(x+1) = \lambda f(x+1) + g(x+1) \overset{\oint}{=} \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f+g)(x)$. Ainsi $\lambda f+g$ est 1-périodique donc appartient à E.

Les trois points précédents montrent que E est un sous-espace vectoriel de E'.

Ainsi <u>E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

▲ Soit f un élément de E. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f' est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus f est 1-périodique. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.

En dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+1) = f'(x)$. f' est 1-périodique.

Alors $f' \in E$.

<u>ϕ est une application de E dans E.</u>

▲ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\phi(\lambda f+g) = (\lambda f+g)' = \lambda f' + g' = \lambda\,\phi(f) + \phi(g)$. <u>$\phi$ est linéaire</u>

<u>ϕ est un endomorphisme de E.</u>

Q2 a) Soit $f \in \operatorname{Ker}\phi$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est constante.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et f est 1-périodique donc $f \in E$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = f'(x) = 0$; $\phi(f) = 0_E$. $f \in \operatorname{Ker}\phi$.

Ainsi $\operatorname{Ker}\phi = \{f \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda\}$ ou $\operatorname{Ker}\phi$ est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $g \in \operatorname{Im}\phi$. $\exists f \in E$, $\phi(f) = g$; $g = f'$. Alors $\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0) = 0$ (f est 1-périodique)
- Réciproquement soit g un élément de E tel que $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

Soit f une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Montrons que $f \in E$ et que $\phi(f) = g$ ainsi g appartiendra à $\operatorname{Im}\phi$.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f est une primitive de g donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x+1) - f(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x+1) - f'(x) = g(x+1) - g(x) = 0$ ($g \in E$).

h est donc constante sur $\mathbb{R}$.

De plus $h(0) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. f est 1-périodique.

Ceci achève de montrer que f appartient à E. De plus $\phi(f) = f' = g$. Alors $g \in \operatorname{Im}\phi$.

Finalement $\operatorname{Im}\phi = \{g \in E \mid \int_0^1 g(t)\,dt\}$.

b) Soit f un élément de E. Montrons par analyse-synthèse que : $\exists!(f_1, f_2) \in \operatorname{Ker}\phi \times \operatorname{Im}\phi$, $f = f_1 + f_2$

ANALYSE/UNICITÉ Supposons que $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \operatorname{Ker}\phi$ et $f_2 \in \operatorname{Im}\phi$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \lambda$ et $\int_0^1 f_2(t)\,dt = 0$.

Alors $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \lambda\,dt + \int_0^1 f_2(t)\,dt = \lambda$. $\lambda = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$ et $f_2(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt$. D'où l'unicité.

SYNTHÈSE / EXISTENCE. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^1 f(t)dt$ et $f_2(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt$.

f_1 est constante sur $\mathbb{R}$ donc $f_1 \in \operatorname{Ker} \phi$.

$f_2 = f - f_1$, $f \in E$ et $f_1 \in E$ donc $f_2 \in E$.

De plus $\int_0^1 f_2(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f_1(t)dt \overset{f_1 \text{ est constante}}{=} \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f_1(253)dt$!!

$$\int_0^1 f_2(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - f_1(253) = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = 0.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^1 f(t)dt$ donc $f_1(253) = \int_0^1 f(t)dt$.

Alors $f_2 \in E$ et $\int_0^1 f_2(t)dt = 0$. $f_2 \in \operatorname{Im} \phi$.

Ainsi $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \operatorname{Ker} \phi$ et $f_2 \in \operatorname{Im} \phi$. D'où l'existence.

Finalement $\forall f \in E$, $\exists! (f_1, f_2) \in \operatorname{Ker} \phi \times \operatorname{Im} \phi$, $f = f_1 + f_2$.

Alors $E = \operatorname{Ker} \phi \oplus \operatorname{Im} \phi$.

Exercice 9 .. u et v sont deux endomorphismes tels que $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$

Soit $x \in E$. Montrons par analyse / synthèse que : $\exists! (y, z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} v$, $x = y + z$.

Analyse / Unicité. Supposons que $\exists (y, z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} v$, $x = y + z$.

Alors $u(y) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $z = v(t)$. $u(x) = u(y) + u(z) = u(z) = u(v(t))$.

Alors $v(u(x)) = v(u(v(t))) \underset{v \circ u \circ v = v}{=} v(t) = z$. Ainsi $z = v(u(x))$ et $y = x - v(u(x))$.

Synthèse / existence. Posons $y = x - v(u(x))$ et $z = v(u(x))$.

- $y + z = x$
- $u(y) = u(x) - u(v(u(x))) \overset{u \circ v \circ u = u}{=} u(x) - u(x) = 0$; $y \in \operatorname{Ker} u$.
- $z = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$!

Ainsi $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} u$ et $z \in \operatorname{Im} v$.

$\forall x \in E$, $\exists! (y, z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} v$, $x = y + z$

<u>Exercice 10</u> E est l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

$F=\{(u_n)_{n\geq 0}\in E \mid \forall k\in\mathbb{N},\ u_{2k+1}=u_{2k}\}$ et $G=\{(u_n)_{n\geq 0}\in E \mid \forall k\in\mathbb{N},\ u_{2k+1}=0\}$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et que $E=F\oplus G$.

- $F\subset E$ et $G\subset E$.
- La suite nulle de E est clairement un élément de F et de G donc F et G sont non vides.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\geq 0}$ et $v=(v_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de F (resp. G).

$\forall k\in\mathbb{N},\ u_{2k+1}=u_{2k}$ et $v_{2k+1}=v_{2k}$ (resp. $\forall k\in\mathbb{N},\ u_{2k+1}=v_{2k+1}=0$).

Posons $w=\lambda u+v$ et montrons que w appartient à F (resp. G).

$\forall k\in\mathbb{N},\ w_{2k}=\lambda u_{2k}+v_{2k}=\lambda u_{2k+1}+v_{2k+1}=w_{2k+1}$ (resp. $\forall k\in\mathbb{N},\ w_{2k+1}=\lambda u_{2k+1}+v_{2k+1}=\lambda\times 0+0=0$).

Ainsi $w=\lambda u+v\in F$ (resp. G). Ceci achève de montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrons que $E=F\oplus G$ c'est à dire que $\forall u\in E,\ \exists!(v,w)\in F\times G,\ u=v+w$.

Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E. Montrons par analyse synthèse que : $\exists!(v,w)\in F\times G,\ u=v+w$.

<u>Analyse-unicité</u>. $\boxed{\text{Supposons}}$ que $u=v+w$ avec $v=(v_n)_{n\geq 0}\in F$ et $w=(w_n)_{n\geq 0}\in G$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ u_{2k}=v_{2k}+w_{2k}$ et $u_{2k+1}=v_{2k+1}+w_{2k+1}=v_{2k}+0=v_{2k}$.

Alors $\underline{\forall k\in\mathbb{N},\ v_{2k}=v_{2k+1}=u_{2k+1}}$ $\underline{w_{2k}}=u_{2k}-v_{2k}=\underline{u_{2k}-u_{2k+1}}$ et $\underline{w_{2k+1}=0}$

Ceci montre l'unicité des suites v et w.

<u>Synthèse-Existence</u>. $\boxed{\text{Posons}}$ $\forall k\in\mathbb{N},\ v_{2k}=v_{2k+1}=u_{2k+1}$, $w_{2k}=u_{2k}-u_{2k+1}$ et $w_{2k+1}=0$

$v=(v_n)_{n\geq 0}\in F$ et $w=(w_n)_{n\geq 0}\in G$. Montrons que $u=v+w$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ v_{2k}+w_{2k}=u_{2k+1}+u_{2k}-u_{2k+1}=u_{2k}$ et $v_{2k+1}+w_{2k+1}=u_{2k+1}+0=u_{2k+1}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n+w_n$. $u=v+w$.

Ceci achève de montrer l'existence de $(v,w)\in F\times G,\ u=v+w$.

Finalement $\forall u\in E,\ \exists!(v,w)\in F\times G,\ u=v+w$. <u>F et G sont supplémentaires dans E</u>.

Exercice 11 Sous-espaces vectoriels stables.

E est de dimension 3. f est un endomorphisme non nul de E et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par f.

Q1. On suppose $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et on se propose de trouver $\mathcal{S}$.

a) Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que le noyau de f est un plan vectoriel.

c) Soit D une droite de E. Montrer que D est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si : $D \subset \operatorname{Ker} f$

d) Soit P un plan de E. Montrer que P est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si : $\operatorname{Im} f \subset P$

Q2. **Facultatif**. Préciser $\mathcal{S}$ lorsque f^2 n'est pas nul et que : $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Q1 a) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$; $\forall y \in \operatorname{Im} f$, $f(y) = 0_E$; $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b) Alors $0 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 3$.

$f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f \leq 2$ ($\operatorname{Ker} f = E$ ou $\operatorname{Im} f = \{0_E\}$ donne $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$)

$1 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 2$. Si $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$: $3 = \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2 \dim \operatorname{Ker} f$!!

Ainsi $1 \leq \dim \operatorname{Im} f < \dim \operatorname{Ker} f \leq 2$; $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

$\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel.

c) Soit D une droite de E.

* Supposons que $D \in \mathcal{S}$. Alors $f(D) \subset D$. Ainsi $\dim f(D) \leq 1$

1er cas.. $\dim f(D) = 1$. Alors $f(D) \subset D$ et $\dim f(D) = \dim D$; $f(D) = D$.

Alors $f^2(D) = D$. Comme $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $D = \{0_E\}$!!

2e cas.. $\dim f(D) = 0$. $f(D) = \{0_E\}$. D est donc contenu dans $\operatorname{Ker} f$.

* Supposons que : $D \subset \operatorname{Ker} f$.

$\forall x \in D$, $f(x) = 0_E$. $f(D) = \{0_E\} \subset D$. $f(D) \subset D$. $D \in \mathcal{S}$.

$D \in \mathcal{S} \Leftrightarrow D \subset \operatorname{Ker} f$.

d) Soit P un plan de E.

* Supposons que $P \in \mathcal{S}$. $f(P) \subset P$; $\dim f(P) \leq 2$.

1er cas.. $\dim f(P) = 2$. Alors $f(P) = P$; $f^2(P) = f(P) = P$. Or $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $P = \{0_E\}$!!

2e cas.. $\dim f(P) = 1$. Posons $\Delta = f(P)$. Δ est une droite vectorielle.

$\Delta = f(P) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$ et $\dim \Delta = \dim \operatorname{Im} f = 1$. Alors $\operatorname{Im} f = \Delta = f(P) \subset P$.

Ainsi si $P \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Im} f \subset P$.

- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im} f \subset P$.

  $f(P) \subset f(E) = \mathrm{Im} f \subset P$; $P \in \mathcal{S}$

 Finalement $\underline{P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset P}$.

Q2 $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors ce qui précède appliqué à f^2 permet de dire que $\dim \mathrm{Ker} f^2 = 2$ et $\dim \mathrm{Im} f^2 = 1$.

$\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.

Supposons $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$. Soit $x \in E$; $f^3(x) = 0_E$; $f(x) \in \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$; $f^2(x) = 0_E$.

Si $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ alors $\forall x \in E$, $f^2(x) = 0_E$!

Ainsi $\mathrm{Ker} f \subsetneq \mathrm{Ker} f^2$. Alors $\dim \mathrm{Ker} f = 0$ ou 1.

Si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, f est injective donc $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ également !!

Ainsi $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. Alors $\dim \underline{\mathrm{Im} f = 2}$.

$f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f^2$; comme $\dim \mathrm{Im} f = 2 = \dim \mathrm{Ker} f^2$: $\underline{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f^2}$.

→ Soit D une droite de E.

- Supposons que $D \in \mathcal{S}$. $f(D) \subset D$. Ainsi $f(D) = D$ ou $f(D) = \{0_E\}$.

  $f(D) = D \Rightarrow f^3(D) = D \Rightarrow D = \{0_E\}$!! Alors $f(D) = \{0_E\}$. $D \subset \mathrm{Ker} f$.

  Comme $\dim D = 1 = \dim \mathrm{Ker} f$, $D = \mathrm{Ker} f$

- Réciproquement si $D = \mathrm{Ker} f$: $f(D) = \{0_E\} \subset D$; $D \in \mathcal{S}$.

  $\underline{D \in \mathcal{S} \Leftrightarrow D = \mathrm{Ker} f}$.

→ Soit P un plan de E.

- Supposons $P \in \mathcal{S}$. $f(P) \subset P$. $f(P) = P \Rightarrow f^3(P) = P \Rightarrow P = \{0_E\}$!!

  $f(P) = \{0_E\} \Rightarrow P \subset \mathrm{Ker} f \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f \geq 2$!!

  Ainsi $f(P) = D$ où D est une droite vectorielle ; $f(D) = f^2(P) \subset f(P) = D$.

  $f(D) \subset D$. $f(D) = D \Rightarrow f^3(D) = D \Rightarrow D = \{0_E\}$. Donc $f(D) = \{0_E\}$. $f(f(P)) = f(D) = \{0_E\}$.

  $P \subset \mathrm{Ker} f^2$ et $\dim P = \dim \mathrm{Ker} f^2 = 2$; $P = \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Im} f$. $P = \mathrm{Im} f$.

  Réciproquement si $P = \mathrm{Im} f$, $f(P) = f(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f = P$; $P \in \mathcal{S}$. $\underline{P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow P = \mathrm{Im} f}$.

  Finalement $\underline{\mathcal{S} = \{0_E, \mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f, E\}}$.

Exercice 12 **Polynôme minimal.**

E est un espace vectoriel de dimension n non nulle sur $\mathbb{K}$.

f est un endomorphisme de E et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des polyômes annulateurs de f.

Ainsi $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Q1. Montrer que si P appartient à $\mathcal{S}$ et si Q appartient à $\mathbb{K}[X]$, PQ appartient à $\mathcal{S}$.

Q2. Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(E)$. Que dire de la famille $\left(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n^2}\right)$ de $\mathcal{L}(E)$?

En déduire que f possède un polynôme annulateur non nul.

Q3. a) Justifier l'existence d'un minimum r pour $\{\deg P\,;\, P \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$. A est un polynôme de $\mathcal{S}$ de degré r.

b) En utilisant la division euclidienne montrer que tout élément P de $\mathcal{S}$ est divisible par A. En déduire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble de multiples de A.

c) Montrer qu'il existe un polynôme unitaire B et un seul tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble de multiples de B.

Q1 Soit P un élément de $\mathcal{S}$ et soit Q un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$(PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f) \underset{P\in\mathcal{S}}{=} Q(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $PQ \in \mathcal{S}$.

Ainsi $\forall P \in \mathcal{S}, \forall Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathcal{S}$.

Q2 $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2 = n^2$. Posons $p = n^2$.

$(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^p)$ est une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ de cardinal $p+1$ ou n^2+1 et $\mathcal{L}(E)$ est dimension n^2. Nécessairement cette famille est liée.

Alors $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k X^k$.

1° $P \in \mathbb{K}[X]$ 2° $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ car $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$. 3° $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi f possède un polynôme annulateur non nul.

Q3 a) D'après ce qui précède $\mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ n'est pas vide.

Ainsi $\mathcal{D} = \{\deg P\,;\, P \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$

$\mathcal{D} = \{\deg P\,;\, P \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$ possède donc un plus petit élément r.

b) A est donc un élément de $\mathcal{I}$ de degré r où r est le plus petit élément de $\mathcal{D}$.

Soit P un élément de $\mathcal{I}$. $\exists !\, (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\begin{cases} P = AQ+R \\ \deg R < \deg A = r \end{cases}$.

$0_{\mathcal{L}(E)} = P(f) = (AQ)(f) + R(f) = R(f)$ car $AQ \in \mathcal{I}$ puisque $A \in \mathcal{I}$.

donc $R(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $R \in \mathcal{I}$ et $\deg R < r$

Supposons R non nul. Alors $\deg R \in \mathcal{D}$ et $\deg R$ est strictement plus petit que le plus petit élément de $\mathcal{D}$. Ainsi une légère contradiction s'installe. Par conséquent R est nul. Alors $P = AQ$. P est divisible par A.

<u>Tout élément P de $\mathcal{I}$ est divisible par A ou tout élément de $\mathcal{I}$ est un multiple de A.</u>

Ainsi $\mathcal{I} \subset \{AQ\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Comme $A \in \mathcal{I}$, Q_1 montre que $\{AQ\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathcal{I}$.

Finalement $\mathcal{I} = \{AQ\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$. <u>$\mathcal{I}$ est l'ensemble des multiples de A.</u>

c) A n'est pas nul. Soit a le coefficient du terme de plus haut degré de A.

* Posons $B = \frac{1}{a} A$. 1°/ B est unitaire 2°/ comme l'ensemble des multiples de B coïncide avec l'ensemble des multiples de A (OK?), $\mathcal{I}$ est l'ensemble des multiples de B.

* Notons l'unicité de B. Soit C un polynôme unitaire tel que $\mathcal{I}$ soit l'ensemble des multiples de C. B (resp. C) est un multiple de B (resp. C) donc $B \in \mathcal{I}$ (resp. $C \in \mathcal{I}$).

Alors $\exists P_1 \in \mathbb{K}[X]$, $B = P_1 C$ et $\exists P_2 \in \mathbb{K}[X]$, $C = P_2 B$. Donc $C = P_2 P_1 C$.

Or C n'est pas nul (C est unitaire) donc $P_1 P_2 = 1$. Alors les deux polynômes P_1 et P_2 sont des polynômes constants. $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$, $P_1 = \alpha$. $B = \alpha C$. Comme B et C sont unitaires : $\alpha = 1$. $B = C$.

<u>Il existe un polynôme unitaire B et un seul tel que $\mathcal{I}$ soit l'ensemble des multiples de B.</u>

<u>B est le POLYNÔME MINIMAL de f.</u>

Exercice 13 **Automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$**

n est dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q1. Montrer que pour tout élément P de E, il existe un unique élément $\widehat{P}$ de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{P}(x).$$

Q2. Montrer que l'application f, qui à P dans E associe $\widehat{P}$ est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.

Q1 • Soit P un élément de E. Notons Q la primitive de P qui s'annule en 1.
$Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $Q(1) = 0$.
Alors $\exists\, \widehat{P} \in \mathbb{R}[X]$, $Q = (X-1)\widehat{P}$. Comme $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $\deg(X-1) = 1$:
$\widehat{P} \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\underline{\widehat{P} \in E}$.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \frac{1}{x-1}Q(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)\widehat{P}(x) = \widehat{P}(x)$.
Donc $\widehat{P}$ est un élément de E tel que $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \widehat{P}(x)$.

• Notons l'unicité de $\widehat{P}$. Soit $\widehat{P}_1$ un élément de E tel que
$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \widehat{P}_1(x)$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\widehat{P}(x) = \widehat{P}_1(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $(\widehat{P}-\widehat{P}_1)(x) = 0$.
Alors $\widehat{P}-\widehat{P}_1$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant une infinité de racines.
$\widehat{P}-\widehat{P}_1$ est le polynôme nul. $\widehat{P}_1 = \widehat{P}$.

$$\underline{\underline{\forall P \in E,\ \exists!\, \widehat{P} \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1\},\ \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \widehat{P}(x).}}$$

Q2 → $\underline{f \text{ est une application de } E \text{ dans } E.}$

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in E^2$. Soit $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

$f(\lambda P+Q)(x) = \widehat{\lambda P+Q}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (\lambda P(t)+Q(t))dt = \lambda\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt + \frac{1}{x-1}\int_1^x Q(t)dt$.

$f(\lambda P+Q)(x) = \lambda\widehat{P}(x) + \widehat{Q}(x) = (\lambda\widehat{P}+\widehat{Q})(x) = (\lambda f(P)+f(Q))(x)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$ $(f(\lambda P+Q) - \lambda f(P) - f(Q))(x) = 0$.

$f(\lambda P+Q)-\lambda f(P)-f(Q)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Alors $f(\lambda P+Q)=\lambda f(P)+f(Q)$.

<u>f est linéaire.</u>

→ Soit $P\in \operatorname{Ker} f$. $f(P)=0_E$. $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$, $0=f(P)(x)=\hat{P}(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt$.

$\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$, $\int_1^x P(t)dt=0$. Mieux $\forall x\in \mathbb{R}$, $\int_1^x P(t)dt=0$.

En dérivant il vient $\forall x\in \mathbb{R}$, $P(x)=0$. $P=0_E$.

Alors $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$ donc f est injective. Comme f est une application linéaire de E dans E et que E est de dimension finie : <u>f est une application linéaire bijective de E dans E.</u>

Finalement <u>f est un automorphisme de E.</u>

Soit φ un élément de E. Posons $P=f^{-1}(\varphi)$. $f(P)=\varphi$.

$\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt=\varphi(x)$; $\forall x\in \mathbb{R}-\{1\}$, $\int_1^x P(t)dt=(x-1)\varphi(x)$.

Mieux $\forall x\in \mathbb{R}$, $\int_1^x P(t)dt=(x-1)\varphi(x)$. En dérivant il vient :

$\forall x\in \mathbb{R}$, $P(x)=\varphi(x)+(x-1)\varphi'(x)$. $P=\varphi+(X-1)\varphi'$.

<u>$\forall \varphi\in E$, $f^{-1}(\varphi)=\varphi+(X-1)\varphi'$.</u>

Exercice 14 **Endomorphisme de rang 1. Projection**

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$). f est un endomorphisme de E de rang 1.

Q1. Soit a un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda\, a$. Montrer que $f \circ f = \lambda\, f$.

Q2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe c dans $\mathbb{K}^*$ tel que $c\, f$ soit un projecteur.

ii) $f \circ f$ n'est pas l'application linéaire nulle.

iii) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Q1 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$. Or $f(a) \in \operatorname{Im} f$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(a) = \lambda a$.

Soit $x \in E$. $f(x) \in \operatorname{Im} f$. $\exists \alpha_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \alpha_x a$.

$f(f(x)) = f(\alpha_x a) = \alpha_x f(a) = \alpha_x \lambda a = \lambda(\alpha_x a) = \lambda f(x)$.

$\forall x \in E,\ (f \circ f)(x) = \lambda f(x)$. $f \circ f = \lambda f$.

Q2 i) $\Rightarrow$ ii) Supposons qu'il existe c dans $\mathbb{K}^*$ tel que cf soit un projecteur.

$cf = (cf) \circ (cf) = c^2 f \circ f$. Comme c n'est pas nul : $f \circ f = \frac{1}{c} f$.

$\frac{1}{c} \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ($\dim \operatorname{Im} f = 1$) donc $f \circ f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f \circ f$ n'est pas l'application linéaire nulle.

ii) $\Rightarrow$ iii) Supposons $f \circ f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Rappelons que E est de dimension finie.

1) $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ (d'après le théorème du rang).

2) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $\exists y \in E,\ f(y) = x$ et $f(x) = 0_E$.

$\lambda x = \lambda f(y) = (f \circ f)(y) = f(f(y)) = f(x) = 0_E$. Or λ n'est pas nul car $\lambda = 0$ donne $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi $x = 0_E$.

Par conséquent $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Alors $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

iii) $\Rightarrow$ i) Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Supposons que λ est nul. Alors $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$.

$\forall x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Ker} f$. Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$. Alors $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$.

Comme $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

ceci contredit $\mathrm{rg} f = 1$. Alors $\lambda \neq 0$.

$f \circ f = \lambda f$; $\frac{1}{\lambda^2}(f \circ f) = \frac{1}{\lambda} f$; $(\frac{1}{\lambda} f) \circ (\frac{1}{\lambda} f) = \frac{1}{\lambda} f$.

Posons $c = \frac{1}{\lambda}$. $c \in \mathbb{K}^*$ et cf est un projecteur.

Exercice 15 $E=\mathbb{R}_n[X]$ et d est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P\in E,\ d(P)=P'$.

Trouver les sous-espaces de E stables par d.

---

* . $d(\mathbb{R}_0[X]) = d(\mathrm{Vect}(1)) = \mathrm{Vect}(d(1)) = \mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\} \subset \mathbb{R}_0[X]$.

. $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $d(\mathbb{R}_i[X]) = d(\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^i)) = \mathrm{Vect}(d(1),d(X),\dots,d(X^i))$

$\forall i\in [\![1,n]\!]$, $d(\mathbb{R}_i[X]) = \mathrm{Vect}(0,1,2X,\dots,iX^{i-1}) \subset \mathbb{R}_i[X]$.

Finalement pour tout i dans $[\![0,n]\!]$, $\mathbb{R}_i[X]$ est stable par d. Notons que $\{0_E\}$ est aussi stable par d.

* Soit F un sous-espace de E non réduit à $\{0_E\}$ et stable par d.

Posons $\mathcal{I} = \{\deg P \,;\, P\in F \text{ et } P\neq 0_E\}$. $\mathcal{I}$ est une partie non vide de $[\![0,n]\!]$ donc $\mathcal{I}$ possède un plus grand élément r. $\exists P_r\in F$, $\deg P_r = r$.

Notons que <u>F est contenu dans $\mathbb{R}_r[X]$</u> car $\forall P\in F$, $\deg P\leq r$.

Montrons alors $\mathbb{R}_r[X]$ est contenu dans F.

1er cas.. $r=0$. $F\neq\{0_E\}$, $F\subset\mathbb{R}_0[X]=\mathrm{Vect}(1)$ et $\dim \mathrm{Vect}(1)=1$. Alors $F=\mathbb{R}_0[X]$.

2e cas.. $r\geq 1$. Posons $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $P_i = d^{r-i}(P_r)$

$P_r\in F$ et F est stable par d donc $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $P_i\in F$.

Mieux $\forall i\in[\![0,\underline{r}]\!]$, $P_i\in F$. Alors $\mathrm{Vect}(P_0,P_1,\dots,P_r)\subset F$.

De plus $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $\deg P_i = \deg d^{r-i}(P_r) = \deg P_r-(r-i) = r-(r-i) = i$

Mieux encore $\forall i\in[\![0,\underline{r}]\!]$, $\deg P_i = i$.

$(P_0,P_1,\dots,P_r)$ est une famille de polynômes non nuls, de degrés échelonnés appartenant à $\mathbb{R}_r[X]$. $(P_0,P_1,\dots,P_r)$ est donc une famille libre de cardinal $r+1$ de $\mathbb{R}_r[X]$ qui est de dimension $r+1$. $(P_0,P_1,\dots,P_r)$ est une base de $\mathbb{R}_r[X]$.

Alors $\mathbb{R}_r[X]=\mathrm{Vect}(P_0,P_1,\dots,P_r)\subset F$. Donc <u>$\mathbb{R}_r[X]\subset F$</u>. Finalement $\mathbb{R}_r[X]=F$.

<u>Ceci achève de montrer que les sous-espaces stables par d sont :</u>

<u>$\{0_E\}$, $\mathbb{R}_1[X]$, $\mathbb{R}_2[X]$, $\dots$, $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

Exercice 16 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E. On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

- $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall x \in E$, $u(v(x)) = 0_E$; $\forall x \in E$, $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.

  Alors $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$. $\dim \operatorname{Im} v \leq \dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \dim \operatorname{Im} u$.

  Ainsi $\underline{\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v \leq \dim E = n}$. ou $\underline{\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq n}$.

- Soit $x \in E$. Or $\operatorname{Im}(u+v) = E$, donc $\exists y \in E$, $x = (u+v)(y) = u(y) + v(y)$.

  Donc $x \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

  Par conséquent $E \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Or $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \subset E$.

  Donc $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

  Alors $n = \dim E = \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.

  Donc $n \leq \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$, $\underline{n \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v}$.

  Finalement $\underline{\underline{\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n}}$.

Exercice 17 E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($n \geqslant 2$).

Q1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G = E$ alors $F = E$ ou $G = E$.

Q2. φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer qu'il existe x dans E tel que $\varphi(x)\,\psi(x) \neq 0$.

Q1 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cup G = E$.

Supposons que $F \neq E$ et $G \neq E$. $\exists x \in E, x \notin F$ et $\exists y \in E, y \notin G$.

$x \in F \cup G$ et $x \notin F$ donc $x \in G$. $y \in F \cup G$ et $y \notin G$ donc $y \in F$.

$x+y \in E$ donc $x+y \in F \cup G$. Alors $x+y \in F$ ou $x+y \in G$.

1er cas.. $x+y \in F$. Comme $y \in F$: $x+y-y \in F$ donc $x \in F$!!

2ème cas.. $x+y \in G$. Comme $x \in G$: $x+y-x \in G$ donc $y \in G$!!

Dans les deux cas on obtient une contradiction.

Alors $F = E$ ou $G = E$.

Q2 Posons $F = \operatorname{Ker} \varphi$ et $G = \operatorname{Ker} \psi$. F et G sont deux hyperplans de E.

Supposons que $\varphi\psi$ est nulle.

$\forall x \in E, \quad \varphi(x)\psi(x) = 0_{\mathbb{K}}$

$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$ ou $\psi(x) = 0_{\mathbb{K}}$

$\forall x \in E, \quad x \in \operatorname{Ker}\varphi$ ou $x \in \operatorname{Ker}\psi$.

Alors $E \subset \operatorname{Ker}\varphi \cup \operatorname{Ker}\psi$. Comme $\operatorname{Ker}\varphi \cup \operatorname{Ker}\psi \subset E$: $\operatorname{Ker}\varphi \cup \operatorname{Ker}\psi = E$.

Or $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\psi$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Donc d'après Q1 $\operatorname{Ker}\varphi = E$ ou $\operatorname{Ker}\psi = E$ ce qui est impossible car $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \operatorname{Ker}\psi = n-1$. Ainsi $\varphi\psi$ n'est pas nulle.

Donc $\exists x \in E, \ \varphi(x)\psi(x) \neq 0$.

Exercice 18 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $n=0$, c'est clair car $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$!

Supposons $n \geq 1$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Par hypothèse : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists p_i \in \mathbb{N}^*$, $f^{p_i}(e_i) = 0_E$.

Posons $q = \max(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^q(e_i) \underset{q \geq p_i}{=} f^{q-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{q-p_i}(0_E) = 0_E$.

Alors les endomorphismes f^q et $0_{\mathcal{L}(E)}$ de E, coïncident sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Ainsi $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 19 f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$ et que $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

Soit g l'application de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} f$ définie par $\forall x \in \operatorname{Im} f$, $g(x) = f(x)$.

- f étant linéaire g est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f$.
- $\operatorname{Im} g = g(\operatorname{Im} f) = g(f(E)) = f(f(E)) = f^2(E)$. $\underline{\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2}$.
- Soit $x \in E$. $x \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow x \in \operatorname{Im} f$ et $g(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \operatorname{Im} f$ et $f(x) = 0_E$

  $x \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. $\underline{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f}$.

Le théorème du rang permet d'écrire :

$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Im} f^2 + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$.

$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2 + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$. $\underline{\underline{\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)}}$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} f \underset{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f}{\geqslant} \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f - \operatorname{rg} f^2 = n - \dim \operatorname{Ker} f - (n - \dim \operatorname{Ker} f^2)$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant \dim \operatorname{Ker} f^2 - \dim \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f}}$.

Exercice 20 **Automorphisme. Supplémentarité en dimension quelconque**

f et g sont deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f \circ g$ est un automorphisme de E.

ii) f est surjective, g est injective et $E = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} g$.

---

i) $\Rightarrow$ ii) • $f\circ g$ est surjective. Soit $x \in E$. $\exists t \in E$, $(f\circ g)(t) = x$. Posons $z = g(t)$.

$z \in E$ et $f(z) = x$.

Alors $\forall x \in E$, $\exists z \in E$, $f(z) = x$. $\underline{\underline{f \text{ est surjective}}}$.

• Soit $x \in \operatorname{Ker} g$. $g(x) = 0_E$; $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(0_E) = 0_E$.

Alors $x \in \operatorname{Ker}(f\circ g)$ et $\operatorname{Ker}(f\circ g) = \{0_E\}$ car $f\circ g$ est injective. Donc $x = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$. $\underline{\underline{g \text{ est injective}}}$.

<u>Exercice de contrôle</u>.. φ est une application de X dans Y et ψ est une application de Y dans Z

Montrer que : $\psi \circ \varphi$ surjective $\Rightarrow$ ψ surjective et $\psi\circ\varphi$ injective $\Rightarrow$ φ injective.

• Soit $x \in E$. Montrons par analyse / synthèse que : $\exists! (y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} g$, $x = y + z$.

<u>Analyse</u> $\rightarrow$ Supposons qu'il existe $(y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} g$, $x = y+z$.
<u>Unicité</u>

$f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$ car $f(y) = 0_E$; $z \in \operatorname{Im} g$ donc $\exists t \in E$, $z = g(t)$.

Alors $f(x) = f(g(t)) = (f\circ g)(t)$. Ainsi $t = (f\circ g)^{-1}(f(x))$ ($f\circ g$ est bijective).

Donc $z = (g\circ (f\circ g)^{-1} \circ f)(x)$ et $y = x - (g \circ (f\circ g)^{-1} \circ f)(x)$.

D'où l'unicité.

<u>Synthèse</u> $\rightarrow$ Posons $y = x - (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(x)$ et $z = (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(x)$.
<u>Existence</u>

1) $y + z = x$!

2) $f(y) = f(x) - f((g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(x)) = f(x) - (\underbrace{f\circ g\circ(f\circ g)^{-1}}_{Id_E}\circ f)(x) = f(x) - f(x) = 0_E$

donc $y \in \operatorname{Ker} f$.

3) $z = g(((f\circ g)^{-1}\circ f)(x))$ donc $z \in \operatorname{Im} g$.

Alors $x = y + z$, $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$. D'où l'existence.

Finalement $\exists! (y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} g$, $x = y + z$ et ceci pour tout x dans E. $\underline{\underline{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g}}$

ii) $\Rightarrow$ i). Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. $f(g(x)) = 0_E$. $g(x) \in \mathrm{Ker} f$.

Mieux $g(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g$. Or $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0_E\}$. Ainsi $g(x) = 0_E$.

Par conséquent $x \in \mathrm{Ker}\, g$. Or $\mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$ car g est injective. Ainsi $x = 0_E$.

$\mathrm{Ker}(f \circ g) = \{0_E\}$. <u>$f \circ g$ est injective.</u>

Soit $y \in E$. $\exists z \in E$, $y = f(z)$ car f est surjective.

$\exists (z_1, z_2) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im}\, g$, $z = z_1 + z_2$ car $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

$y = f(z) = f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) = 0_E + f(z_2) = f(z_2)$.

$z_2 \in \mathrm{Im}\, g$ donc $\exists x \in E$, $z_2 = g(x)$. Alors $y = (f \circ g)(x)$.

Donc $\forall y \in E, \exists x \in E$, $y = (f \circ g)(x)$. $f \circ g$ est surjective.

<u>$f \circ g$ est un automorphisme de E.</u>

Exercice 11 **Caractérisation des homothéties vectorielles.**

f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que si $f = \lambda Id_E$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors f laisse stable les droites vectorielles de E.

Q2. Réciproquement on suppose que f laisse stable les droites vectorielles de E.

a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.

b) Soit u un élément non nul de E. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$ tel que : $f(u) = \lambda u$.

Montrer que si v est un élément de E colinéaire à u : $f(v) = \lambda v$.

Montrer que ceci vaut encore si v est un élément de E tel que (u, v) soit libre (considérer $f(u+v)$).

c) Conclure.

Q1 Supposons que f est une homothétie vectorielle. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda Id_E$.

Soit D une droite vectorielle de E. Il existe un élément non nul a de E tel que $D = Vect(a)$.

$f(D) = f(Vect(a)) = Vect(f(a)) = Vect(\lambda a) \subset Vect(a) = D$ avec égalité si $\lambda \neq 0$. D est stable par f.

<u>Si f est une homothétie vectorielle, f laisse stable toutes les droites de E.</u>

Q2 a) Soit $x \in E$. Supposons $x \neq 0_E$. $D = Vect(x)$ est une droite vectorielle de E donc elle est stable par f. En particulier $f(x) \in D$ car $x \in D$!

Alors $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_x x$. Ceci vaut encore pour $x = 0_E$ il suffit de prendre $\lambda_x = 0$. <u>$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$.</u>

b) • Soit v un élément de $Vect(u)$. $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $v = \alpha u$.

Alors $f(v) = \alpha f(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda v$. $f(v) = \lambda v$.

• Soit v un élément n'appartenant pas à $Vect(u)$. (u, v) est libre.

$\exists \lambda_v \in \mathbb{K}$, $f(v) = \lambda_v v$ et $\exists \lambda_{u+v} \in \mathbb{K}$, $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v)$.

Alors $\lambda_{u+v}(u+v) = f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda_v v$.

Donc $(\lambda_{u+v} - \lambda) u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v) v = 0_E$. Comme (u, v) est libre :

$\lambda_{u+v} - \lambda = \lambda_{u+v} - \lambda_v = 0$. $\lambda = \lambda_{u+v} = \lambda_v$. Alors $f(v) = \lambda_v v = \lambda v$.

Ainsi $\forall v \in E$, $f(v) = \lambda v$. $f = \lambda Id_E$. <u>f est une homothétie vectorielle.</u>

c) <u>Les endomorphismes de E qui laissent stables les droites de E sont les homothéties vectorielles.</u>

Exercice 12 **ESCP 2001 28** **Projections**

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f_1, f_2, ..., f_p sont p endomorphismes non nuls de E tels que :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \mathrm{Id}_E, \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ pour tout } i \neq j.$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ est un élément de $\mathbb{K}^p$. On pose $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \ldots + \alpha_p f_p$.

Q1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, f_i est un projecteur de E.

Q2. Calculer f^k pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

Q3. Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une famille libre.

Q4. Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}\, f_1 \oplus \mathrm{Im}\, f_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, f_p.$$

Q5. Montrer que la famille $(I, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre.

Soit i un élément de $[\![1, p]\!]$. Montrer qu'il existe un unique élément P_i de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $f_i = P_i(f)$.

Q1 Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $f_i = f_i \circ \mathrm{Id}_E = f_i \circ \sum_{k=1}^{p} f_k = \sum_{k=1}^{p} f_i \circ f_k = f_i \circ f_i$

$f_i \circ f_k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $k \neq i$

$f_i \in \mathcal{L}(E)$ et $f_i \circ f_i = f_i$. f_i est un projecteur de E.

Q2 Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i$

- C'est clair pour $k=1$ par définition de f.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^k \alpha_j \underbrace{f_i \circ f_j}_{=0 \text{ si } j \neq i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k \alpha_i \underbrace{f_i \circ f_i}_{f_i}$

$f^{k+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{k+1} f_i$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i$. Notons que ceci est vrai (ou presque) pour $k=0$.

Q3 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_i \circ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $0_{\mathcal{L}(E)} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_i \circ f_k = \lambda_i f_i \circ f_i = \lambda_i f_i$.

Or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f_i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i = 0$. Ceci achève de montrer que $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ est une famille libre.

(Q4) * Soit $x \in E$. $x = (f_1 + f_2 + \dots + f_p)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x) \in \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \dots + \operatorname{Im} f_p$

Alors $E \subset \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \dots + \operatorname{Im} f_p$. Or $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \dots + \operatorname{Im} f_p \subset E$.

Donc $E = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \dots + \operatorname{Im} f_p$. Montrons que cette somme est directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \operatorname{Im} f_1 \times \operatorname{Im} f_2 \times \dots \times \operatorname{Im} f_p$ tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$.

$\exists (z_1, z_2, \dots, z_p) \in E^p$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i(z_i) = x_i$.

Alors $f_1(z_1) + \dots + f_p(z_p) = 0_E$; $\sum_{k=1}^{p} f_k(z_k) = 0_E$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$

On

$0_E = f_i(0_E) = f_i\left(\sum_{k=1}^{p} f_k(z_k)\right) = \sum_{k=1}^{p} (f_i \circ f_k)(z_k) = (f_i \circ f_i)(z_i) = f_i^2(z_i) = f_i(z_i) = x_i$

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0_E$. Ceci achève de montrer que : $\operatorname{Im} f_1, \operatorname{Im} f_2, \dots, \operatorname{Im} f_p$ sont en somme directe.

Finalement $E = \operatorname{Im} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_2 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} f_p$.

(Q5) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que : $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$0_{\mathcal{L}(E)} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\lambda_k \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \alpha_i^k\right) f_i$. Comme la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est libre : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \alpha_i^k = 0$. Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$

$\deg P \leq p-1$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $P(\alpha_i) = 0$. P est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ et P admet p racines deux à deux distinctes.

Donc P est le polynôme nul. Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est libre.

Remarque.. Avant de montrer le résultat établissons un premier résultat.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

$P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k = \sum_{k=0}^{r}\left(a_k \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k f_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k \alpha_i^k\right) f_i = \sum_{i=1}^{p} P(\alpha_i) f_i$.

Finalement $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)=\sum_{i=1}^{p} P(\alpha_i) f_i$ ou $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)=\sum_{k=1}^{p} P(\alpha_k) f_k$

Ainsi si $i \in [\![1,p]\!]$ trouver $P_i \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $P_i(f)=f_i$ revient à trouver P_i dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $P_i(\alpha_k)=\begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

montrons alors le résultat demandé. Soit $i \in [\![1,p]\!]$

* Existence de P_i. ~~Pensons~~ à l'interpolation de Lagrange et posons

$$P_i = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_k)} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p}(X-\alpha_k)$$

1°. $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$.

2°. $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_p$ sont des zéros de P.

3°. $P_i(\alpha_i)=\frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_k)}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p}(\alpha_i-\alpha_k)=1$.

Alors $P_i(f)=\sum_{i=1}^{p} P_i(\alpha_k) f_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}} \underbrace{P_i(\alpha_k)}_{=0} f_k + \underbrace{P_i(\alpha_i)}_{=1} f_i = f_i$.

Donc $\exists P_i \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$, $P_i(f)=f_i$.

* Unicité de P_i. Soit $\hat{P}_i$ un second polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que $\hat{P}_i(f)=f_i$

Posons $\varphi_i = P_i - \hat{P}_i$. $\varphi_i \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $\varphi_i(f)=P_i(f)-\hat{P}_i(f)=f_i-f_i=0_{\mathcal{L}(E)}$

$\exists (a_0,a_1,\dots,a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, $\varphi_i=\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)}=\varphi_i(f)=\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k$. La liberté de $(\mathrm{Id}_E, f,\dots,f^{p-1})$ donne

alors $a_0=a_1=\dots=a_{p-1}=0$. Donc $\varphi=0_{\mathbb{K}_{p-1}[X]}$. Ainsi $\hat{P}_i=P_i$. D'où l'unicité de P_i

Finalement pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ il existe un unique élément P_i de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$

tel que $P_i(f)=f_i$.

Exercice 23 **Transvection.**

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

φ est une forme linéaire non nulle sur E $\big(\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\big)$. H est son noyau. a est un élément non nul de H.

Pour tout élément x de E on pose :

$$f(x) = x + \varphi(x)a.$$

Q1. Montrer que f est un automorphisme de E. Déterminer f^{-1}.

Q2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et un scalaire λ non nul tels que : $f(e_i) = e_i$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = \lambda e_1 + e_n$.

Envisager une réciproque.

Q3. Montrer que les sous-espaces de E stables par f sont les sous-espaces de E contenant a ou contenu dans H.

Q1 • Soit $x \in E$. $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ et $a \in E$ donc $\varphi(x)a \in E$. Alors $f(x) = x + \varphi(x)a \in E$.

<u>f est une application de E dans E.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(x, y) \in E^2$. $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$f(\lambda x + y) = (\lambda x + y) + \varphi(\lambda x + y)a = \lambda x + y + (\lambda\varphi(x) + \varphi(y))a = \lambda(x + \varphi(x)a) + y + \varphi(y)a.$

$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$

<u>f est linéaire.</u>

. Soit $x \in \mathrm{Ker} f$. $f(x) = x + \varphi(x)\, a = 0_E$.

Alors $x = -\varphi(x)a$. $x \in \mathrm{Vect}(a) \subset H$. Donc $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$.

Par conséquent $0_E = x + \varphi(x)a = x$; $x = 0_E$.

Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. f est alors un endomorphisme injectif de E. Comme E est de dimension finie, <u>f est un automorphisme de E.</u>

. Soit $x \in E$. Posons $y = f^{-1}(x)$. $f(y) = x$. $x = y + \varphi(y).a$.

Alors $\varphi(x) = \varphi(y + \varphi(y).a) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(y) \in \mathbb{K}}}{=} \varphi(y) + \varphi(y).\underbrace{\varphi(a)}_{= 0_{\mathbb{K}}} = \varphi(y).$

Donc $x = y + \varphi(y).a = y + \varphi(x).a$; $y = x - \varphi(x).a$; $f^{-1}(x) = x - \varphi(x).a$.

<u>$\forall x \in E,\ f^{-1}(x) = x - \varphi(x).a$</u>

(Q2) * Commençons par une petite analyse. Supposons que $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ soit une base de E solution.

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $e_i=f(e_i)=e_i+\varphi(e_i).a$. $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\varphi(e_i)a=0_E$ et $a\neq 0_E$.

Alors $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\varphi(e_i)=0$. $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $e_i\in \operatorname{Ker}\varphi=H$.

Alors $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une famille libre de cardinal $n-1$ de H qui est de dimension $n-1$.

$(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une base de H.

De plus $\lambda e_1+e_n=f(e_n)=e_n+\varphi(e_n)a$; $\lambda e_1=\varphi(e_n)a$. a n'est pas nul et $\varphi(e_n)$ n'est pas nul (dans le cas contraire $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)=\dots=\varphi(e_n)=0$ donc $\varphi=0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$).

Ainsi $\lambda e_1\neq 0_E$; $\lambda\neq 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi $e_1=\frac{\varphi(e_n)}{\lambda}a$; $e_1\in \operatorname{Vect}(a)$.

Cela suffit pour démarrer une synthèse.

* Posons $e_1=a$. $(e_1)=(a)$ est une famille libre de H. On peut donc la compléter en une base $(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$ de H.

$(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$ est une famille libre de E donc on peut la compléter en une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_{n-1},e_n)$ de E.

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\varphi(e_i)=0_{\mathbb{K}}$ donc $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $f(e_i)=e_i+\varphi(e_i)a=e_i$.

$f(e_n)=e_n+\varphi(e_n)a=e_n+\varphi(e_n)e_1$. Posons $\lambda=\varphi(e_n)$.

Alors $f(e_n)=\lambda e_1+e_n$.

Supposons $\lambda=0$. Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\varphi(e_i)=0_{\mathbb{K}}$. Ainsi $\varphi=0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ car φ coïncide avec $0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ sur la base $\mathcal{B}$. Ce qui est impossible.

Alors $E=\operatorname{Ker}\varphi=H$ or H est un hyperplan de E donc $H\subsetneq E$. ← Inutile...

Ainsi $\lambda\neq 0$.

Donc <u>il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E et un scalaire λ non nul tel que $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $f(e_i)=e_i$ et $f(e_n)=\lambda e_1+e_n$.</u>

Notons que $M_{\mathcal{B}}(f)=\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}\lambda\\0\\\vdots\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ \cdots\ 0 & 1\end{array}\right)$.

<u>Exercice de contrôle</u>.. Établir un lien entre les transvections et l'opération $L_1\leftarrow L_1+\lambda L_n$ puis avec les opérations $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$.

<u>Réciproquement</u> supposons que f est un endomorphisme de E, que $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et λ un scalaire non nul tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i)=e_i$ et $f(e_n)=\lambda e_1+e_n$.

Montrons que l'on peut trouver une forme linéaire non nulle φ sur E et un élément a non nul de son noyau tels que : $\forall x \in E$, $f(x)=x+\varphi(x)a$.

Soit φ la forme linéaire définie par $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi(e_i)=0$ et $\varphi(e_n)=\lambda$.

$\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ car $\lambda \neq 0$. Posons $a=e_1$. a est un élément non nul du noyau de φ. Posons $\forall x \in E$, $g(x)=x+\varphi(x)a$. $g \in \mathcal{L}(E)$ d'après Q1
$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $g(e_i)=e_i+\varphi(e_i)x=e_i=f(e_i)$. $g(e_n)=e_n+\varphi(e_n)a=e_n+\lambda e_1=f(e_n)$. Les endomorphismes f et g de E coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc ils sont égaux. Ainsi $\forall x \in E$, $f(x)=x+\varphi(x)a$.
Ceci achève de montrer la réciproque proposée.

Q3 • Soit F un sous-espace de E stable par f.

1er cas.. $\underline{a \in F}$!

2ème cas.. $a \notin F$. Soit $x \in F$. $f(x) \in F$. Alors $\varphi(x)a = x-f(x) \in F$.

Si $\varphi(x)$ n'est pas nul : $a=\frac{1}{\varphi(x)}(\varphi(x)a) \in F$!! Alors $\varphi(x)=0_{\mathbb{K}}$.

Donc $\forall x \in F$, $\varphi(x)=0_{\mathbb{K}}$. $\forall x \in F$, $x \in \operatorname{Ker}\varphi = H$. $\underline{F \subset H}$.

• Montrons la réciproque. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1er cas.. $a \in F$. $\forall x \in F$, $f(x)=x+\varphi(x)a \in F$!! F est stable par f.

2ème cas.. $F \subset H$. $\forall x \in F$, $f(x)=x+\underbrace{\varphi(x)}_{0_{\mathbb{K}}}a = x \in F$!! F est stable par f.

<u>Les sous-espaces de E stables par f sont les sous-espaces de E contenant a ou contenus dans H.</u>

Exercice 24 **Majoration de la dimension du noyau d'une composée d'endomorphismes.**

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 1$. Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes de E.

Q1. En considérant la restriction de f_1 au noyau de $f_2 \circ f_1$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

Q2. Généraliser le résultat précédent à p endomorphismes de E, $f_1, \ldots, f_p$, avec $p \geqslant 2$.

Q1 Notons g la restriction de f_1 à $\operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$.

$\operatorname{Ker} g = \{x \in \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \mid f_1(x) = 0_E\}$. $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \cap \operatorname{Ker} f_1$.

Or $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$ donc $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f_1$. Alors $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Ker} f_1$.

Soit $x \in \operatorname{Im} g$. $\exists y \in \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$, $x = g(y)$.

$f_2(x) = f_2(g(y)) = f_2(f_1(y)) = (f_2 \circ f_1)(y) = 0_E$. Alors $x \in \operatorname{Ker} f_2$.

Ainsi $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f_2$. Notons qu'alors $\dim \operatorname{Im} g \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_2$.

Le théorème du rang donne : $\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g$.

Donc $\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$.

Q2 Montrons par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont p endomorphismes de E alors $\dim \operatorname{Ker}(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim \operatorname{Ker} f_k$.

- C'est clair pour $p=1$.
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $p+1$. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}$ $p+1$ endomorphismes de E.

Q1 donne $\dim(\operatorname{Ker}(f_{p+1} \circ f_p \circ \cdots \circ f_1)) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1) + \dim \operatorname{Ker} f_{p+1}$.

L'hypothèse de récurrence donne :

$\dim(\operatorname{Ker}(f_{p+1} \circ f_p \circ \cdots \circ f_1)) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2 + \cdots + \dim \operatorname{Ker} f_p + \dim \operatorname{Ker} f_{p+1}$.

Ce qui achève la récurrence.

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont p endomorphismes de E alors

$\dim \operatorname{Ker}(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim \operatorname{Ker} f_k$.

Exercice 25 **Isomorphisme**

E est l'ensemble des applications f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ et telles que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = f(\sqrt{x})$$

F est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f(x/2)$$

Q1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ pour les opérations usuelles.

Q2. A tout élément f de E on associe l'application $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = f(e^x).$$

Montrer que l'application φ qui à f élément de E associe $\varphi(f)$ est un isomorphisme de E sur F.

Q1) * Notons $\hat{E}$ l'espace vectoriel des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0,+\infty[$

- $E \subset \hat{E}$
- Posons $f_0 = 0_{\hat{E}}$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_0(x) = 0$ et $f_0'(x) = 0$.

  $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_0'(x) = f_0(\sqrt{x})$; $f_0 \in E$. $E \neq \emptyset$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$. $\lambda f + g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

  $\forall x \in]0,+\infty[$, $(\lambda f+g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x) = \lambda f(\sqrt{x}) + g(\sqrt{x}) = (\lambda f + g)(\sqrt{x})$; $\lambda f + g \in E$.

E est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\hat{E}$.

<u>E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

* Notons $\hat{F}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $F \subset \hat{F}$
- Posons $g_0 = 0_{\hat{F}}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_0(x) = 0$ et $g_0'(x) = 0$.

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_0'(x) = e^x g_0(x/2)$; $g_0 \in F$. $F \neq \emptyset$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in F^2$. $\lambda f + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x) = \lambda e^x f(x/2) + e^x g(x/2) = e^x (\lambda f + g)(x/2)$; $\lambda f + g \in F$

F est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\hat{F}$.

<u>F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

(Q2) • Montrons que φ est une application de E dans F.

Soit $f \in E$. Montrons que $\varphi(f) \in F$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = f(e^x)$.

$x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \in \mathbb{R}_+^*$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))'(x) = e^x f'(e^x) = e^x f(\sqrt{e^x}) = e^x f(e^{x/2}) = e^x \varphi(f)(x/2)$.

Ceci achève de montrer que $\varphi(f) \in F$.

<u>φ est une application de E dans F.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(\lambda f+g))(x) = (\lambda f+g)(e^x) = \lambda f(e^x) + g(e^x) = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(\lambda f+g))(x) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(x)$; $\varphi(\lambda f+g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$.

φ est linéaire.

• Montrons que φ est bijective. Montrons donc que $\forall h \in F, \exists ! f \in E, \varphi(f) = h$.

Soit $h \in F$. Montrons par Analyse/Synthèse que : $\exists ! f \in E, \varphi(f) = h$.

→ Analyse/Unicité. SUPPOSONS que $\exists f \in E, \varphi(f) = h$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \varphi(f)(x) = f(e^x)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(\ln x) = f(e^{\ln x}) = f(x)$.

Donc <u>$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = h(\ln x)$.</u> D'où l'unicité.

→ Synthèse/Existence POSONS <u>$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = h(\ln x)$.</u>

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x} h'(\ln x) = \frac{1}{x} e^{\ln x} h\left(\frac{\ln x}{2}\right)$.

<u>$h \in F$</u>

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = h\left(\frac{1}{2}\ln x\right) = h(\ln \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})$.

Ainsi $f \in E$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = f(e^x) = h(\ln e^x) = h(x)$.

Donc $f \in E$ et $\varphi(f) = h$. D'où l'existence.

Ceci achève de montrer que φ est bijective.

<u>φ est un isomorphisme de E sur F.</u>

Exercice 26 **Inverse à droite**

f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E telles que $f \circ g = Id_{E'}$.

Q1. Préciser $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.

Q3. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Q4. Que dire dans le cas où E et E' ont même dimension finie n ?

Q5. Donner un exemple où $g \circ f$ n'est pas Id_E (on pourra chercher du côté de la dérivation et de l'intégration des polynômes).

Q1 Soit $x \in \operatorname{Ker} g$. $g(x) = 0_E$. $f(g(x)) = f(0_E) = 0_{E'}$; $(f \circ g)(x) = 0_{E'}$; $x = 0_{E'}$.

$\operatorname{Ker} g = \{0_{E'}\}$.

$\forall x \in E'$, $x = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$. Alors $E' \subset \operatorname{Im} f$. Or $\operatorname{Im} f \subset E'$.

Ainsi $\operatorname{Im} f = E'$

Remarque.. Cela n'est pas une surprise. $f \circ g$ est injective donc g est injective et $f \circ g$ est surjective donc f est surjective.

Q2 * - $f(E) \subset E'$ donc $g(f(E)) \subset g(E')$. Alors $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

- Soit $x \in \operatorname{Im} g$. $\exists y \in E'$, $x = g(y)$. $f(x) = f(g(y)) = y$.

Alors $x = g(y) = g(f(x))$; $x = (g \circ f)(x)$; $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Donc $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

* Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_{E'}$; $g(f(x)) = g(0_{E'}) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. $g(f(x)) = 0_E$; $f(g(f(x))) = f(0_E) = 0_{E'}$.

$(f \circ g)(f(x)) = 0_{E'}$ donc $f(x) = 0_{E'}$; $x \in \operatorname{Ker} f$.

donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.

Q3 $\boxed{V1}$ • $g\circ f \in \mathcal{L}(E)$

• $(g\circ f)\circ(g\circ f) = g\circ(f\circ g)\circ f = g\circ Id_{E'}\circ f = g\circ f$.

Alors $g\circ f$ est une projection donc $\mathrm{Im}(g\circ f)$ et $\mathrm{Ker}(g\circ f)$ sont supplémentaires.

Donc Im g et Ker f sont supplémentaires.

$\boxed{V2}$ Soit $x\in E$. Montrons par Analyse/synthèse que : $\exists!\,(y,z)\in \mathrm{Ker} f\times \mathrm{Im}\, g$, $x=y+z$.

Analyse-Unicité SUPPOSONS que $\exists(y,z)\in \mathrm{Ker} f\times \mathrm{Im}\, g$, $x=y+z$.

$f(x)=f(y)+f(z)=f(z)$. $z\in \mathrm{Im}\, g$; $\exists t\in E'$, $z=g(t)$.

Alors $f(x)=f(g(t))=t$; $z=g(f(x))$ et $y=x-g(f(x))$. D'où l'unicité.

Synthèse-Existence POSONS $y=x-g(f(x))$ et $z=g(f(x))$.

- $y+z=x$
- $f(y)=f(x)-f(g(f(x)))=f(x)-(f\circ g)(f(x))=f(x)-f(x)=0_{E'}$; $y\in \mathrm{Ker} f$.
- $z=g(f(x))\in \mathrm{Im}\, g$.

D'où l'existence.

$\forall x\in E$, $\exists!\,(y,z)\in \mathrm{Ker} f\times \mathrm{Im}\, g$, $x=y+z$. Ker f et Im g sont supplémentaires.

Q4 On suppose que $\dim E=\dim E'=n$. $\mathrm{Im} f=E'$ donc f est surjectif.

Comme $\dim E=\dim E'<+\infty$ f est bijectif.

1) f est un isomorphisme de E sur E'.

2) $f\circ g=Id_{E'}$ donc $g=f^{-1}\circ f\circ g=f^{-1}\circ Id_{E'}=f^{-1}$; $g=f^{-1}$.

Q5 On pose $E=E'=\mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P\in E$, $f(P)=P'$. g est l'application de E dans E qui à tout élément P de $\mathbb{R}[X]$ associe sa primitive qui prend la valeur 0 en 0.

Il est aisé de montrer que : $f\in\mathcal{L}(E)$, $g\in\mathcal{L}(E)$, $f\circ g=Id_E$.

Or $g(f(X+1))=g(1)=X\neq X+1$ donc $g\circ f\neq Id_E$.