ECRICOME 1993 exercice 1

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx$ soit convergente.

On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) (i) Pour $k \in [[1,n]]$, montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$.

(ii) Pour $k \in [[1,n-1]]$, montrer que : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(iii) En déduire que : $\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$.

b) En déduire la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

2°) a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}}du$.

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $I = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

3°) Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$.

a) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule et affiche P_n.

b) Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$.

c) A l'aide du **1°)**, déterminer la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

La convergence est-elle rapide ?

ECRICOME 1994 exercice 2

Démonstration de l'égalité : [1] $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}$.

1° Soit $g :]\,0\,,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto -x\ln x$
Etablir le tableau de variations de g.

2° A l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}\,, \forall u \in \mathbb{R}$ $\quad e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k\,!} + R_n(u)$, où R_n est continue et vérifie :

$$\forall u \geq 0 \quad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^u .$$

3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$.

a) Justifier l'existence de J_n .

b) Calculer J_0 ; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre J_{k+1} et J_k , pour $k \in \mathbb{N}$; en déduire la valeur de J_n .

c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]\,0\,,1\,[$.

Effectuer sur l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k (\ln x)^k\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $v = -(k+1)\ln x$.

d) En déduire l'existence et la valeur de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k (\ln x)^k\,\mathrm{d}x$.

4° *a)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} I_k + r_n , \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)\,!\,e^{n+1}} .$$

b) En déduire l'égalité [1] .

5° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Montrer que s_7 , que l'on calculera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice, est une valeur approchée à 10^{-7} près de $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x$.

ECRICOME 2006 exercice 2

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t , définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. Etude de f.

   a. Justifier que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

   b. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

   c. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

   $$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$$

   est convergente.
   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,dt.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

   $$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt.$$

   a. Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   b. Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.
   Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   c. En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,

   $$\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt.$$

   d. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

   $$g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

ECRICOME 2009 exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt.$$

1. Domaine de définition de f :

   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.

   (b) Soit x un réel fixé. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

   $$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :

   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

   (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

   (b) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. Etude locale de f et f' en 0 :

→

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$ est convergente.

(b) A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

ECRICOME 2010 exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

   (a) Vérifier que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

   En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul.

   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$.

   (c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

   A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que :

   $$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**

   (a) En utilisant la question **2**, démontrer que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du.$$

   (b) *On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*

   Donner alors un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ en fonction de I.

ECRICOME 2012 exercice 1

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$.
   Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$