EDHEC 1997

EXERCICE 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.

b. En déduire que Δ n'est pas surjective.

3) Montrer que Δ est injective.

4) On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.

a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\,e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.

b. Déterminer alors $\Delta(f)$.

5) Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.

6) Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.

a. Montrer que F_n est de classe C^{n+1}.

b. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

EXERCICE 1

Q1 Soit $f \in E$; $\Delta(f)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 donc $\Delta(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$; par conséquent $\Delta(f) \in E$.

<u>Δ est une application de E dans E.</u>

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1, f_2) \in E^2, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta(\lambda f_1 + f_2)(x) = \int_0^x (\lambda f_1 + f_2)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt = (\lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2))(x)$.

donc <u>$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1, f_2) \in E^2, \Delta(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2)$</u>. Δ est linéaire.

<u>Δ est un endomorphisme de E.</u>

Q2 a) Voir plus haut !

b) Soit $\varphi : x \mapsto |x|$. φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais φ n'est pas dérivable en 0 donc $\varphi \in E$ et $\varphi \notin \operatorname{Im} \Delta$. Par conséquent $\operatorname{Im} \Delta$ est strictement contenu(e) dans E. <u>Δ n'est pas surjective.</u> <u>Remarque</u> .. $\operatorname{Im} \Delta \subset \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ confirme la non surjectivité !

Q3 Montrons que : $\operatorname{Ker} \Delta = \{0_E\}$. Soit $f \in \operatorname{Ker} \Delta$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$

En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ donc $f = 0_E$

Par conséquent $\operatorname{Ker} \Delta = \{0_E\}$ et <u>Δ est injective.</u>

Q4 a) $\Delta(f) = \lambda f$. donc $f = \frac{1}{\lambda} \Delta(f)$ car λ n'est pas nul ; par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\Delta(f)$ l'est.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda} (\Delta(f))'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) e^{-x/\lambda}$. h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x)) e^{-x/\lambda} = 0$. h est nulle sur $\mathbb{R}$ donc <u>h est constante sur $\mathbb{R}$.</u>

b) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a e^{x/\lambda}$. Or $\Delta(f) = \lambda f$ donc $\Delta(f)(0) = \lambda f(0)$

Par conséquent : $0 = \lambda f(0) = \lambda a \times 1$. $\lambda a = 0$. $a = 0$. $f = 0_E$!! ce qui induit une légère contradiction ! Il n'est pas franchement utile de calculer $\Delta(f)$; de toute manière <u>$\Delta(f) = \lambda f = 0_E$!</u> Notons donc que <u>si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λ ne peut être valeur propre de Δ.</u>

(Q5) D'après Q3, 0 n'est pas valeur propre de Δ. De plus Q4 a montré que si λ est un réel non nul alors λ n'est pas valeur propre de Δ
donc Δ n'a pas de valeur propre ce qui n'est pas un scoop.

(Q6) a) Soit $f \in E$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

→ $F_0 = \Delta(f)$. F_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_0' = f$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.
$F_n = \Delta(F_{n-1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_n' = F_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence montre alors que F_n' est de classe $\mathcal{C}^{(n-1)+1}$ sur $\mathbb{R}$. F_n' étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ alors F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et la récurrence s'achève.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $f \in E$ et soit $n \in \mathbb{N}$. F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Nous avons vu que $F_n' = F_{n-1}$.
Une récurrence simple donne $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.
En particulier $F_n^{(n)} = F_0 = \Delta(f)$, donc $F_n^{(n+1)} = (\Delta(f))' = f$.
Notons encore que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)}(0) = F_{n-k}(0) = \begin{cases} \Delta(f)(0) = \underline{0} & \text{si } n-k=0 \\ \Delta(F_{n-k-1})(0) = \underline{0} & \text{si } n-k \geqslant 1 \end{cases}$
Il est grand temps d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à F_n ... qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$.

Remarque. Nous avons en fait prouvé que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E$, $\Delta^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$ pour tout réel x.
Ce résultat peut se démontrer par récurrence sur n à condition de ne pas oublier le "$\forall f \in E$" dans la propriété de récurrence (... l'hypothèse de récurrence opère sur Δf ...)

EDHEC 1997

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

a. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\, dt = 0$.

c. En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, |f(x)| < \frac{1}{2x}$.

b. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5) a. Montrer que $f(\pi/2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

b. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\, dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

c. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

EXERCICE 2

Remarque.. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $[x,2x]\subset\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $[2x,x]\subset\mathbb{R}_-^*$ ... donc f est bien définie... sur $\mathbb{R}$!

(Q1) a) g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues...

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$; $\sin t - t = -\frac{t^3}{6} + o(t^3)$; $\sin t - t \underset{0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$; $\frac{\sin t - t}{t^2} \underset{0}{\sim} -\frac{t}{6}$

donc $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0 = g(0)$; g est continue en 0.

Finalement $\underline{\underline{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}}$. **Remarque**.. Un dl 2 suffisait largement !

b) Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. G est continue en tout point de $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Par conséquent : $\lim_{x\to 0}(G(2x)-G(x)) = G(0)-G(0) = 0$.

Et donc $\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} g(t)\,dt = 0}}$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x}\frac{t}{t^2}dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + [\ln|t|]_x^{2x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln|2x| - \ln|x| = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln 2$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt = 0 + \ln 2 = f(0)$; $\underline{\underline{f \text{ est continue en } 0}}$.

(Q2) Soit $\underline{\underline{x\in\mathbb{R}^*}}$. $\displaystyle f(-x) = \int_{-x}^{-2x}\frac{\sin t}{t^2}dt \underset{u=-t}{=} \int_x^{2x}\frac{\sin(-u)}{u^2}(-du) = \int_x^{2x}\frac{\sin u}{u^2}du = f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(-x)=f(x)$; cette égalité vaut encore pour $x=0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$. $\underline{\underline{f \text{ est paire sur } \mathbb{R}}}$.

(Q3) a) $\varphi : t\mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit ϕ une primitive de φ sur $\mathbb{R}^*$.

ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $x\mapsto \phi(2x)-\phi(x)$ aussi (composition banale)

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_x^{2x}\varphi(t)\,dt = \phi(2x)-\phi(x)$. $\underline{\underline{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \underline{2}\,\phi'(2x) - \phi'(x) = 2\varphi(2x)-\varphi(x) = \frac{2\sin 2x}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2x^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{2x^2}$.

c) $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{2\times x\times x^2/2}{2x^2} = -\dfrac{x}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$. Le théorème de la limite de la dérivée indique alors que :

1°. f est dérivable en 0 2°. $f'(0)=0$ 3° f' est continue en 0.

Remarque. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Le signe de f' sur $]0,+\infty[$ est celui de la fonction $-\sin$ ... et même sur $[0,+\infty[$!

Donc $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in[k\times 2\pi, k\times 2\pi+\pi],\ f'(x)\leq 0$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in[k\times 2\pi+\pi, (k+1)\times 2\pi],\ f'(x)\geq 0$.

Q4 a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall t\in[x,2x]$, $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right|\leq\dfrac{1}{t^2}$ et $\exists t_0\in[x,2x]$, $\left|\dfrac{\sin t_0}{t_0^2}\right|<\dfrac{1}{t_0^2}$

Par conséquent : $\displaystyle\int_x^{2x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt \underset{x<2x}{<} \int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x}+\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$.

ce qui donne encore : $|f(x)| = \left|\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right| \leq \int_x^{2x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt < \frac{1}{2x}$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ |f(x)|<\dfrac{1}{2x}$.

Remarque. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ |f(x)|<\dfrac{1}{2|x|}$ et par parité : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ |f(x)|<\dfrac{1}{2|x|}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ |f(x)|<\dfrac{1}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Q5 a) $\forall t\in[\frac{\pi}{2}, 2\times\frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{\sin t}{t^2}\geq 0$ et $\forall t\in[\frac{\pi}{2}, 2\times\frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{\sin t}{t^2}>0$ donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\times\pi/2}\frac{\sin t}{t^2}dt>0$.

$\forall t\in[\pi, 2\times\pi]$, $\dfrac{\sin t}{t^2}\leq 0$ et $\forall t\in]\pi,2\pi[$, $\dfrac{\sin t}{t^2}<0$ donc $\displaystyle\int_{\pi}^{2\times\pi}\frac{\sin t}{t^2}dt<0$.

Finalement : $f(\frac{\pi}{2})>0$ et $f(\pi)<0$.

b) $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \underset{u = t-\pi}{=} \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2}\,du$

donc $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt - \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u)}{(u+\pi)^2}\,du = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right)\sin t\,dt$.

$\forall t \in [2\pi, 3\pi]$, $\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) > 0$; $\forall t \in [2\pi, 3\pi]$, $\sin t \geq 0$ et $\forall t \in]2\pi, 3\pi[$, $\sin t > 0$

donc $\underline{\underline{f(2\pi) > 0}}$.

EDHEC 1999

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) = \int_n^x e^{t^2}\, dt$.

1) Étude de g_n.

a. Montrer que g_n est dérivable sur son domaine et donner son sens de variation.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

c. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté x_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $g_n(x_n) = 1$.

2) Étude de la suite (x_n).

a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$.

3) On pose $u_n = x_n - n$

a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_n$.

c. Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

Exercice 1

Q1 a) Soit f_n la restriction de $t \mapsto e^{t^2}$ à $[n,+\infty[$.

f_n est continue sur $[n,+\infty[$ et $\forall x \in [n,+\infty[$, $g_n(x) = \int_n^x f_n(t)\,dt$.

Ainsi g_n est la primitive de f_n sur $[n,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en n.

Donc g_n est dérivable sur $[n,+\infty[$ et $\forall x \in [n,+\infty[$, $g_n'(x) = e^{x^2} > 0$.

g_n est strictement croissante sur $[n,+\infty[$.

b) $\forall t \in [n,+\infty[$, $e^{t^2} \geqslant 1$. $\forall x \in [n,+\infty[$, $g_n(x) \geqslant \int_n^x dt = x-n$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} (x-n) = +\infty$ donc $\lim_{x \mapsto +\infty} g_n(x) = +\infty$.

c) g_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[n,+\infty[$ donc g_n définit une bijection de $[n,+\infty[$ sur l'intervalle $[g_n(n), \lim_{x \mapsto +\infty} g_n(x)[= [0,+\infty[$

$1 \in [0,+\infty[$ donc $\exists !\, x_n \in [n,+\infty[$, $g_n(x_n) = 1$.

Q2 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [n,+\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n$ et $\lim_{n \mapsto +\infty} n = +\infty$ donc

$\lim_{n \mapsto +\infty} x_n = +\infty$.

b) $\forall t \in [n, x_n]$, $e^{n^2} \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x_n^2}$; $\int_n^{x_n} e^{n^2} dt \leqslant g_n(x_n) = \int_n^{x_n} e^{t^2} dt \leqslant \int_n^{x_n} e^{x_n^2} dr$

Ainsi $e^{n^2}(x_n - n) \leqslant g_n(x_n) = 1 \leqslant e^{x_n^2}(x_n - n)$.

Donc $e^{n^2}(x_n-n) \leqslant 1 \leqslant e^{x_n^2}(x_n-n)$, $(x_n - n) \leqslant e^{-n^2}$ et $e^{-x_n^2} \leqslant (x_n - n)$.

Donc $e^{-x_n^2} \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}$

Q3 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-x_n^2} \leqslant u_n \leqslant e^{-n^2}$ et $\lim_{n \mapsto +\infty} e^{-x_n^2} = \lim_{n \mapsto +\infty} e^{-n^2} = 0$

Par encadrement il vient : $\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

b) $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq x_n - n = u_n \leq e^{-n^2}$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq n u_n \leq n e^{-n^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n e^{-n^2}) = 0$ (croissance comparée).

Il vient alors par encadrement : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = 0}}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{-x_n^2+n^2} \leq e^{n^2}(x_n - n) \leq 1$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^{n^2-x_n^2} \leq \dfrac{x_n-n}{e^{-n^2}} \leq 1$. Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n-n}{e^{-n^2}} = 1$ il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n^2-x_n^2} = 1$ c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - x_n^2) = 0$

$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n \overset{Q2b}{\leq} e^{-n^2}+n$; $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ x_n^2 \leq e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2} + n^2$

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0 \leq x_n^2 - n^2 \leq e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2}$

Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^2 - n^2) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-2n^2} + 2n e^{-n^2}) = 0$

Ceci achève alors de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n-n}{e^{-n^2}} = 1$ et donc que $\underline{\underline{x_n - n \sim e^{-n^2}}}$

EDHEC 2001

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des fonctions φ de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(*)$ suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\ \varphi(x)$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.

3) Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

   a. Vérifier que f est élément de E.

   b. Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.

   Montrer que g est élément de E

4) a. Soit h une solution de $(*)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.

   b. Montrer finalement que (f, g) est une base de E.

Exercice 1

Q1 Posons $F = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois "usuelles".

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de F.

- Par définition E est contenu dans F.
- $0_F \in E$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_F''(x) = 0 = (1+x^2)\times 0 = (1+x^2)\,0_F(x)$.
- Soient f et g deux éléments de E et soit λ un réel.

  $\lambda f + g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)''(x) = \lambda f''(x) + g''(x) = \lambda(1+x^2)f(x) + (1+x^2)g(x) = (1+x^2)(\lambda f+g)(x)$.

  Ainsi $\lambda f + g \in E$.

Ceci achève de prouver que E est un sous-espace vectoriel de F.

Ainsi <u>E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

Il est grand temps de poser : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (1+x^2)$ pour simplifier les écritures...

Q2 Soit (u,v) un couple d'éléments de E.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $u'v - v'u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$(u'v - v'u)' = u''v + u'v' - v''u - v'u' = u''v - v''u = \varphi u v - \varphi v u = 0_E$.

Ainsi $u'v - v'u$ est de dérivée nulle sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$;

Alors <u>$u'v - v'u$ est constante sur $\mathbb{R}$.</u>

Q3 a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x e^{x^2/2}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{x^2/2} + x^2 e^{x^2/2} = (1+x^2)f(x)$.

Notons que f'' est continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f'' = \varphi f$.

Ainsi <u>f est un élément de E.</u>

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$. ℓ est la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $\frac{1}{f^2}$. Ainsi ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\ell' = \frac{1}{f^2}$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{1}{f^2}$ également.

Ainsi ℓ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. ℓ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$... au moins.

Par produit $f\ell$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$(f\ell)'' = f''\ell + 2f'\ell' + f\ell'' = \varphi f\ell + 2f'\frac{1}{f^2} + f\left(\frac{1}{f^2}\right)' = \varphi f\ell + 2\frac{f'}{f^2} + f\left(-\frac{2f'f}{f^4}\right)$

$(f\ell)'' = \varphi f\ell + 2\frac{f'}{f^2} - 2\frac{f'}{f^2} = \varphi f\ell$. Ceci achève de montrer que $f\ell$ appartient à E.

Ainsi $g : x \longmapsto f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ appartient à E.

Q4 a) Soit h un élément de E. Comme f appartient à E : $h'f - hf'$ est constante. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $h'f - hf' = \lambda$.

Alors $\dfrac{h'f - hf'}{f^2} = \lambda\dfrac{1}{f^2}$; $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = \lambda\dfrac{1}{f^2}$

Or $\ell : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{1}{f^2}$.

Ainsi $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $\dfrac{h}{f} = \lambda\ell + \mu$; $h = \lambda f\ell + \mu f = \lambda g + \mu f$.

Si h est une solution de $(*)$: h est combinaison linéaire de f et g.

b) Ce qui précède prouve que $E \subset \mathrm{Vect}(f,g)$.

Or f et g sont deux éléments de l'espace vectoriel E donc $\mathrm{Vect}(f,g) \subset E$.

Ainsi $E = \mathrm{Vect}(f,g)$ et (f,g) est une famille génératrice de E.

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha f + \beta g = 0_E$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha e^{x^2/2} + \beta e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}\,dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} = 0$. En dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $\beta\dfrac{1}{(f(x))^2} = 0$ donc $\beta = 0$.

Alors $0_E = \alpha f + \beta g = \alpha f$. Comme $f \neq 0_E$: $\alpha = 0$. $\alpha = \beta = 0$.

(f,g) est donc une famille libre et génératrice de E. (f,g) est une base de E.

EDHEC 2008

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.

2) a) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos\dfrac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\dfrac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\dfrac{2k-1}{2}t)$.

b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos\frac{t}{2} \right).$$

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2}$.

3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

1) Soit λ un réel non nul. f et $t \to \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Une intégration par parties simple donne alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\left(\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)\right)\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a) - \int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)\sin(\lambda b)| + |f(a)\sin(\lambda a)| + \left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)||\sin(\lambda b)| + |f(a)||\sin(\lambda a)| + \int_a^b |f'(t)||\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Comme : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\right) = 0$, le théorème d'encadrement donne alors sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Remarque Ceci qui précède donne de la même manière $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty}\int_a^b f(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$

2) a) Soient a et b deux réels. $\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$.

En ajoutant ces deux égalités et en divisant par 2 on obtient : $\cos a\,\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\frac{t}{2}\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2} + k\,t\right) + \cos\left(\frac{t}{2} - k\,t\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{1-2k}{2}\,t\right)\right).$

La fonction cos étant paire on a alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \cos\frac{t}{2}\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right).}$$

b) Soit t un élément de $[0,1]$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\,\cos\frac{t}{2}\,\cos(k\,t)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\,\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right)\right).$$

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,t\right).$$

Une petite translation d'indice au niveau de la seconde somme donne :

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right).$$

Ou : $\displaystyle\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos(k\,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,\cos\left(\frac{2k+1}{2}\,t\right)$. En simplifiant il vient :

$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\frac{1}{2}(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$. Finalement :

$$\boxed{\forall t\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).}$$

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Observons que $\forall t\in[0,1],\ \cos\frac{t}{2}\neq 0$. Alors par division la question précédente fournit :

$\forall t\in[0,1],\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=\frac{1}{2}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$. Ou :

$\forall t\in[0,1],\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(k\,t)=(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$.

En intégrant entre 0 et 1, et par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t\right)=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.$$

Or $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ (-1)^k\int_0^1\cos(k\,t)\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^k}{k}\Big[\sin(k\,t)\Big]_0^1=(-1)^k\frac{\sin k}{k}=u_k$. Finalement :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}u_k=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.}$$

3) Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|$.

Considérons alors la fonction $g:t\to\frac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right|$.

La première question donne : $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 g(t)\cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t=0$ car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}u_k-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 g(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t\right|=0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=-\frac{1}{2}$. Ce qui signifie que la série de terme général u_n est convergente et de somme $-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n=(-1)^n\frac{\sin n}{n}\text{ converge et }\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}=-\frac{1}{2}.}$$
