Exercice **Une caractérisation importante des fermés.**

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\boxed{F \text{ est un fermé si et seulement si toute suite de } F \text{ qui converge a sa limite dans } F.}$$

---

* Supposons que F est fermé. Soit $(x_p)_{p\geqslant p_0}$ une suite d'éléments de F qui converge vers L. Montrons que $L \in F$. Supposons que $L \notin F$.

Alors $L \in \bar{F}$ et $\bar{F}$ est ouvert. $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(L,r) \subset \bar{F}$.

$\lim\limits_{p\to+\infty} x_p = L$ donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists q \in [\![p_0,+\infty[\![, \forall p \in [\![p_0,+\infty[\![, p \geqslant q \Rightarrow \|x_p - L\| < \varepsilon$.

$r \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\exists q \in [\![p_0,+\infty[\![$, tel que $\forall p \in [\![q,+\infty[\![, \|x_p - L\| < r$.

$\forall p \in [\![q,+\infty[\![, x_p \in B(L,r)$ et $B(L,r) \subset \bar{F}$.

Ainsi $\forall p \in [\![q,+\infty[\![, x_p \notin F$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc nécessairement $L \in F$.

* Réciproquement supposons que toute suite d'éléments de F qui converge a sa limite dans F. Montrons par l'absurde que F est fermé.

Supposons que F n'est pas fermé. Alors $\bar{F}$ n'est pas ouvert.

Donc $\exists A \in \bar{F}, \forall r \in \mathbb{R}_+^*, B(A,r) \not\subset \bar{F}$. $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, B(A,r) \cap F \neq \emptyset$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}, B(A, \frac{1}{p+1}) \cap F \neq \emptyset$.

$\forall p \in \mathbb{N}, \exists x_p \in B(A, \frac{1}{p+1}) \cap F$. Ainsi 1) $(x_p)_{p\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de F.

2°) $\forall p \in \mathbb{N}, \|x_p - A\| \leqslant \frac{1}{p+1}$; par encadrement $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x_p - A\| = 0$. Donc $(x_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers A. 3) $A \notin F$

Nous venons donc de construire une suite d'éléments de F qui converge vers un élément n'appartenant pas à F. Cela contredit l'hypothèse.

Finalement F est un fermé.

Exercice Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seules parties de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouvertes et fermées.

∗ $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

∗ Supposons que D soit une partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée.

Montrons par l'absurde que $D = \emptyset$ ou $D = \mathbb{R}^n$. Supposons donc que $D \neq \emptyset$ <u>et</u> $D \neq \mathbb{R}^n$.

$D \neq \emptyset$ donc $\exists A \in D$. $D \neq \mathbb{R}^n$ donc $\overline{D} \neq \emptyset$. $\exists B \in \overline{D}$. $\underline{A \in D \text{ et } B \notin D}$. $\underline{A \neq B}$.

Posons $U = B - A$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_t = A + t(B-A) = A + tU$.

Posons encore $\underline{S = \{t \in [0,1],\ M_t \in D\}}$.

$M_0 = A$ et $M_1 = B$.

$A \in D$ donc $0 \in S$ et $S \subset [0,1]$. S est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

S possède une borne supérieure c. $c \in [0,1]$ car $0 \in S$ et 1 majore S.

<u>1er cas..</u> $\underline{c \in S}$. Alors $M_c \in D$. Notons alors que $c < 1$ car $c \neq 1$ dans la mesure où $1 \notin S$ puisque $M_1 = B \notin D$.

D est un ouvert et $M_c \in D$. $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(M_c, r) \subset D$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. $M_t \in B(M_c, r) \iff \|M_t - M_c\| < r \iff \|A + tU - A - cU\| < r \iff |t-c|\,\|U\| < r$.

$$M_t \in B(M_c, r) \underset{\substack{\uparrow \\ U = B-A \neq 0 \text{ car } A \neq B.}}{\iff} |t-c| < \frac{r}{\|U\|} \iff t \in \left]c - \frac{r}{\|U\|},\ c + \frac{r}{\|U\|}\right[.$$

$c < 1$ donc il est possible de trouver un réel t_0 tel que $c < t_0 < \min\left(1, c + \frac{r}{\|U\|}\right)$.

Alors 1) $c < t_0 < 1$

2) $0 < t_0 < c + \frac{r}{\|U\|}$ donc $M_{t_0} \in B(M_c, r)$ et ainsi $M_{t_0} \in D$.

Dans ces conditions $t_0 \in S$, $c < t_0$ et $c = \operatorname{Sup} S$.

Ceci est évidemment impossible.

<u>2ième cas</u>. <u>$c \notin S$</u>. Alors $\Pi_c \notin D$. $\Pi_c \notin \bar{D}$.

Comme $\bar{D}$ est ouvert : $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(\Pi_c, r) \subset \bar{D}$.

Ici encore $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Pi_t \in B(\Pi_c, r) \Longleftrightarrow t \in \left]c - \frac{r}{\|U\|}, c + \frac{r}{\|U\|}\right[$.

Donc si $t \in \left]c - \frac{r}{\|U\|}, c + \frac{r}{\|U\|}\right[$, $\Pi_t \in B(\Pi_c, r)$ donc $\Pi_t \in \bar{D}$.

$\forall t \in \left]c - \frac{r}{\|U\|}, c + \frac{r}{\|U\|}\right[$, $\Pi_t \notin D$ ... et $t \notin S$.

c est le plus petit majorant de S donc $c - \frac{r}{\|U\|}$ ne majore pas S.

Alors il existe un élément t_1 de S tel que $c - \frac{r}{\|U\|} < t_1 \leq c$.

Donc $\Pi_{t_1} \in D$ et $t_1 \in \left]c - \frac{r}{\|U\|}, c + \frac{r}{\|U\|}\right[$.

Alors $\Pi_{t_1} \in D$ et $\Pi_{t_1} \notin D$!

On ne peut donc pas avoir $D \neq \emptyset$ <u>et</u> $D \neq \mathbb{R}^n$. Alors $D = \emptyset$ ou $D = \mathbb{R}^n$.

Exercice Etudier l'existence d'une limite pour f en $(0,0)$ dans les cas suivants.

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+xy^3}{x^3+y^3}$ c) $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$.

a) Supposons que f admette une limite L en $(0,0)$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$.

Comme $\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} v(t) = 0$, par composition on a $\lim_{t\to 0} f(u(t), v(t)) = L$

Ainsi $L = \lim_{t\to 0} f(u(t), v(t)) = 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t), v(t)) = 0$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{u}(t) = \hat{v}(t) = t$.

$\lim_{t\to 0} \hat{u}(t) = \lim_{t\to 0} \hat{v}(t) = 0$. Alors par composition $\lim_{t\to 0} f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = L = 0$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} = \lim_{t\to 0} f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = 0$!!

<u>f n'a pas de limite en $(0,0)$.</u>

b) Supposons que f admette une limite L en 0.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$, $v(t) = 0$, $\hat{u}(t) = 0$ et $\hat{v}(t) = t$.

$\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0} v(t) = \lim_{t\to 0} \hat{u}(t) = \lim_{t\to 0} \hat{v}(t) = 0$.

Alors par composition : $\lim_{t\to 0} f(u(t), v(t)) = \lim_{t\to 0} f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = L$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t), v(t)) = 1$ et $f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = 0$

Ainsi $L = \lim_{t\to 0} f(u(t), v(t)) = 1$ et $L = \lim_{t\to 0} f(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = 0$!!

<u>f n'a pas de limite en $(0,0)$.</u>

c) Supposons que f admette pour limite L en $(0,0)$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t)=t$, $v(t)=0$, $\tilde{u}(t)=t^2$ et $\hat{v}(t)=t$.

$\lim\limits_{t \to 0} u(t) = \lim\limits_{t \to 0} v(t) = \lim\limits_{t \to 0} \tilde{u}(t) = \lim\limits_{t \to 0} \hat{v}(t) = 0.$

Par composition $\lim\limits_{t \to 0} f(u(t), v(t)) = \lim\limits_{t \to 0} f(\tilde{u}(t), \hat{v}(t)) =$

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(u(t), v(t)) = 0$ et $f(\tilde{u}(t), \hat{v}(t)) = \dfrac{t^8}{t^{12}+t^8} = \dfrac{1}{t^4+1}$.

Alors $L = \lim\limits_{t \to 0} f(u(t), v(t)) = 0$ et $L = \lim\limits_{t \to 0} f(\tilde{u}(t), \hat{v}(t)) = 1$!!

<u>f n'a pas de limite en $(0,0)$.</u>

R

Exercice **Un exemple pathologique mais presque.**

Q1. Montrer que $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Q2. Etudier la continuité de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

Q1 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \neq 0$ et $y \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Q2 $(x,y) \mapsto \frac{1}{xy}$ est une fraction rationnelle dont le domaine de définition est Ω.

Alors $(x,y) \to \frac{1}{xy}$ est continue sur Ω. Comme $t \mapsto \sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$(x,y) \to \sin\frac{1}{xy}$ est continue sur Ω ... par composition.

$(x,y) \to x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Ω car c'est une fonction polynôme.

Par produit f est continue sur l'ouvert Ω.

Donc f est continue en tout point de Ω.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \Omega$. Etudions la continuité de f en $A = (a,b)$. $a = 0$ ou $b = 0$.

1er cas.. $(a,b) = (0,0)$. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

• $X \in \Omega$. $|f(X) - f(A)| = |f(X)| = (x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{xy}\right| \leq x^2+y^2 = \|X\|^2 = \|X-A\|^2$

• $X \notin \Omega$. $|f(X) - f(A)| = |f(X)| = |0| = 0 \leq \|X\|^2 = \|X-A\|^2$

Alors $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $|f(X)-f(A)| \leq \|X-A\|^2$ et $\lim\limits_{X\mapsto A} (\|X-A\|^2) = 0$.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{X\mapsto A} f(X) = f(A)$. Ainsi f est continue en A.

2ème cas.. $a \neq 0$ et $b = 0$. Nous allons montrer que f n'est pas continue en A en raisonnant par l'absurde.

Supposons que f est continue en $A=(a,b)$ (avec $a\neq 0$ et $b=0$).

Alors $\lim_{X\to A} f(X) = f(A) = 0$. Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $u(t)=a$ et $v(t)=t$.

$\lim_{t\to 0} u(t) = a$ et $\lim_{t\to 0} v(t) = 0 = b$. Alors par composition $\lim_{t\to 0} f(u(t),v(t)) = f(A) = 0$.

Soit $t\in\mathbb{R}^*$. $f(u(t),v(t)) = f(a,t) \underset{\uparrow}{=} (a^2+t^2)\sin\frac{1}{at}$.

$a\neq 0, t\neq 0$

Donc $\lim_{t\to 0}\left((a^2+t^2)\sin\frac{1}{at}\right) \overset{(▲)}{=} 0$. Or $\lim_{t\to 0}\frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2}$.

Alors par produit on obtient : $\lim_{t\to 0}\sin\frac{1}{at} = \frac{1}{a^2}\times 0 = 0$. $\lim_{t\to 0}\sin\frac{1}{at} = 0$.

Par composition $\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{a\times\frac{t}{a}}\right) = 0$. $\lim_{t\to 0}\sin\frac{1}{t} = 0$.

Posons alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La caractérisation séquentielle de la notion de limite donne alors $\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{u_n} = 0$. Donc $0 = \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = 1$!!

Cette contradiction montre que f n'est pas continue en $A=(a,b)$ si $a\neq 0$ et $b=0$.

3ième cas : $a=0$ et $b\neq 0$. Même chose que le 2ème cas ! f n'est pas continue en $A=(a,b)$.

Exercice de contrôle : traiter ce cas.

Finalement si $X\in\mathbb{R}^2$, f est continue en X si et seulement si $X\in\Omega\cup\{(0,0)\}$.

Remarque : A partir de ▲ on pouvait aussi obtenir une contradiction en construisant une suite $(w_n)_{n\geq 0}$ telle que $\left((a^2+w_n^2)\sin\frac{1}{a w_n}\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0.

Ex : $w_n = 1/(a(2n+1)\frac{\pi}{2})$.

Exercice f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$.

Q1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$ (si nécessaire on pourra remarquer que $1-x \leqslant 1-xy$ pour...).

Q2. En déduire que f possède un maximum M et un minimum m sur $[0,1]^2$.

Q3. Préciser m et les points où f prend cette valeur.

Q1 • Posons $A=(1,1)$. f coïncide sur $[0,1]^2 - \{A\}$ avec une fonction rationnelle donc f est continue en tout point de $[0,1]^2 - \{A\}$...

• Soit $X=(x,y) \in [0,1]^2 - \{A\}$. $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ et $(x,y) \neq (1,1)$

$|f(X)-f(A)| = xy(1-y)\dfrac{1-x}{1-xy} \underset{\uparrow}{\leqslant} (1-y)\dfrac{1-x}{1-xy}$

$xy \leqslant 1,\ 1-y \geqslant 0,\ \dfrac{1-x}{1-xy} \geqslant 0.$

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$ donc $0 \leqslant xy \leqslant x$; $1-x \leqslant 1-xy$ et $1-xy > 0$

$\uparrow\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1$ et $(x,y) \neq (1,1)$

donc $\dfrac{1-x}{1-xy} \leqslant 1.$

facultatif

Comme $1-y \geqslant 0$: $|f(X)-f(A)| \leqslant (1-y)\dfrac{1-x}{1-xy} \leqslant 1-y = |y-1| \leqslant \operatorname{Max}(|x-1|,|y-1|) \leqslant \|X-A\|$

Donc $\|f(X)-f(A)\| \leqslant \|X-A\|$. Notons que ceci vaut encore pour $X=A$.

Alors $\forall X \in [0,1]$, $\|f(X)-f(A)\| \leqslant \|X-A\|$ et $\displaystyle\lim_{X \mapsto A} \|X-A\| = 0$.

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{X \mapsto A} f(X) = f(A)$; f est continue en A.

Q2 • $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $[0,1]^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fermés de $\mathbb{R}$.

• $\forall X=(x,y) \in [0,1]^2$, $\|X\| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$[0,1]^2$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

• f est continue sur $[0,1]^2$.

Les trois points précédents permettent de dire que f possède un maximum M et un minimum m sur $[0,1]^2$.

(Q3) $A \in [0,1]^2$, et $f(A)=0$.

$$\forall X=(x,y) \in [0,1]^2,\quad f(X) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} \geq 0 = f(A).$$

$\forall X \in [0,1]^2$, $f(X) \geq f(A)$, $A \in [0,1]^2$ et $f(A)=0$.

Alors <u>le minimum m de f sur $[0,1]^2$ est 0.</u> A réalise ce minimum.

Soit $X=(x,y) \in [0,1]^2 - \{A\}$

$$f(X)=m \iff \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} = 0 \iff xy(1-x)(1-y)=0 \iff x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } y=1.$$

Si $X=(x,y) \in [0,1]^2 - \{A\}$, $f(X)=m \iff x=0$ ou $y=0$ ou $x=1$ ou $y=1$.

Rappelons que $A \in [0,1]^2$, $f(A)=m$ et $A=(1,1)$.

Alors <u>$\forall X=(x,y) \in [0,1]^2$, $f(X)=m \iff x=0$ ou $y=0$ ou $x=1$ ou $y=1$.</u>

L'ensemble des points de $[0,1]^2$ qui réalisent le minimum m de f sur $[0,1]^2$ est :

<u>$(\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})$.</u>

<u>Exercice de contrôle</u>.. Trouver M et l'ensemble des points de $[0,1]^2$ qui réalisent ce maximum.

Exercice n est un élément de $\mathbb{N}^*$, f est l'application de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n,\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \cdots + \sqrt{1-x_n^2}\right)$$

Q1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega =]0,1[^n$.

Q2. Montrer que f possède un point critique et un seul sur Ω (on pourra remarquer que $t \to \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est injective sur $[0,1[$).

Q1 Notons que $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit de n ouverts de $\mathbb{R}$.

Posons $\forall X=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(X) = x_1+x_2+\cdots+x_n$

Posons encore $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_i(X) = 1-x_i^2$.

$g, u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ (... et davantage) sur $\mathbb{R}^n$ comme fonction polynôme.

* → g étant continue sur $\mathbb{R}^n$ est continue sur $[0,1]^n$

→ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. * u_i est continue sur $\mathbb{R}^n$ donc sur $[0,1]^n$

* $\forall X \in [0,1]^n$, $u_i(X) \geqslant 0$

* $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors par composition $\sqrt{u_i}$ est continue sur $[0,1]^n$.

Par somme : $\sum_{i=1}^n \sqrt{u_i}$ est continue sur $[0,1]^n$.

Alors par produit <u>f est continue sur $[0,1]^n$.</u>

* → g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

→ Soit $i \in [\![1,n]\!]$ * u_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ donc sur Ω

* $\forall X \in \Omega$, $u_i(X) > 0$

* $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Alors par composition $\sqrt{u_i}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Par somme $\sum_{i=1}^n \sqrt{u_i}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Alors par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

(Q2) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Omega$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = 1 \times \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{-2x_k}{2\sqrt{1-x_k^2}}\right) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} - \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}} \sum_{i=1}^n x_i .$$

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Omega,\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} - \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \Omega$.

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(X) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} = \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}} \sum_{i=1}^n x_i$$

Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i > 0$ donc $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$.

Alors $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2}}{\sum_{i=1}^n x_i}$.

ne dépend pas de k !

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2}}{\sum_{i=1}^n x_i} \\ \text{et} \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2}} = \dots = \dfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}} \end{cases}$$

Posons $\forall t \in [0,1[$, $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. h est continue et dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall t \in [0,1[,\ h'(t) = \frac{1}{1-t^2}\left[\sqrt{1-t^2} - t \times \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right] = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\underbrace{\left[1-t^2+t^2\right]}_{} > 0$$

h est donc strictement croissante sur $[0,1[$. Montrons alors que h est injective sur $[0,1[$. Soit $(a,b) \in [0,1[\times [0,1[$ tel que $h(a) = h(b)$.

Si $a < b$: $h(a) < h(b)$! Si $a > b$: $h(a) > h(b)$! Donc $a = b$.

Ainsi $\forall (a,b) \in [0,1[^2$, $h(a) = h(b) \Rightarrow a = b$. h est injective sur $[0,1[$

Alors : $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} \Big/ \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ \ell(x_1) = \ell(x_2) = \cdots = \ell(x_n) \end{cases}$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i^2} \Big/ \sum_{i=1}^n x_i\right) = \dfrac{n\sqrt{1-x_1^2}}{n\, x_1} = \dfrac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1}. \end{cases}$$

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 1 - x_1^2 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{cases}.$$

Rappelons que $x_1 > 0$.

Alors $\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f admet un point critique sur Ω et un seul, le point $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{y}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Q1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$; sont-elles continues ?

Q3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Q1 Posons $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

$(x,y)\mapsto\frac{y}{x}$ est de classe C^2 sur Ω (c'est une fonction rationnelle définie sur Ω) et $t\mapsto\sin t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par composition $(x,y)\mapsto\sin\frac{y}{x}$ est de classe C^2 sur Ω.

La fonction polynôme $(x,y)\mapsto x^2$ étant de classe C^2 sur Ω, par produit f est de classe C^2 sur Ω.

En particulier <u>f est continue sur l'ouvert Ω donc en tout point de Ω.</u>

Soit $A=(0,b)\in\mathbb{R}^2-\Omega$. Montrons que f est continue en A. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

• Supposons que $X\in\Omega$. $|f(X)-f(A)|=|f(X)|=x^2\left|\sin\frac{y}{x}\right|\leq x^2\leq x^2+(y-b)^2=\|X-A\|^2$.

• Si $X\in\mathbb{R}^2-\Omega$, $|f(X)-f(A)|=0\leq\|X-A\|^2$

Alors $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $|f(X)-f(A)|\leq\|X-A\|^2$ et $\lim_{X\to A}\|X-A\|^2=0$. Par encadrement il vient alors $\lim_{X\to A}f(X)=f(A)$; f est continue en A.

Finalement <u>f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.</u>

Q2 Nous savons déjà que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω. Soit $A=(0,b)\in\mathbb{R}^2-\Omega$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{A,1}(x)=f(x,b)=\begin{cases} x^2\sin\frac{b}{x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ et $f_{A,2}(x)=f(0,x)=0$.

Alors $f_{A,2}$ est dérivable en 0 et de dérivée nulle ; <u>$\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ existe et vaut 0.</u>

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{f_{A,1}(x)-f_{A,1}(0)}{x-0}\right|=|x|\left|\sin\frac{b}{x}\right|\leq|x|$ et $\lim_{x\to0}|x|=0$ donc $\lim_{x\to0}\dfrac{f_{A,1}(x)-f_{A,1}(0)}{x-0}=0$.

$f_{A,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{A,1}(0)=0$. <u>$\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ existe et vaut 0.</u>

Notons encore que : $\forall (x,y)\in\Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\dfrac{y}{x}$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 2x\sin\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \end{cases} \qquad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x\cos\dfrac{y}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

Nous savons déjà que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point de Ω.

Soit $A=(0,b)$ un point de $\mathbb{R}^2-\Omega$. Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en A.

Commençons par $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right| = |x|\left|\cos\dfrac{y}{x}\right| \leq |x| \leq \max(|x|,|y-b|) \leq \|X-A\|$.

$\forall X\in\Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right| \leq \|X-A\|$, mieux $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\right| \leq \|X-A\|$.

Il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{X\to A} \dfrac{\partial f}{\partial y}(X) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en A.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $A=(0,b)$.

1er cas. – $b=0$. $A=(0,0)$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\right| = \left|2x\sin\dfrac{y}{x} - y\cos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)\right| \leq 2|x|\left|\sin\dfrac{y}{x}\right| + |y|\left|\cos\dfrac{y}{x^2}\right|$.

$\forall X=(x,y)\in\Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\right| \leq 2|x|+|y| \leq 3\max(|x|,|y|) \leq 3\|X\| = 3\|X-A\|$.

$\forall X\in\Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\right| \leq 3\|X-A\|$; mieux $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)\right| \leq 3\|X-A\|$.

Par encadrement il vient $\lim\limits_{X\to A} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $A=(0,0)$.

2e cas $b\neq 0$. Supposons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue en A. $\lim\limits_{X\to A} \dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$.

En particulier $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,b)\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{b}{x} - b\cos\dfrac{b}{x^2}\right) = 0$.

Or $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{b}{x}\right) = 0$; par différence il vient $\lim\limits_{x\to 0}\left(-b\cos\dfrac{b}{x^2}\right) = 0$.

ceci donne encore : $\lim\limits_{x\mapsto 0}\left(\cos\frac{b}{x^2}\right)=0$ car $b\neq 0$.

Pour $b>0$ on obtient alors $\lim\limits_{y\mapsto+\infty}\cos y=0$! et pour $b<0$ on obtient

$\lim\limits_{y\mapsto+\infty}\cos y=0$! Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut être continue en $A=(0,b)$ si $b\neq 0$.

<u>$\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.</u>

Q3 Etudions l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Posons $O=(0,0)$.

Posons $g=\frac{\partial f}{\partial x}$ et $h=\frac{\partial f}{\partial y}$. Il s'agit donc d'étudier l'existence de $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$.

$\forall y\in\mathbb{R},\ g_{0,2}(y)=g(0,y)=0$; $g_{0,2}$ est dérivable en 0 et $g'_{0,2}(0)=0$.

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0 ; <u>$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.</u>

$\forall x\in\mathbb{R},\ h_{0,1}(x)=h(x,0)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\cos\frac{0}{y}=x & \text{si } x\neq 0\end{cases}$; $\forall x\in\mathbb{R},\ h_{0,1}(x)=x$.

$h_{0,1}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,1}(0)=1$; $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 1.

<u>$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.</u>

<u>Remarque</u> : cela confirme que f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$!!

<u>Exercice</u> : Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$ pour $A\in\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{R}$.

Etudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(A)$ pour $A\in\mathbb{R}^2-(\mathcal{R}\cup\{O\})$.

Etudier la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Exercice **Fonction ayant un dl 1 sans être de classe $\mathcal{C}^1$.**

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Montrer que f possède un développement limité d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$ $(0=(0,0))$.

$$\frac{f(X)}{\|X\|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\|X\|\sin\frac{1}{\|X\|^2}.$$

$$\left|\frac{f(X)}{\|X\|}\right|=\|X\|\left|\sin\frac{1}{\|X\|^2}\right|\leqslant\|X\| \text{ et } \lim_{X\to0}\|X\|=0.$$

Par encadrement $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{f(X)}{\|X\|}=0$; $f(X)\underset{X\to0}{=}o(\|X\|)$.

$f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}0+0\times x+0\times y+o(\|(x,y)\|)$. Ainsi f admet un dl 1 au voisinage de 0.

$(x,y)\to\dfrac{1}{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$ (fonction rationnelle) et sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y)\to\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

$(x,y)\to x^2+y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynôme). Par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{0,1}(x)=f(x,0)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{f_{0,1}(x)-f_{0,1}(0)}{x}\right|=\left|x\sin\dfrac{1}{x^2}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant|x|$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$

Par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f_{0,1}(x)-f_{0,1}(0)}{x}=0$; $f_{0,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,1}(0)=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0 ; de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)$ existe et vaut 0.

Montrons par l'absurde que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0. Supposons

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue en 0.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\left[- \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} \right]$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\left| 2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} \right| = 2|x| \left| \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} \right| \leq 2|x| \leq 2\|X\|$ et $\lim\limits_{X \to 0} 2\|X\| = 0$.

Par encadrement $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} \right) = 0$

Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2} \cos \dfrac{1}{x^2+y^2} \right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[2x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] = 0 - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0} u(t) = \lim\limits_{t \to 0} v(t) = 0$. Alors par composition $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2u(t)}{(u(t))^2+(v(t))^2} \cos \dfrac{1}{(u(t))^2+(v(t))^2} = 0$

donc $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{2}{t} \cos \dfrac{1}{t^2} \right) = 0$. Or $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$.

Par produit $\lim\limits_{t\to 0} \cos \dfrac{1}{t^2} = 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos \dfrac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \cos(2n\pi) = 1$!!

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0. Il en est de même de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice **L'existence des dérivées partielles secondes n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir un dl 2.**

Q1. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède un dl2 au vosinage de $0 = (0,0)$ mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

Q2. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Q1 $\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$, $\left|\dfrac{f(x,y)}{\|X\|^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left|(x^2+y^2)^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| = (x^2+y^2)\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$, $\left|\dfrac{f(x,y)}{\|X\|^2}\right| \leq (x^2+y^2) = \|X\|^2$ et $\lim\limits_{X\to 0}\|X\|^2 = 0$.

Par encadrement : $\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{f(X)}{\|X\|^2}\right) = 0$. Alors $f(X) \underset{X\to 0}{=} o(\|X\|^2)$.

Ce qui montre que f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre 2 dont la partie régulière est le polynôme nul.

Remarque.. Cela montre en particulier que f est continue en 0 et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)$ existent et valent 0 car si f admet un dl 2 au voisinage de 0, f admet un dl 1.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$. Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{0\}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 2\times 2x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)^2\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 4x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 2x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Posons $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et étudions l'existence de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0)$ donc de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $g_{0,1}(x) = g(x,0) = 4x^3\sin\dfrac{1}{x^2} - 2x\cos\dfrac{1}{x^2}$ et $g_{0,1}(0) = g(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$

d'après la remarque 1. Alors $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{g_{0,1}(x)-g_{0,1}(0)}{x-0} = 4x^2\sin\dfrac{1}{x^2} - 2\cos\dfrac{1}{x^2}$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f_{0,2}(y) = f(0,y) = 0$. $f_{0,2}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,2}(0) = 0$

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)$ existe et vaut 0.

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\left[3x^2+y^2\right] & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Posons $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $h = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{0,1}(x) = g(x,0) = 0$. $g_{0,1}$ est dérivable en 0 et $g'_{0,1}(0) = 0$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0 ; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ existe et vaut 0.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $g_{0,2}(y) = g(0,y) = \begin{cases} y^5/y^4 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} = y$. $g_{0,2}$ est dérivable en 0 et

$g'_{0,2}(0) = 1$. Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$ existe et vaut 1.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{0,1}(x) = h(x,0) = 0$; $h_{0,1}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,1}(0) = 0$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $h_{0,2}(y) = h(0,y) = 0$; $h_{0,2}$ est dérivable en 0 et $h'_{0,2}(0) = 0$.

Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)$ existent et valent 0.

Ainsi <u>f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $0 = (0,0)$.</u>

<u>Remarque</u> : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0) = 1 \neq 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$.

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ existe et vaut ℓ.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g_{0,1}(x) - g_{0,1}(0)}{x - 0} = \ell$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \left[4x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2\cos \frac{1}{x^2} \right] = \ell$ (1)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|4x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right| = 4x^2 \left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \leq 4x^2$ et $\lim\limits_{x \to 0} 4x^2 = 0$. Alors $\lim\limits_{x \to 0} \left(4x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right) = 0$. (2)

Par soustraction de (1) et (2), il vient $\lim\limits_{x \to 0} \left(2\cos \frac{1}{x^2}\right) = -\ell$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x^2} = -\frac{\ell}{2}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$ et $v_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{v_n^2} = -\frac{\ell}{2}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos \frac{1}{u_n^2} = \cos(2n\pi) = 1$ et $\cos \frac{1}{v_n^2} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$!!

Finalement $g_{0,1}$ n'est pas dérivable en 0. Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ n'existe pas.

Donc f admet un dl 2 au voisinage de 0 sans que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ n'existe.

(Q2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\left(1 \times (x^2+y^2) - x \times 2x\right) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{0,1}(x) = f(x,0) = 0$. $f_{0,1}$ est dérivable en 0 et $f'_{0,1}(0) = 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ existe et vaut 0.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\left[3y^2(x^2+y^2) - y^3 \times 2y\right]$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\left[3x^2+y^2\right]$.

Montrons en raisonnant par l'absurde que f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0. Supposons que cela soit le cas.

Alors $\exists (a,b,c,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^6$, $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} a + bx + cy + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$.

On a également $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} a + bx + cy + o(\|(x,y)\|)$. C'est le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de $O=(0,0)$.

Par conséquent $a = f(0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $c = \frac{\partial f}{\partial y}(0)$. Donc $a=b=c=0$.

Par conséquent $f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$.

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{f(x,y) - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{\|(x,y)\|^2}\right] = 0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^3}{x^2+y^2} - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

Posons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{xy^3}{x^2+y^2} - (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)\right]$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 0$. $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = \lim\limits_{t\to 0} v(t) = 0$

Alors $0 = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(u(t), v(t)) = \frac{1}{t^2}\left[-\alpha t^2\right] = -\alpha$; $\underline{\alpha = 0.}$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{u}(t) = 0$ et $\hat{v}(t) = t$. $\lim\limits_{t\to 0} \hat{u}(t) = \lim\limits_{t\to 0} \hat{v}(t) = 0$.

Alors $0 = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(\hat{u}(t), \hat{v}(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left[-\gamma t^2\right] = -\gamma$; $\underline{\gamma = 0.}$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{xy^3}{x^2+y^2} - \beta xy\right] = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\left(y^2 - \beta(x^2+y^2)\right)$

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_1(t) = v_1(t) = t$ et $u_2(t) = 2t$ et $v_2(t) = t$.

$\lim\limits_{t\to 0} u_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} v_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} u_2(t) = \lim\limits_{t\to 0} v_2(t) = 0$.

$$0 = \lim_{t\to 0} \psi(u_1(t), v_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{(t^2+t^2)^2}\left[t^2 - 2\beta t^2\right] = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{4t^4}(1-2\beta) = \frac{1-2\beta}{4}.$$

Alors $\beta = \frac{1}{2}$.

$$0 = \lim_{t\to 0} \psi(u_2(t), v_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{2t \times t}{(4t^2+t^2)^2}\left(t^2 - \beta(4t^2+t^2)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{25t^4}(1-5\beta) = \frac{2(1-5\beta)}{25}.$$

Alors $\beta = \frac{1}{5}$!!

Ainsi <u>f n'admet pas de dl 2 au voisinage de $0 = (0,0)$ mais f</u>

<u>admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $0 = (0,0)$.</u>